ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2013. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/ 254.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 278.

A) Zadaci iz matematike

3363. Neka je $r > 1$ realan broj takav da je $\sqrt[6]{r} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{r}} = 6$. Nađi maksimalnu vrijednost od $\sqrt[4]{r} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{r}}$.

3364. Neka su a i b realni brojevi takvi da je

$$9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6.$$

Dokaži da je $7a + 5b + 12ab \leq 9$.

3365. Ako je $a,\ b,\ c > 0$, dokaži nejednakost

$$\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ac}} + \sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{ab}} + \sqrt{\frac{(c+a)(a+b)}{bc}} \geq 3 + \frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}.$$

3366. Unutar jediničnog kvadrata nalazi se nekoliko kružnica čiji je zbroj opsega jednak 22. Dokaži da postoji beskonačno mnogo pravaca koji sijeku barem 7 od tih kružnica.

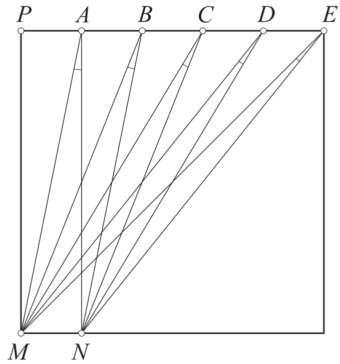
3367. Riješi diofantsku jednadžbu

$$18x + 20y + 15z = 1.$$

3368. Odredi

$$\max_{z \in \mathbf{C},\, |z|=1} |z^3 - z + 2|^2.$$

3369. Na slici je prikazan kvadrat i točke M, N, P, A, B, C, D, E tako da je $|PA| = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |MN|$. Koliki je zbroj kutova MAN, MBN, MCN, MDN i MEN.



3370. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ nasuprotni im kutovi, dokaži jednakost

$$\frac{a^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{b^2}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{c^2}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} - \frac{2bc}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

3371. Neka je O središte trokutu ABC opisane kružnice, P i Q polovišta dužina $\overline{AO}$ i $\overline{BC}$, tim redom. Ako je $\sphericalangle CBA = 4\sphericalangle OPQ$ i $\sphericalangle ACB = 6\sphericalangle OPQ$, odredi veličinu $\sphericalangle OPQ$.

3372. U pravokutnom trokutu ABC kut uz vrh A je pravi. Neka je $\overline{AD}$ njegova visina na stranicu BC. S M i N označena su središta trokutima ABD u ACD upisanih kružnica. Pravci kroz M i N paralelni s AD sijeku stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama E i F. Dokaži da je $|AE| = |AF|$.

3373. Neka su A, B, C tri točke na kružnici polumjera $r = 1$, a T i H su, tim redom, težište i sjecište visina trokuta ABC. S F je označeno polovište dužine $\overline{TH}$. Koliko je $|AF|^2 + |BF|^2 + |CF|^2$?

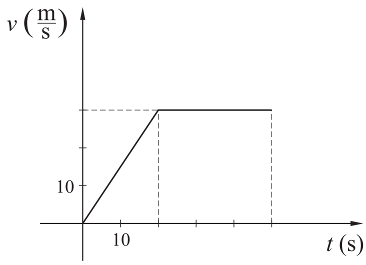
3374. Koliko ima nenegativnih cijelih brojeva manjih od 10^6 koji sadrže svaku znamenku 1, 2, 3, 4?

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 358. Zvučni val ima u zraku valnu duljinu 85 cm. Kolika mu je brzina širenja u sredstvu u kojem zvuk iste frekvencije ima valnu duljinu 680 cm? Brzina zvuka u zraku je 340 m/s.

OŠ – 359. Crveni spust je jedna od najduljih slalomskih staza u svjetskom skijaškom kupu. Duljina staze je 655 metara. Ove je godine u ženskoj konkurenciji pobijedila Amerikanka Mikaela Shiffrin, a u muškoj Austrijanac Marcel Hirscher. Vrijeme prve vožnje za Shiffrin je bilo 59.26 sekundi, a za Hirschera 58.66 s. Kolika bi bila udaljenost između njih u trenutku kad bi Hirscher ušao u cilj da su takvim brzinama skijali istovremeno?

OŠ – 360. Izračunaj put koji je prešlo tijelo čije je gibanje prikazano v-t grafom. Kolika je bila akceleracija tijela tijekom ubrzavanja?



