54. državno natjecanje iz matematike

Ovogodišnja sezona matematičkih natjecanja otvorena je 17. siječnja 2013., kada su održana školska (odnosno gradska) natjecanja. Četiri tjedna kasnije, 14. veljače, održana su i županijska natjecanja. Nakon toga, na temelju rezultata županijskih natjecanja, određeni su učenici koji će sudjelovati na Državnom natjecanju.

Zadatke za sve razine natjecanja priređuje Državno povjerenstvo koje se sastoji od tri potpovjerenstva s po 20-ak članova: za osnovne škole, srednje škole A varijante i srednje škole B varijante. Njihov rad uspješno je koordinirao tajnik državnog povjerenstva *Luka Čeliković*, viši savjetnik Agencije za odgoj i obrazovanje, koji je obavio velik dio posla oko organizacije školsko/ gradskog, županijskog i državnog natjecanja.

Državno natjecanje iz matematike za učenike osnovnih i srednjih škola održano je od 2. do 4. travnja 2013. u Dubrovniku. Okupilo se 265 učenika: njih 92 iz osnovnih škola (V. – 20, VI. – 27, VII. – 22, VIII. – 23), 93 iz srednjih škola A varijante (I. – 23, II. – 24, III. – 23, IV. – 23) i 80 iz srednjih škola B varijante (I. – 19, II. – 18, III. – 23, IV. – 20).

Bili smo smješteni u prostranim hotelima President i Argosy u turističkom naselju Babin Kuk. Kiša koja je padala prva dva dana nije spriječila neke da odu u šetnju Stradunom i zidinama starog Dubrovnika.

Prvog dana održan je sastanak Državnog povjerenstva i obavljene su posljednje pripreme za sutrašnje natjecanje. Navečer je u kongresnoj dvorani hotela Lacroma održano svečano otvaranje. Prisutnima su se obratili: *Vedrana Radović*, ravnateljica Osnovne škole Lapad, *Miho Katičić*, pročelnik Upravnog odjela za obrazovanje, sport, socijalnu skrb i civilno društvo grada Dubrovnika, *Frano Skokandić*, zamjenik župana Dubrovačko-neretvanske županije, *prof. dr. Vladimir Volenec*, predsjednik Državnog povjerenstva i *Vinko Filipović*, ravnatelj Agencije za odgoj i obrazovanje. Samo natjecanje otvorio je *Petar Puljić*, učenik 8. razreda Osnovne škole Lapad.

Natjecanje je održano u Osnovnoj školi Lapad, a u isto vrijeme za mentore iz osnovnih i srednjih škola organizirana su predavanja u hotelima. Poslijepodne je za učenike i mentore organizirano razgledavanje Dubrovnika. Povjerenstvo je prionulo na posao – pregledavanje i ocjenjivanje učeničkih rješenja, a navečer su se rješavale žalbe. U kasnim večernjim satima Državno povjerenstvo je potvrdilo konačnu rang listu i odlučilo o nagradama. Po već ustaljenim pravilima odabrano je 24 učenika koji će tokom travnja sudjelovati na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi u borbi za mjesto u ekipama za 54. međunarodnu matematičku olimpijadu u Kolumbiji i 7. srednjoeuropsku matematičku olimpijadu u Mađarskoj. Posljednjeg dana ujutro je održan Okrugli stol o matematičkim natjecanjima.

Na svečanom proglašenju predsjednik državnog povjerenstva, prof. dr. Vladimir Volenec, uručio je najboljim mladim matematičarima priznanja i skromne nagrade, dok su po tri najbolja u svakom razredu dobila plakete. Osnovnoškolcima je uručeno 12 prvih, 8 drugih i 12 trećih nagrada, dok je 21 učenik bio pohvaljen. Za srednje je škole podijeljeno 6 prvih, 8 drugih, 11 trećih nagrada i 17 pohvala za A varijantu, odnosno 5 prvih, 9 drugih, 5 trećih nagrada i 21 pohvala za B varijantu.

A varijanta

I. razred

Petar Orlić, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Daniel Paleka*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar (II. nagrada); *Kristijan Rupić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Andrija Mandić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Marko Jukić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ivan Barta*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Karlo Šerbetar*, Gimnazija "Fran Galović", Koprivnica, *Jurica Genc*, Elektrostrojarska škola, Varaždin, *Manuel Žic*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, *Ivan Jerčić*, III. gimnazija, Split (pohvala).

