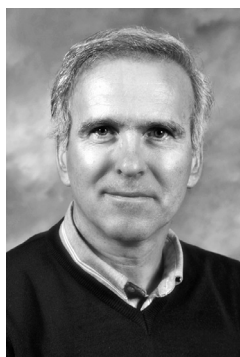


Godine 2012. održan je u Rijeci 5. hrvatski međunarodni kongres na kojem su se okupili poznati matematičari iz cijelog svijeta. Među njima je bio i Goran Lešaja koji već više od 20 godina živi i radi u Sjedinjenim Američkim Državama. Bavi se teorijom i metodama optimizacije i operacijskim istraživanjima, a osnove za to područje je stekao na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Član je većeg broja profesionalnih društava, a među njima *Hrvatskog matematičkog društva* i *Hrvatskog društva za operacijska istraživanja*. Goran Lešaja, profesor na Georgia Southern University, s radošću se odazvao na intervju.

Koji su vaši počeci interesa za matematiku?



Slika 1. Goran Lešaja.

Rodom sam s Korčule. Kada sam imao šest godina roditelji su se preselili u Zagreb tako da sam ovdje završio najveći dio mog školovanja. Pohađao sam osnovnu školu Božidara Maslarića (danas Dobriše Cesarića) na Borongaju. Roditelji su od samog početka vodili brigu o našem obrazovanju i poticali mene i moju sestru blizanku da učimo, redovito pišemo domaće zadaće i općenito se odgovorno odnosimo prema školskim obavezama. Kod kuće smo imali dosta veliku biblioteku iz raznih područja društvenih i prirodnih znanosti. Takvo okruženje i takav roditeljski odnos je sigurno pridonio uspjehu u školi i razvoju raznovrsnih interesa. Mislim da je roditeljska briga i pažnja oko školskih aktivnosti, uz dobre nastavnike, u ranom odrastanju bilo izuzetno važno za razvoj naših potencijala i interesa. Kad već govorimo o drugoj strani “jednakosti”, kvalitetnim nastavnicima, imao sam sreću da mi

je u osnovnoj školi profesorica matematike bila vrlo draga i strpljiva nastavnica, Ina Šimunović, čija su se predavanja odlikovala organiziranošću i preciznošću. To je pridonijelo da mi je matematika bila jedan od najdražih predmeta. Međutim, moj interes je još više porastao kad me je prof. Šimunović uključila u rad matematičkog kluba. Mislim da je to bilo u petom razredu osnovne škole. Rješavali smo nestandardne i teže zadatke i pripremali se za matematička natjecanja. Tu sam zapravo više nego na nastavi otkrio ljepotu i dubinu matematičkog načina razmišljanja i razvio ljubav i interes za matematiku.

Po završetku osnovne škole nisam se dvoumio u koju srednju školu da se upišem. Moj izbor je bio XV. gimnazija, tada poznata kao Matematička gimnazija, a kasnije kao MIOC (Matematičko-informatički obrazovni centar). Okruženje je bilo vrlo poticajno, kvalitetni nastavnici, razredi s malim brojem učenika, od kojih su mnogi bili izvrsni i talentirani i kasnije se razvili u vrsne stručnjake i znanstvenike. Išao sam na natjecanja iz matematike, a povremeno i iz fizike, od gradskog pa do državnog nivoa. Osvojene nagrade su služile kao poticaj za daljnje neprestano zalaganje. Posebno je pozitivan utjecaj na mene ostavila profesorica Nada Horvatić svojim inzistiranjem na preciznosti. Sjećam se njenog predavanja iz algebre u kojem je uvodila definiciju grupe i objašnjavala jedinični (unitarni) i inverzni element grupe. Tada sam, zahvaljujući njenoj upornosti, po prvi put shvatio značenje i razliku između kvantifikatora “postoji, za svaki” i “za svaki, postoji”.

Sve u svemu, bile su to lijepe godine koje su uz bavljenje matematikom bile ispunjene i drugim aktivnostima. Bavio sam se i sportom, igrao rukomet, plivao i igrao vaterpolo, a zadnju godinu sam radio i u redakciji školskog lista.

Kako je teklo vaše daljnje obrazovanje?