OŠ – 361. Dva se vlaka gibaju na paralelnim tračnicama jedan ususret drugom. Brzina prvog vlaka je 15 m/s, a drugoga 72 km/h. Putnik u prvom vlaku je izmjerio da je drugi vlak pored njega prolazio 4 sekunde. Kolika je duljina drugog vlaka?

1532. Odredi brzinu zvuka pri temperaturi 300 K u mješavini od 70% zraka i 30% helija. Helij je jednoatomni plin mase 4 g/mol, a za zrak uzimamo da je dvoatomni plin srednje molekulske mase 29 g/mol.

1533. Osam jednakih naboja q raspoređeni su u vrhove kocke duljine stranice a. Kolika elektrostatska sila djeluje na svaki naboj?

1534. Radi određivanja količine krvi u tijelu, pacijentu se u nekom trenutku $t = 0$ u krvotok ubrizga 10 ml radioaktivne otopine, s vremenom poluraspada 1.25 sati. Nakon dva sata, otopina se ravnomjerno rasporedila po krvotoku, te je u uzorku 10 ml krvi određena aktivnost 1650 puta manja od početno unesene. Odredi volumen krvi pacijenta.

1535. Staklena cijev načinjena je od stakla indeksa loma 1.55. Vanjski promjer cijevi je 1 cm, a unutarnji izgleda 7.8 mm velik gledano izvana okomito na cijev. Odredi stvarni unutarnji promjer cijevi. Unutar i izvan cijevi je zrak, indeksa loma 1.

1536. Dva asteroida kruže u istoj ravnini oko Sunca. Prvi ima dvostruko manje ophodno vrijeme od drugog, a minimalna međusobna udaljenost asteroida je 0.85 astronomskih jedinica. Odredi oba ophodna vremena u godinama.

1537. Projektil mase 12 kg ispaljen je početnom brzinom 150 m/s pod kutem 60° u odnosu na horizontalu. U tjemenu putanje, projektil eksplodira i razdvoji se na dva dijela, mase 9 i 3 kg. Oba dijela padnu na horizontalno tlo istovremeno, a veći dio padne na mjesto ispucavanja projektila. Na koju će udaljenost od mjesta ispucavanja pasti manji dio projektila? Kolika je energija eksplozije?

1538. Snop svjetlosti upada okomito na difrakcijsku rešetku. Razlika kutova prvog i drugog ogibnog maksimuma iznosi 30° za svjetlost valne duljine 700 nm. Koliki je razmak susjednih zareza rešetke (konstanta rešetke)? Koliko iznosi razlika kutova istih maksimuma za svjetlost valne duljine 500 nm?

C) Rješenja iz matematike

3339. *Uz pretpostavku da je*

$$\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\ldots}}}}$$

neki realan broj, odredi njegovu vrijednost.

Rješenje. Dobije se broj $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$,

$$a = \sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\ldots}}}} \quad \Big/^2$$

$$a^2 = 1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\ldots}}}$$

$$a^2 - 1 = \sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\ldots}}} \quad \Big/^2$$

$$(a^2-1)^2 = 7 + \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{7+\ldots}}}_{a}$$

$$a^4 - 2a^2 + 1 - 7 - a = 0$$

$$a^4 - 2a^2 - a - 6 = 0.$$

Polinom $P(x) = x^4 - 2a^2 - x - 6$ ima realne koeficijente i broj uzastopnih promjera njihovih koeficijenata je 1. Zato on ima samo jedan pozitivan korijen. Uvrštavajući $a=2$ vidimo da je jednadžba zadovoljena.

Luka Božur (3), Druga gimnazija, Sarajevo, BiH

3340. *Dani su realni brojevi a, b takvi da je $a^2 \geq b^2 > a^2-1$. Riješi sustav jednadžbi*

$$\frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a,$$
$$\frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b.$$

Rješenje. Zbrajanjem i oduzimanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$\frac{(x+y)(1-\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a+b$$
$$\frac{(x-y)(1+\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a-b.$$

Množenjem ovih jednadžbi dobivamo

$$\frac{(x^2-y^2)(1-x^2+y^2)}{1-x^2+y^2}=a^2-b^2$$

tj.

$$x^2-y^2=a^2-b^2.$$

Uvrštavanjem u prvu i drugu jednadžbu imamo:

$$x-\sqrt{a^2-b^2}\cdot y=a\sqrt{1-a^2+b^2}$$
$$-\sqrt{a^2-b^2}\cdot x+y=b\sqrt{1-a^2+b^2}$$
$$\Longrightarrow\ x=\frac{a+b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}},$$
$$y=\frac{b+a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{1-a^2+b^2}}.$$

Mora biti zadovoljen uvjet $a^2 \geqslant b^2 > a^2-1$.