II. razred

Maja Puček, Druga gimnazija Varaždin, Varaždin (I. nagrada); *Ivan Lazarić*, Gimnazija Pula, Pula, *Kristijan Vukelić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, *Josip Pupić*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Kristian Vedran Budrovčan*, XV. gimnazija, Zagreb, *Al Depope*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka (III. nagrada); *Ana Strikić*, III. gimnazija, Split, *Nikola Šajgaj*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Kristijan Štefanec*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ian Beissmann*, III. gimnazija, Osijek, *Tonko Sabolčec*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

III. razred

Vlatka Vazdar, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Vlatko Crnković*, XV. gimnazija, Zagreb, *Mihael Eraković*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka (II. nagrada); *Erik Banek*, V. gimnazija, Zagreb, *Mato Manović*, Gimnazija Požega, Požega, *Filip Bašić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Mislav Balunović*, Gimnazija "Matija Mesić", Slavonski Brod, *Matea Čelar*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Tomislav Buhiniček*, XV. gimnazija, Zagreb, *Drago Plečko*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

IV. razred

Domagoj Ćevid, V. gimnazija, Zagreb, *Mihael Marović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Borna Vukorepa*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Ivan Porin Tolić*, V. gimnazija, Zagreb, *Marin Tomić*, V. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Roko Žaja*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar, *Aleksandar Bulj*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka (III. nagrada); *Vedran Stipetić*, V. gimnazija, Zagreb, *Zvonimir Jurelinac*, XV. gimnazija, Zagreb, *Petar Perković*, III. gimnazija, Split, *Filip Hrenić*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin (pohvala).

B varijanta

I. razred

Tin Komerički, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (I. nagrada); *Ivan Kuljak*, Srednja škola Zlatar, Zlatar, *Antonio Buljan*, V. gimnazija "Vladimir Nazor", Split (II. nagrada); *Joško Bilandžić*, II. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Iva Suć*, I. gimnazija, Zagreb, *Mia Baržić*, Srednja škola Vrbovec, Vrbovec, *Marin Kutnjak*, Katolička klasična gimnazija s pravom javnosti u Virovitici, Virovitica, *Katarina Zornada*, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile Pazin, Pazin, *Davor Dundović*, Gimnazija Pula, Pula, *Karlo Videc*, Srednja škola Ivanec, Ivanec, *Stipan Hržić*, Gimnazija Dinka Šimunovića, Sinj (pohvala).

II. razred

Martin Bajzek, Srednja škola Zlatar, Zlatar (I. nagrada); *Mate Buljan*, II. gimnazija, Zagreb, *Marta Han*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska (II. nagrada); *Marijana Zrilić*, Gimnazija Jurja Barakovića, Zadar, *Maikol Hrvatin*, Srednja škola Mate Balote, Poreč (III. nagrada); *Luka Petrović*, II. gimnazija, Zagreb, *Denis Nešić*, Srednja škola Hrvatski kralj Zvonimir, Krk, *Matija Livaić*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (pohvala).

III. razred

Doria Šarić, I. gimnazija, Zagreb, *Ana Šumberac*, Srednja škola Mate Blažine, Labin (I. nagrada); *Dominik Žigrović*, Srednja škola Dragutina Stražimira, Sv. Ivan Zelina, *Davor Penzar*, Klasična gimnazija, Zagreb, *Luka Tadić*, Srednja škola Donji Miholjac, Donji Miholjac (II. nagrada); *Lucija Orlić*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka (III. nagrada); *David Emanuel Lukšić*, Gimnazija "Fran Galović", Koprivnica, *Ante Ravlić*, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Makarska, *Ines Horvat*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Tomislav Vojvodić*, TSŠ-S.M.S.I. Dante Alighieri, Pula, *Luka Miličević*, Isusovačka klasična gimnazija s pravom javnosti u Osijeku, Osijek, *Petar Jukić*, Gimnazija Dinka Šimunovića, Sinj (pohvala).

IV. razred

Ivan Brezovec, Srednja škola Ivanec, Ivanec (I. nagrada); *Ivan Čeh*, Srednja škola Buzet, Buzet, *Maga Rajić*, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile Pazin, Pazin (II. nagrada); *Maja Žitko*, I. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Frane Gilić*, Graditeljsko geodetska škola Split, Split, *Marin Kačan*, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile Pazin, Pazin, *Luka Cigler*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec, *Stipe Marić*, IV. gimnazija "Marko Marulić", Split, *Ivan Kvesić*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (pohvala).