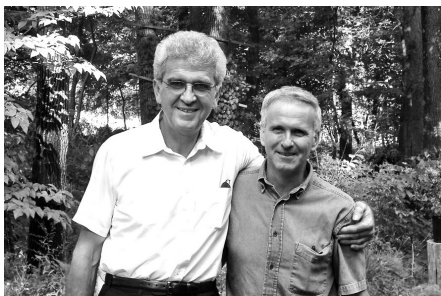
Studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu započeo sam 1975. godine. Bio sam zainteresiran i za teorijsku i za primijenjenu matematiku te sam završio i inženjerski i profesorski smjer. Na moj razvoj i formiranje kao matematičara utjecala je grupa izvanrednih profesora i znanstvenika koja je tada djelovala na fakultetu od kojih spominjem samo nekolicinu: prof. Sibe Mardešić, prof. Svetozar Kurepa, prof. Hrvoje Kraljević, prof. Krešo Horvatić. Tokom studija bio sam dosta aktivan u studentskoj organizaciji fakulteta. Između ostalog, nastojali smo organizirati štampanje skripti, kojih tada nije bilo dovoljno, a sudjelovali smo i na susretima PMF-ova iz Republika bivše Jugoslavije, pri čemu smo ih jednom i organizirali. Nije baš preostajalo mnogo vremena za bavljenje sportom, ali sam ipak nastavio igrati rukomet kao vratar fakultetske ekipe. Sve te aktivnosti na fakultetu pružile su mi priliku da sretnem mnogo izvanrednih kolega i uspostavim trajna poznanstva i prijateljstva. Mnogi od njih raštrkani su danas po "bijelom svijetu" kao priznati znanstvenici i stručnjaci, a mnogi su ostali u domovini u istom svojstvu.

Moj interes za primjenu matematike je uvijek bio prisutan, pa sam se zainteresirao za problem linearnog programiranja i simpleks metodu. Programiranje u ovom kontekstu ne znači programiranje na računalu, nego se radi o optimizaciji linearne funkcije na skupu definiranom linearnim nejednakostima. To je specijalan problem iz područja optimizacije, područja koje se bavi traženjem ekstremalnih vrijednosti funkcije na određenom skupu ograničenja. Tada nije bilo puno kolegija iz optimizacije, mislim da je bilo samo Linearno programiranje, tako da sam sam više čitao i na kraju napisao i obranio diplomsku radnju iz tog područja. Moj mentor je bio prof. Mladen Alić, vrstan stručnjak iz područja numeričke analize.

Moj interes za to područje se nastavio pa sam nakon nekoliko godina upisao magistarski studij s namjerom da se nastavim usavršavati na području linearnog programiranja i optimizacije. Moj mentor, prof. Dragutin Svrtan, čovjek izuzetno širokog matematičkog znanja, upravo se tih godina vratio iz SAD-a i donio članke o dosta složenom problemu probabilističke analize kompleksnosti simpleks metode, koji je i mene zainteresirao. Godine 1985. izašao je članak N. Karmarkara s revolucionarno novom metodom za rješavanje problema linearnog programiranja koji je izazvao veliku pažnju stručnjaka i inicirao razvoj novog područja optimizacije pod imenom metode unutarnjih točaka (interior-point methods). Radio sam na obje ove teme u kontekstu ispitivanja kompleksnosti problema linearnog programiranja i to je na kraju bila tema mog magistarskog rada.

Nakon magisterija 1986. godine zadržao sam interes za ovo područje, sa željom da u tom smjeru nastavim i s doktoratom. Uspostavio sam kontakt s prof. Verom Vujčić s Fakulteta organizacionih znanosti u Beogradu koja se tada, možda jedina u bivšoj Jugoslaviji, bavila modifikacijama Karmarkarove metode i metodama unutarnjih točaka. Pozvala me kad je u posjet došao prof. Keneth Kortanek s University of Iowa, USA, svjetski poznati stručnjak iz optimizacije i jedan od pionira razvoja tada novog područja metode unutarnjih točaka. Održao je vrlo zanimljivo predavanje, nakon kojeg sam imao i poduži razgovor s njim. Pozvao me je da dođem na studij na University of Iowa, koji je tada bio jedan od tri najjača centra istraživanja na području metode unutarnjih točaka u svijetu. Uz prof. Kenetha Kortaneka tamo su bili prof. Yiny Ye, prof. Kurt Anstreicher, prof. Florian Potra, sve vrhunski svjetski stručnjaci iz područja optimizacije i metoda unutarnjih točaka.