Halil Lačević (9), OŠ "Čengić Vila I", Sarajevo, BiH

3341. *Nađi zbroj svih rješenja jednadžbe*

$$\frac{1}{x^2-3x+5}+\frac{2}{x^2-3x-1}-\frac{3}{x^2-3x-7}=0.$$

Rješenje. Neka je $y=x^2-3x-1$. Tada je $x^2-3x+5=y+6$, $x^2-3x-7=y-6$. Imamo

$$\frac{1}{y+6}+\frac{2}{y}-\frac{3}{y-6}=0$$
$$y(y-6)+2(y-6)(y+6)-3y(y+6)=0$$
$$-24y-72=0$$
$$y=-3.$$

Sada je $-3=x^2-3x-1$, tj. $x^2-3x+2=0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_1=1$, $x_2=2$.

Znači, zbroj rješenja polazne jednadžbe je $x_1+x_2=3$.

Rijad Muminović (3), Druga gimnazija, Sarajevo, BiH

3342. *Riješi diofantsku jednadžbu*

$$91x-28y=35.$$

Prvo rješenje. Vidimo da je $(91,28,35)=7$, pa podijelimo jednadžbu sa 7. Imamo:

$$13x-4y=5$$
$$13x=5+4y$$
$$x=\frac{5+4y}{13}=1+\frac{4(y-2)}{13}.$$

Kako je $x\in\mathbf{Z}$ to je i $\frac{4(y-2)}{13}\in\mathbf{Z}$. Dobivamo $13\mid(y-2)$ pa je $y-2=13k$, $k\in\mathbf{Z}$ tj. $y=13k+2$. Uvrstimo gore i dobivamo

$$x=1+\frac{4(y-2)}{13}=1+4k$$

pa su sva rješenja $(x,y)=(1+4k,13k+2)$ za $\forall k\in\mathbf{Z}$.

Rijad Muminović (3), Sarajevo

Drugo rješenje. Kako je $m(91,28)=7$ i $7\mid 35$ jednadžba ima rješenje. Dijeljenjem sa 7 dobivamo

$$13x-4y=5. \qquad (1)$$

Svako rješenje zadovoljava kongruenciju

$$13x-4y\equiv 5 \pmod{13}$$

tj.

$$-4y\equiv -8 \pmod{13}$$

odakle je $y\equiv 2 \pmod{13}$ tj. $y=2+13t$ za $t\in\mathbf{Z}$. Supstitucijom u jednadžbu (1) dobivamo

$$13x-4(2+13t)=5,$$

odakle je $x=1+4t$.

Dakle, opće rješenje je $x = 1 + 4t$, $y = 2 + 13t$, $t \in \mathbf{Z}$.

Treće rješenje. $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ je jedno rješenje. Opće rješenje jednadžbe (1) je $x = 1 + 4t$, $y = 2 + 13t$.

Ur.

3343. *Odredi sve proste brojeve p takve da je $2^p + p^2$, također prost broj.*

Rješenje. 1° $p = 2 \implies 2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, nije prost broj.

2° $p = 3 \implies 2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$, je prost broj.

3° Neka je prost broj $p > 3$.

Svaki prost broj veći od 3 može se napisati u obliku $6k \pm 1$, gdje je $k \in \mathbf{N}$.

a) $p = 6k + 1 \implies$

$$\begin{aligned} 2^p + p^2 &= 2^{6k+1} + 36k^2 + 12k + 1 \\ &=(2^{6k+1} + 1) + 12k(3k + 1) \\ &=(2+1)(2^{6k} - 2^{6k+1} + \ldots + 1) + 12k(3k+1) \\ &=3[2^{6k} - 2^{6k+1} + \ldots + 1 + 4k(3k + 1)], \end{aligned}$$

a ovaj broj je djeljiv s 3, pa $2^p + p^2$ nije prost broj.

b) Na isti način kao pod a) dokaže se da je $2^p + p^2$ složen broj.

Jedino rješenje je $p = 3$.

Halil Lačević (9), Sarajevo

3344. *Odredi sve pozitivne cijele brojeve n, k_1, $\ldots$, k_n takve da vrijedi*

$$k_1 + \ldots + k_n = 3n - 2,$$
$$\frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

Rješenje. Zbog nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine, $A \geq H$, imamo

$$\frac{k_1 + k_2 + \ldots k_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}}.$$

tj.

$$(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}\right) \geq n^2$$

$$(3n - 2) \cdot 1 \geq n^2 \quad \text{tj.} \quad (n - 1)(n - 2) \leq 0.$$

Zbog $n \in \mathbf{N}$ imamo: $n = 1$ ili $n = 2$.