Zadaci s državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Odredi sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2 \\ y^2 - z &= x^2 \\ z^2 - x &= y^2. \end{aligned}$$

2. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi k i n takvi da vrijedi

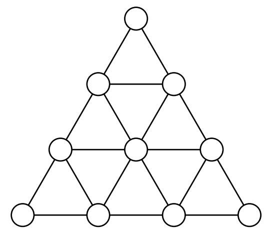
$$k(k+1)(k+2)(k+3) = n(n+1).$$

3. Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Dokaži da vrijedi

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

4. Dan je šesterokut $ABCDEF$ čije se dijagonale $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ sijeku u jednoj točki koja je ujedno polovište svake od tih dijagonala. Dokaži da je površina danog šesterokuta dvostruko veća od površine trokuta ACE.

5. Brojevi $1, 2, \ldots, 10$ raspoređeni su u kružiće na slici, a zatim je u svaki od devet malih trokuta upisan zbroj brojeva upisanih u njegove vrhove. Dokaži da među brojevima upisanim u trokute postoje tri čiji je zbroj barem 48.



II. razred

1. Neka je a kompleksni broj takav da vrijedi
$$a^5 + a + 1 = 0.$$
Koje vrijednosti može poprimiti izraz $a^2(a-1)$?

2. Ako za realne brojeve x i y vrijedi
$$\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1,$$
dokaži da je $x + y = 0$.

3. Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednakost
$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

4. Dan je trapez $ABCD$ kojem su kutovi uz osnovicu $\overline{AB}$ šiljasti, a dijagonale su mu međusobno okomite i sijeku se u točki O. Polupravac OA siječe kružnicu s promjerom $\overline{BD}$ u točki M, a polupravac OB siječe kružnicu s promjerom $\overline{AC}$ u točki N. Dokaži da točke M, N, C i D leže na jednoj kružnici.

5. Dana je tablica 6×6.

a) Ako je označeno bilo kojih 9 polja tablice, dokaži da je moguće odabrati tri retka i tri stupca koji sadrže sva označena polja.

b) Označi 10 polja tablice tako da koja god tri retka i tri stupca odaberemo, uvijek postoji bar jedno označeno polje koje nije u odabranim stupcima niti recima.

III. razred

1. Odredi nenegativni realni broj a tako da vrijednost izraza
$$a^3 - a^2 - 2\sqrt{a}$$
bude najmanja moguća.

2. Odredi sve proste brojeve p za koje postoje prirodni brojevi x i y takvi da vrijedi
$$\begin{cases} p+1 = 2x^2 \\ p^2+1 = 2y^2. \end{cases}$$

3. Dokaži da je među bilo koja četiri broja iz intervala $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ moguće odabrati dva broja, nazovimo ih x i y, tako da vrijedi
$$8\cos x \cos y \cos(x-y) + 1 > 4\left(\cos^2 x + \cos^2 y\right).$$

4. Neka je ABC šiljastokutni trokut i H njegov ortocentar. Pravac kroz točku A okomit na $\overline{AC}$ i pravac kroz točku B okomit na $\overline{BC}$ sijeku se u točki D. Kružnica sa središtem u točki C koja prolazi točkom H siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u točkama E i F. Dokaži da vrijedi $|DE| = |DF| = |AB|$.

5. Na natjecanju je sudjelovalo n učenika i svaki učenik je riješio točno tri zadatka. Za svaka dva učenika postoji točno jedan zadatak koji su obojica riješila, a svaki zadatak je riješilo točno k učenika. Za koje vrijednosti prirodnih brojeva n i k je to moguće?

IV. razred

1. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je umnožak svih pozitivnih djelitelja broja n jednak n^3. Prikaži ih u kanonskom obliku, tj. pomoću rastava na proste faktore.

2. Niz (a_n) zadan je rekurzivno: $a_1 = 2$, $a_n = 2(n + a_{n-1})$ za $n \geq 2$. Dokaži da je $a_n < 2^{n+2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

3. Neka su a i b realni brojevi. Poznato je da parabola $y = ax^2 + b$ siječe krivulju $y = x + \dfrac{1}{x}$ u točno tri točke. Dokaži da vrijedi $3ab < 1$.

