Rješenje nagradnog natječaja br. 201

Koliko ima pozitivnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ ako je $y = pqr$, produkt tri različita prosta broja, $p < q < r$.

Rješenje. (Halil Lačević)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{z} \ / \cdot xyz \\ yz + xz &= xy \\ xy - yz - xz + z^2 &= z^2 \\ y(x-z) - z(x-z) &= z^2 \\ (x-z)(y-z) &= z^2. \end{aligned}$$

Neka je $x - z = z$ i $y - z = z$. Tada je $x = 2z$ i $y = 2z$, odakle je $z = \frac{1}{2}y$. Tada je $z = \frac{1}{2}pqr$, odakle zaključujemo $p = 2$ (jer su p, q, r prosti brojevi i $p < q < r$).

Sada dobivamo $z = qr$, $y = 2qr$ i $x = 2qr$.

Odavde vidimo da ima beskonačno mnogo pozitivih cjelobrojnih rješenja, jer parova prostih brojeva $q < r$ ima beskonačno mnogo.

Npr., za $q = 3$ i $r = 5$ imamo $z = 15$, $y = 30$, $x = 30$, ili za $q = 5$ i $r = 7$ je $z = 35$, $y = 70$, $x = 70$.

Knjigom Franka Miriam Brückler, *Matematički dvoboji* nagrađen je rješavatelj: *Halil Lačević* (9), OŠ "Čengić Vila 1", Sarajevo, BiH.

Riješili zadatke iz br. 2/250

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Luka Božur* (3), Druga gimnazija, Sarajevo, BiH, 3339, 3341, 3344, 3345; *Halil Lačević* (9), OŠ "Čengić Vila I", Sarajevo, BiH, 3339–3345; *Rijad Muminovć* (3), Druga gimnazija, Sarajevo, BiH, 3339, 3341–3346.

b) Iz fizike: *Klara Dorešić* (7), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 350, 353; *Lucija Matić* (7), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 350, 353; *Lovro Rački* (8), Horvati, Zagreb, 351, 352; *Ivan Korotaj* (4), Elektrostrojarska škola, Varaždin, 1518–1524; *Filip Rončević* (1), Srednja škola Sesvete, Sesvete, 1524.

Nagradni natječaj br. 203

Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi, dokaži nejednakost

$$\sqrt{a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - \sqrt{2}bc} \geq \sqrt{a^2 + c^2}.$$