1° $n = 1 \implies k_1 = 1$ i tvrdja vrijedi.

2° $n = 2 \implies$

$$k_1 + k_2 = 4$$
$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 1.$$

Odavde dobivamo $k_1 + k_2 = 4$, $k_1 k_2 = 4$, pa su k_1 i k_2 rješenja kvadratne jedadžbe

$$t^2 - 4t + 4 = 0.$$

Dakle, $k_1 = k_2 = 2$ i vrijedi tvrdnja zadatka.

Halil Lačević (9), Sarajevo

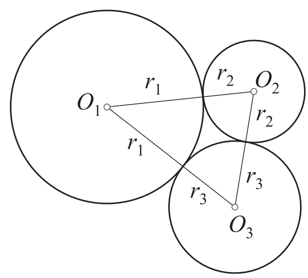
3345. *Svaka od kružnica $k_i(O_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, dodiruje druge dvije izvana. Odredi polumjer opisane kružnice trokuta $O_1O_2O_3$.*

Rješenje. Površina trokuta sa stranicama a, b, c je dana Heronovom formulom

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{i} \quad P = \frac{abc}{4R},$$

gdje je R polumjer opisane mu kružnice. Dakle,

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$



Kako je

$$a = r_1 + r_2, \quad b = r_2 + r_3, \quad c = r_3 + r_1,$$
$$s = \frac{a + b + c}{2} = r_1 + r_2 + r_3,$$

imamo

$$R = \frac{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)(r_3 + r_1)}{4\sqrt{r_1 r_2 r_2 (r_1 + r_2 + r_2)}}.$$

Luka Božur (3), Sarajevo

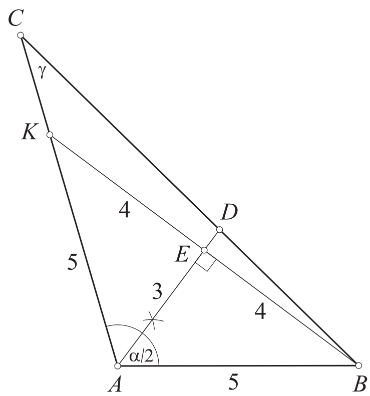
3346. *U trokutu ABC je $|AC| > |AB|$, simetrala kuta iz vrha A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D i E je nožište okomice iz B na $\overline{AD}$.*

Ako je $|AB| = 5$ i $|BE| = 4$, nađi vrijednost izraza

$$\frac{|AC| + |AB|}{|AC| - |AB|} \cdot |ED|.$$

Rješenje. Iz Pitagorinog poučka i trokuta ABE lako zaključujemo $|AE| = \sqrt{25-16} = 3$. Sad je $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$ i $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$, pa imamo

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{24}{25}. \qquad (1)$$



Iz teorema o simetrali kuta primjenom na simetralu AD imamo:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BD|}$$

$$\begin{aligned}|AC| + |AB| &= |AB| \cdot \frac{|CD| + |BD|}{|BD|}\\ &= |AB| \cdot \frac{|BC| - |BD| + |BD|}{|BD|}\\ &= |AB| \cdot \frac{|BC|}{|BD|}. \qquad (2)\end{aligned}$$

Produžimo sada BE do presjeka sa stranicom $\overline{AC}$ kojeg ćemo označiti s K. Kako je $\overline{AE}$ i visina i simetrala kuta trokuta KAB, ona je i težišnica jer je on jednakokračan pa je:

$$|AB| = |AK| \quad \text{i} \quad |BE| = |EK|. \qquad (3)$$

Sad iz pravokutnog trokuta BED imamo

$$\sin\sphericalangle EBD = \frac{|ED|}{|BD|}, \qquad (4)$$

a iz poučka o sinusima na $\triangle BKC$ imamo

$$\frac{\sin\sphericalangle EBD}{|CK|} = \frac{\sin\gamma}{|BK|}. \qquad (5)$$

Izjednačimo (4) i (5):