4. Neka su k_1 i k_2 kružnice s promjerima $\overline{AP}$ i $\overline{AQ}$. Neka je T drugo sjecište kružnica k_1 i k_2. Neka je Q' drugo sjecište kružnice k_1 i pravca AQ, a P' drugo sjecište kružnice k_2 i pravca AP. Kružnica k_3 prolazi točkama T, P i P', a kružnica k_4 točkama T, Q i Q'. Dokaži da pravac na kojem leži zajednička tetiva kružnica k_3 i k_4 prolazi točkom A.

5. Dokaži da bilo koji 2001-člani podskup skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 3000\}$ sadrži tri elementa od kojih su svaka dva međusobno relativno prosta.

Zadaci s državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1. Riješite nejednadžbu

$$\left|\frac{2013}{x+2013} + \frac{2013}{(x+1)(x+2)} + \frac{2013}{(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{2013}{(x+2012)(x+2013)}\right| \leq 1.$$

2. Zbroj znamenaka prirodnog broja x je y, a zbroj znamenaka broja y je z. Odredite sve brojeve x za koje je

$$x + y + z = 60.$$

3. Dva vlaka kreću istovremeno s početnih stanica jedan prema drugome. Vlakovi voze konstantnim brzinama i mimoilaze se kod točke M. Jedan vlak vozi dvostruko brže od drugog. Ako sporiji vlak krene 5 minuta kasnije, mimoići će se u točki koja je 4 km dalje od točke M. Koliko iznosi brzina sporijeg vlaka?

4. Točke M i N pripadaju redom stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC. Točka O je sjecište dužina $\overline{AN}$ i $\overline{BM}$. Odredite površinu trokuta CMN ako su površine trokuta OMA, OAB i OBN jednake redom 2, 3, 4.

5. Na otoku živi petero ljudi i majmun. Jednog su dana svi zajedno sakupljali kokosove orahe i stavljali ih na zajedničku hrpu. Dogovorili su se da će sutradan međusobno razdijeliti orahe. Tijekom noći jedna je osoba od petero otočana uzela svoj dio. Podijelila je orahe na 5 jednakih hrpica i pri tome joj je ostao jedan kokosov orah. Njega je dala majmunu, sakrila svoju hrpu, a ostale četiri ponovno spojila u jednu veliku hrpu. Ostala četiri otočana napravila su to isto, jedan za drugim i svatko je jedan kokosov orah dao majmunu da se hrpe mogu jednako raspodijeliti. Koji je najmanji mogući broj oraha u početnoj hrpi?

II. razred

1. U skupu $\mathbb{R}$ riješite nejednadžbu $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \geq 6$.

2. Za koju vrijednost varijabli x i y izraz $\frac{4x^2+2y^2-4y+4}{2x^2+y^2-2y+5}$ ima najmanju vrijednost i koliko iznosi ta najmanja vrijednost?

3. Količina kofeina u krvotoku opada svakih 5 sati za 50%. Produžena kava sadrži 330 mg kofeina. Pretpostavimo da se cijela produžena kava popije odjednom. Ako osoba u jednom danu popije produženu kavu u 8 h, 10 h i 12 h, odredite koliko će mg kofeina ta osoba imati u krvotoku u 20 sati?

4. Dundo i Maro su se nadmetali zadavajući jedan drugom neobične matematičke zadatke. Tako je Maro dobio zadatak da izračuna točnu vrijednost kosinusa kuta od 36°. Nije smio koristiti nikakav pribor osim papira i olovke za pisanje i računanje. To je nemoguće, mislio je Maro dok mu Dundo nije nacrtao nekoliko jednakokračnih trokuta kojima je mjera barem jednog kuta iznosila 36°. Maro je promotrio jedan trokut i ubrzo izračunao $\cos 36^\circ$. Koju je vrijednost dobio Maro i na koji način?