$$\frac{|CK|}{|BK|}\sin\gamma = \frac{|ED|}{|BD|}$$

$$\frac{|AC| - |AB|}{2|BE|}\sin\gamma = \frac{|ED|}{|BD|}$$

$$\frac{\sin\gamma|BD|}{2|BE|} = \frac{|ED|}{|AC| - |AB|} \qquad (6)$$

pa iz (2) i (6) imamo

$$\begin{aligned}\frac{|AB| + |AC|}{|AC| - |AB|} \cdot |ED| &= \frac{\sin\gamma|BD|}{2|BE|} \cdot \frac{|AB| \cdot |BC|}{|BD|}\\ &= \frac{\sin\gamma|BC| \cdot |AB|}{2|BE|}, \qquad (7)\end{aligned}$$

a iz poučka o sinusima na $\triangle ABC$ imamo

$$\sin\alpha \cdot |AB| = \sin\gamma \cdot |BC| \qquad (8)$$

pa uvrstimo li (8) u (7) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{|AB| + |AC|}{|AC| - |AB|} \cdot |ED| &= \frac{\sin\alpha \cdot |AB| \cdot |AB|}{2|BE|}\\ &\overset{(1)}{=} \frac{24}{25} \cdot \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 4} = 3.\end{aligned}$$

Rijad Muminović (3), Sarajevo

3347. *Dokaži da vrijedi jednakost*

$$\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Rješenje.

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)];$$

$$\begin{aligned}&\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}\\ &= \cos\frac{\pi}{18}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{18}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}\\ &= -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}\\ &= -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{18}\right)\\ &= \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

Ur.

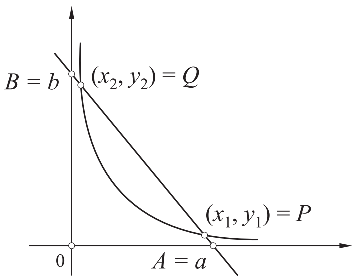
3348. *Pravac siječe asimptote hiperbole $xy = 1$ u točkama A i B, a samu hiperbolu u P i Q. Dokaži da je $|AP| = |BQ|$.*

Rješenje. Jednadžba hiperbole je

$$xy = 1.$$

Njezine asimptote su koordinatne osi. Jednadžba pravca je

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



Koordinate točaka A i B su $(a, 0)$ i $(0, b)$. Da nađemo koordinate točaka P i Q stavimo $y = \frac{1}{x}$ u jednadžbu pravca,

$$x^2 - ax + \frac{a}{b} = 0.$$

Korijeni ove jednadžbe x_1, x_2 zadovoljavaju $x_1 + x_2 = a$. Slično, supstitucijom $x = \frac{1}{y}$ u istu jednadžbu dobivamo

$$y^2 - by + \frac{b}{a} = 0$$

čiji korijeni y_1, y_2 zadovoljavaju $y_1 + y_2 = b$. Koordinate od P i Q su (x_1, y_1), (x_2, y_2). Imamo

$$\begin{aligned} |AP|^2 &= (x_1 - a)^2 + y_1^2 \\ &= (a - x_2 - a) + (b - y_2)^2 \\ &= x_2^2 + (b - y_2)^2 = |BQ|^2. \end{aligned}$$

Ur.

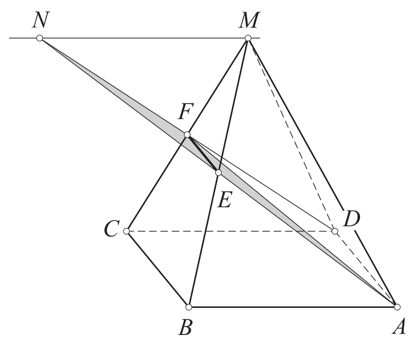
3349. *Unutar kvadrata stranice duljine 1 nalazi se nekoliko kružnica čiji je zbroj opsega jednak 10. Dokaži da postoji pravac koji siječe barem četiri od ovih kružnica.*

Rješenje. Projiciramo ortogonalno sve kružnice na stranicu $\overline{AB}$ kvadrata. Kružnica opsega l projicira se na segment duljine $\frac{l}{\pi}$. Zbroj projekcija svih kružnica je $\frac{10}{\pi}$. Kako je $\frac{10}{\pi} > 3 = 3 \cdot |AB|$ postoji, po Dirichletovom principu, točka koja pripada projekcijama barem četiri kružnice. Okomica na $\overline{AB}$ kroz tu točku siječe barem četiri kružnice.

Ur.

3350. *Točka M je vrh piramide kojoj je baza paralelogram $ABCD$. Na strani MBC pravac EF je paralelan s BC i siječe MB i MC u E i F. Pokaži da je geometrijsko mjesto sjecišta pravaca AE i DF, pravac paralelan s bazom piramide.*

Rješenje. Po pretpostavci je $EF \| BC$ i $ABCD$ je paralelogram. $EF \| AD$, $|EF| < |BC|$. Četverokut $AEFD$ je trapez.



Pravci AE i DF se sijeku u točki N. U trokutu AND je

$$\frac{|NF|}{|ND|} = \frac{|EF|}{|AD|} = \frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|MF|}{|MC|}.$$

Odavde je

$$\frac{|NF|}{|ND|} = \frac{|MF|}{|MC|}.$$

Nadalje, $\sphericalangle MFN = \sphericalangle CFD$, pa su trokuti MFN, CFD slični i $MN \| CD$ i paralelno ravnini $ABCD$. Geometrijsko mjesto točaka N je polupravac kroz točku M paralelan s ravninom $ABCD$.

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 350. *Učenik je pokosio komad tratine koja pokriva nogometno igralište. Na komadu oblika kvadrata stranice 5 cm učenik je izbrojio 64 vlati trave. Koliko vlati ima na cijelom igralištu ako mu je duljina 100 metara, a širina 65 metara?*

Rješenje.

$$a_1 = 5 \text{ cm}$$
$$n = 64$$
$$a = 100 \text{ m}$$
$$\underline{b = 65 \text{ m}}$$
$$N = ?$$
$$A_1 = a_1 \cdot a_1 = 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 25 \text{ cm}^2 = 0.0025 \text{ m}^2$$
$$A = a \cdot b = 100 \text{ m} \cdot 60 \text{ m} = 6000 \text{ m}^2$$
$$N = \frac{A}{A_1} \cdot n = \frac{6000 \text{ m}^2}{0.0025 \text{ m}^2} \cdot 64 = 153\,600\,000.$$

Lucija Matić (7), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

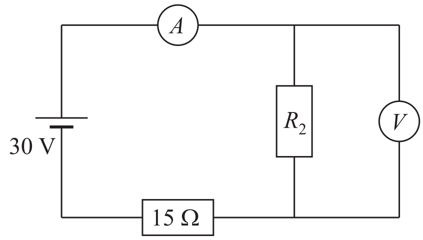
OŠ – 351. *Felix Baumgartner je nedavno oborio rekord u najvišem skoku s padobranom skočivši s visine od 39 kilometara. Prije 8 godina on je skočio u velebitsku jamu Mamet duboku 190 metara. Skok je ukupno trajao 10 sekundi, a padobran je otvorio nakon 140 metara slobodnog pada. Kolika je bila njegova prosječna vertikalna brzina tijekom pada? Ako pretpostavimo da je u tlo udario brzinom od 20 km na sat, kolika je bila prosječna akceleracija kojom je usporavao nakon otvaranja padobrana?*

Rješenje.

$$h = 190 \text{ m}$$
$$t = 10 \text{ s}$$
$$h_1 = 140 \text{ m}$$
$$\underline{v = 20 \text{ km/h} = 5.56 \text{ m/s}}$$
$$v_{sr} = ? \qquad a = ?$$
$$v_{sr} = \frac{s}{t} = \frac{190 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 19 \text{ m/s}$$
$$s = \frac{gt^2}{2}$$
$$t_1^2 = \frac{2s}{g} = \frac{2 \cdot 140 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2} = 28 \text{ s}^2$$
$$t_1 = 5.3 \text{ s}$$
$$v_1 = g \cdot t = 10 \text{ m/s}^2 \cdot 5.3 \text{ s} = 53 \text{ m/s}$$
$$\Delta v = v - v_1 = -47.4 \text{ m/s}$$
$$t_2 = t - t_1 = 4.7 \text{ s}$$
$$a = \frac{\Delta v}{t_2} = \frac{-47.4 \text{ m/ s}}{4.7 \text{ s}} = -10.1 \text{ m/s}^2.$$

Lovro Rački (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 352. *Ampermetar na slici pokazuje 1.5 ampera. Koliku vrijednost pokazuje voltmetar na slici? Koliki je nepoznati otpor?*



Rješenje.

$$U = 30 \text{ V}$$
$$R_1 = 15 \ \Omega$$
$$\underline{I = 1.5 \text{ A}}$$
$$U_2 = ? \qquad R_2 = ?$$
$$R_u = \frac{U}{I} = \frac{30 \text{ V}}{1.5 \text{ A}} = 20 \ \Omega$$
$$R_2 = R_u - R_1 = 5 \ \Omega$$
$$U_2 = I \cdot R_2 = 1.5 \text{ A} \cdot 5 \ \Omega = 7.5 \text{ V}.$$

Lovro Rački (8), Zagreb

OŠ – 353. *Kad normalno radi ljudsko srce kuca brzinom od oko 80 otkucaja u minuti. Srednja snaga mu je oko 2.5 W (vata). Koliko se energije potroši na jedan otkucaj? Na koju bi se visinu mogao podići teret mase 100 kilograma kad bismo energiju koju* *srce potroši u jednom danu upotrijebili za to dizanje?*

Rješenje.