5. Na šahovskom turniru sudjelovala su tri učenika prvog razreda i nekoliko učenika drugog razreda. Tri učenika prvog razreda osvojila su ukupno 7 bodova, a svaki učenik drugog razreda osvojio je isti broj bodova. Koliko je na turniru bilo učenika drugog razreda ako svaka pobjeda donosi jedan bod, poraz 0 bodova, a neriješeni rezultat pola boda? Turnir se igra tako da svaki igrač sa svakim od preostalih odigra jednu partiju.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu
$$\log_{5+x}(5-x)\cdot\log_{10-x}(10+x)\leq 0.$$

2. Duljina stranice romba $ABCD$ iznosi a. Romb prvo rotira oko pravca na kojem leži stranica $\overline{AB}$, a zatim oko pravca na kojem leži dulja dijagonala $\overline{AC}$. Tim rotacijama dobivamo dva rotacijska tijela. Omjer njihovih obujama je $V_1 : V_2 = 9 : \sqrt{3}$. Odredite šiljasti kut romba i omjer oplošja nastalih rotacijskih tijela.

3. Ako su a, b, c duljine stranice trokuta i α, β, γ redom nasuprotni kutovi, onda je $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$ ako i samo ako je $\beta=2\alpha$. Dokažite!

4. Odredite nenegativne cijele brojeve p i n takve da su svi brojevi p, $p+3^n$, $p+3^{n+1}$, $p+3^{n+2}$, $p+3^{n+3}$ prosti.

5. Točke A, B i C središta su triju kružnica koje se međusobno dodiruju izvana. Udaljenosti između središta iznose $|AB|=13$ cm, $|BC|=8$ cm, $|AC|=9$ cm. U točkama u kojima se kružnice dodiruju povučene su zajedničke tangente. Pokažite da je središte upisane kružnice trokuta ABC sjecište tih triju tangenti. Odredite udaljenost sjecišta tangenata od središta najveće kružnice.

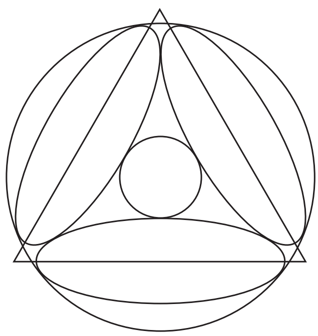
IV. razred

1. Duljine stranica pet jednakostraničnih trokuta čine aritmetički niz. Zbroj opsega tih trokuta je 120 cm. Zbroj površina najmanjeg i najvećeg trokuta je za $10\sqrt{3}$ cm^2 manji od zbroja površina preostala tri trokuta. Odredite duljine stranica tih trokuta. Koliki je zbroj površina svih trokuta?

2. Neka je n broj koji dobijemo tako da između svake dvije znamenke broja 14 641 napišemo 2013 nula. Odredite sva rješenja jednadžbe $x^4 = n$ u skupu $\mathbb{C}$.

3. Neka je $f_n(x) = x^{n+1} + x^n$, za $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Za koje će realne brojeve x, beskonačan zbroj $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$ imati vrijednost u intervalu $\left\langle 0, \dfrac{2}{3} \right]$?

4. Tri sukladne elipse s poluosima a i b $(a > b)$ smještene su tako da se svake dvije dodiruju, a glavne osi im leže na stranicama jednog jednakostraničnog trokuta (slika). Dvije koncentrične kružnice, veća polumjera R i manja polumjera r $(R \neq r)$, dodiruju sve tri elipse. Prikažite R i r pomoću a i b.



5. Kvadratna tablica $n \times n$ popunjena je prirodnim brojevima od 1 do n^2, pri čemu su u prvom redu zapisani po redu brojevi od 1 do n, u drugom redu od $n + 1$ do $2n$, u trećem od $2n + 1$ do $3n$, itd. Iz ove se tablice izreže kvadrat $m \times m$ $(m < n)$. Dokažite da je dvostruki zbroj brojeva koji su u tom izrezanom kvadratu djeljiv s m^2.

⋆ ⋆ ⋆

Učenici pozvani na Hrvatsku matematičku olimpijadu, tj. natjecanje za izbor članova ekipe za međunarodna natjecanja.

I. razred: *Petar Orlić, Daniel Paleka*

II. razred: *Maja Puček, Ivan Lazarić, Kristijan Vukelić, Josip Pupić, Kristian Vedran Budrovčan, Al Depope, Ana Strikić, Nikola Šalgaj*

III. razred: *Vlatka Vazdar, Vlatko Crnković, Mihael Eraković, Erik Banek, Mato Manović, Filip Bašić, Mislav Balunović*

IV. razred: *Domagoj Ćevid, Mihael Manović, Borna Vukorepa, Ivan Porin Tolić, Marin Tomić, Roko Žaja, Aleksandar Bulj*

Mea Bombardelli, Željko Hanjš