$n = 80$

$t_1 = \dfrac{60\ \text{s}}{80} = 0.75\ \text{s}$

$P = 2.5\ \text{W}$

$m = 100\ \text{kg}$

$\underline{t = 1\ \text{dan}}$

$E = ? \qquad h = ?$

$W_1 = P \cdot t_1 = 2.5\ \text{W} \cdot 0.75\ \text{s} = 1.875\ \text{J}$

$t = 1\ \text{dan} = 24\ \text{h} = 86\,400\ \text{s}$

$$W = P \cdot t = 2.5\ \text{W} \cdot 86\,400\ \text{s}$$
$$= 216\,000\ \text{J} = \Delta E_{gp} = mgh$$
$$h = \frac{W}{mg} = \frac{216\,000\ \text{J}}{100\ \text{kg} \cdot 10\ \text{N/kg}} = 216\ \text{m}.$$

Klara Dorešić (7),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1518. *Fizičko njihalo sastoji se od štapa mase 1.2 kg duljine 63.9 cm i male kuglice mase 1 kg učvršćene na jednom kraju štapa. Odredi period njihanja oko drugog kraja štapa (za male oscilacije).*

Rješenje. Period fizičkog njihala je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

gdje je l udaljenost težišta od osi rotacije:

$$l = \frac{\frac{m_1 d}{2} + m_2 d}{m_1 + m_2} = 0.465\ \text{m}.$$

Moment inercije I je zbroj momenata štapa i kuglice oko zadane osi, dakle $I_1 = \frac{1}{3}m_1 d^2$ i $I_2 = m_2 d^2$. Slijedi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d^2(\frac{m_1}{3} + m_2)}{(m_1 + m_2)gl}} = 1.5\ \text{s}.$$

Ivan Korotaj (4),
Elektrostrojarska škola, Varaždin

1519. *Oko planeta mase* 10^{24} *kg kruži satelit brzinom 2.2 km/s. Odredi radijus putanje i ophodno vrijeme satelita.*

Rješenje. Gravitacijska sila na satelit ima ulogu centripetalne sile:

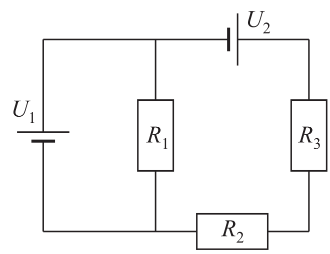
$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{m_2 v^2}{r}$$
$$r = \frac{G m_1}{v^2} = 13\,780\ \text{km}.$$

Ophodno vrijeme je

$$T = \frac{2r\pi}{v} = 39\,360\ \text{s} = 10\ \text{h}\ 56\ \text{min}.$$

Ivan Korotaj (4), Varaždin

1520. *Odredi struju kroz otpornik* R_2 *i napon na otporniku* R_2 *na shemi.* $U_1 = 5$ *V,* $U_2 = 10$ *V,* $R_1 = 13\ \Omega$, $R_2 = 7\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$.



Rješenje. Neka je I_1 struja kroz R_1, a I_2 struja kroz R_2. Kirchoffovo pravilo za petlju daje izraze:

$$U_1 = I_1 R_1$$
$$U_2 = I_2 R_3 + I_2 R_2 - I_1 R_1.$$

Odatle je

$$U_2 = I_2(R_3 + R_2) - U_1$$
$$I_2 = \frac{U_1 + U_2}{R_2 + R_3} = 1.5\ \text{A}$$
$$U_{R_2} = I_2 R_2 = 10.5\ \text{V}.$$

Ivan Korotaj (4), Varaždin

1521. *Na nekoj udaljenosti od točkastog izotropnog izvora svjetlosti izmjerimo osvjetljenost od* 0.8 *W/m*^{2} *okomito na smjer svjetlosti. Ako mjerač približimo izvoru za 1 metar, pokazivat će* 3.4 *W/m*^{2}. *Izračunaj ukupnu snagu izvora i udaljenost mjerača od izvora u oba slučaja.*

Rješenje. Osvijetljenost je ukupna snaga podijeljena s površinom sfere zadane udaljenosti:

$$I_1 = \frac{P}{4r_1^2\pi} = 0.8\ \mathrm{W/m^2}$$

$$I_2 = \frac{P}{4r_2^2\pi} = \frac{P}{4(r_1 - 1\ \mathrm{m})^2\pi} = 3.4\ \mathrm{W/m^2}.$$

Dijeljenjem ovih jednadžbi dobivamo kvadratnu jednadžbu po r_1:

$$\left(\frac{0.8}{3.4} - 1\right) r_1^2 + 2r_1 - 1 = 0.$$

Rješenja su:

$$r_1' = 1.942\ \mathrm{m}$$

$$r_1'' = 0.673\ \mathrm{m}.$$

Drugo je rješenje nefizikalno (daje negativnu udaljenost r_2). Snaga se izračuna iz prvog rješenja i prve jednadžbe:

$$P = I_1 \cdot 4r_1^2\pi = 37.9\ \mathrm{W}.$$

Ivan Korotaj (4), Varaždin

1522. *Crno tijelo temperature T_0 zagrijemo za $10\,^\circ C$. Pri tom snaga zračenja poraste za 2%. Odredi T_0 i pripadajuću valnu duljinu maksimuma intenziteta zračenja.*

Rješenje. Crno tijelo temperature T_0 zrači snagom:

$$P_0 = \sigma S T_0^4,$$

gdje je σ Stefan-Bolzmannova konstanta. Snaga pri $10\,^\circ$C većoj temperaturi je

$$P_1 = \sigma S T_1^4$$

$$1.02 P_0 = \sigma S (T_0 + 10)^4.$$

Dijeljenjem jednadžbi i korjenovanjem dobijemo

$$\sqrt[4]{1.02} \cdot T_0 = T_0 + 10$$

$$\Longrightarrow\ T_0 = \frac{10}{\sqrt[4]{1.02} - 1} = 2015\ \mathrm{K}.$$

Koristeći Wienov zakon, valna duljina maksimuma intenziteta zračenja je

$$\lambda_M \cdot T_0 = 2.898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$$

$$\Longrightarrow\ \lambda_M = 1438\ \mathrm{nm}.$$

Ivan Korotaj (4), Varaždin

1523. *Tri naboja dovedena su u vrhove jednakostraničnog trokuta stranice 3 cm. Naboji su $+300$ nC, $+450$ nC i $+500$ nC. Odredi njihovu elektrostatičku energiju, tj. rad koji smo uložili da bi ih iz beskonačnosti doveli u vrhove trokuta.*

Rješenje. Označimo stranicu trokuta s a, a naboje redom Q_1, Q_2 i Q_3. Za dovođenje prvog naboja Q_1 nije potrebna energija ($W_1 = 0$). Zatim dovedemo Q_2 i obavljeni rad je:

$$W_2 = k\frac{Q_1 Q_2}{a} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{300 \cdot 10^{-9} \cdot 450 \cdot 10^{-9}}{0.03} = 0.405\ \mathrm{J}.$$

Na kraju dovedemo treći naboj. Dodatni rad je

$$W_3 = k\frac{Q_1 Q_3}{a} + k\frac{Q_2 Q_3}{a} = 0.1125\ \mathrm{J}.$$

Ukupan rad je

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0.153\ \mathrm{J}.$$

Ivan Korotaj (4), Varaždin

1524. *S vrha tornja visine h pustimo kamen da pada bez početne brzine. Istodobno iz podnožja bacimo vertikalno uvis drugi kamen brzinom 20 m/s. Dva kamena prođu jedan pored drugog na polovici visine tornja. Odredi visinu tornja i vrijeme proteklo od početka gibanja do susreta kamena.*

Rješenje. Za prvi kamen, jednadžba gibanja glasi:

$$s_1(t) = h - \frac{g}{2}t^2,$$

a za drugi kamen

$$s_2(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2.$$

U trenutku susreta imamo $s_1 = s_2 = \frac{h}{2}$, iz čega slijedi

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}gt^2, \qquad h = v_0 t,$$

pa je vrijeme susreta jednako $t = \frac{v_0}{g} = 2.04$ s. Tada je visina tornja

$$h = v_0 t = 20 \cdot 2.04 = 40.8\ \mathrm{m}.$$

Filip Rončević (1), Srednja škola, Sesvete
Ivan Korotaj (4), Varaždin