Tako sam 1990. godine započeo doktorski studij na University of Iowa. Mnogi od profesora, od kojih sam nečija imena već spomenuo, utjecali su na moj razvoj, ali naročito moj mentor prof. Florian Potra. Čovjek velike erudicije i širokih interesa, posjedovao je i izuzetnu intuiciju i osjećaj za problem, a uz to je bio pun energije i brz u reakcijama. Bio je pun entuzijazma i katkad zahtjevan, ali je vodio računa o svojim studentima. Zaista smo dobro surađivali. Doktorirao sam s tezom o metodama unutarnjih točaka za linearne i nelinearne komplementarne probleme. Ti su problemi važni u optimizaciji zbog nekoliko razloga, od kojih je jedan od najvažnijih da se uvjeti optimalnosti za mnoge važne optimizacijske probleme mogu formulirati u obliku linearnog ili nelinearnog komplementarnog problema.



Slika 2. Goran sa svojim mentorom Florianom Potrom.



Slika 3. Goran u svom uredu na Georgia Southern University.

Kako je tekla vaša znanstvena karijera?

Istraživanje i rad sa studentima u učionici i van nje mi se osobito sviđalo još tokom studija, pa sam se već tada odlučio za akademsku karijeru. Zaposlio sam se početkom 1981. godine na Katedri matematike na Tehničkoj vojnoj akademiji u Zagrebu, najprije kao predavač, a po završetku magisterija kao viši predavač. Atmosfera na Katedri je bila vrlo dobra. Radio sam s grupom izvanrednih kolega, Senka Sedmak, Zoran Pusić, Ivan Perić, Mirko Maleković, da spomenem samo nekolicinu, od kojih su mnogi bili ne samo kolege na poslu već i prijatelji s kojima održavam kontakt i dan danas.

Kao što sam već spomenuo, 1990. godine otišao sam na doktorski studij na University of Iowa. Porodica se pridružila nekoliko mjeseci kasnije i tako je započeo naš život u SAD-u, koji, eto, i danas traje. Bio sam, također, asistent i držao studentima vježbe iz raznih dodiplomskih kolegija, tako da sam od samog početka počeo stjecati iskustvo predavanja na američkim sveučilištima. Njihov je sistem ipak donekle različit od hrvatskog i, općenito, europskog sistema visokog školstva.

Kada sam doktorirao, akademsku karijeru sam nastavio 1996. godine na Georgia Southern University, Georgia, USA, gdje i sada radim. Prošao sam standardan put od docenta (assistant prof.) do redovnog profesora (full prof.). Predavao sam široki krug dodiplomskih i postdiplomskih kolegija i bio mentor većem broju studenata. Kao priznanje za kvalitetu mojih predavanja i nastave, te rad sa studentima, dobio sam 2009. godine sveučilišnu nagradu za najboljeg predavača.

Možete li nam kratko opisati koja su područja vašeg znanstvenog interesa u matematici te koji su vaši najznačajniji rezultati.

Kao što sam već naveo, područje mog istraživanja je dio područja optimizacije pod imenom *Metode unutarnjih točaka*, (*Interior-point methods*, u daljnjem tekstu kratko označenog skraćenicom IPM) koje se intenzivno razvija posljednjih dvadesetpet godina.

Razvoj tih metoda, koji je započeo s radom N. Karmarkara 1985. godine, izazvao je “revoluciju” u području optimizacije, posebno u području linearnog programiranja. Nakon gotovo pola stoljeća pojavila se grupa metoda koje se mogu i teorijski i praktično usporediti s verzijama simpleks metode. Za razliku od simpleks metode gdje se iteracije nalaze na rubu područja ograničenja, kod IPM iteracije se nalaze u unutrašnjosti područja ograničenja gdje aproksimativno prate tzv. *centralnu putanju* koja vodi do rješenja. Iteracije se računaju sofisticiranom upotrebom Newtonove metode. Kao što je dobro poznato, ona nije nužno globalno konvergentna pa su potrebni dodatni mehanizmi da se to postigne. Uspjeh IPM upravo leži u tome da ne samo da garantiraju globalnu konvergenciju nego, štoviše, te metode imaju teorijski polinomijalnu složenost u najgorem slučaju. S praktične, numeričke strane uspjeh IPM je također izuzetan jer je njihova implementacija omogućila rješavanje problema ogromnih dimenzija. Nadalje, pokazalo se da se IPM mogu generalizirati na mnoge probleme nelinearnog, a naročito konveksnog programiranja, posebno na probleme semidefinitnog i konusnog programiranja. To je omogućilo rješavanje problema velikih dimenzija koji su bili potpuno nedostupni prijašnjim metodama. Danas gotovo svi moderni optimizacijski kompjutorski paketi (optimization software) sadrže određenu verziju IPM, ili čak nekoliko njih, prilagođenih rješavanju različitih tipova optimizacijskih problema.



Slika 4. Goran sa svojim suradnicima: Kees Roos, Yanqin Bai i Arkadij Njemirovski.

IPM se bazično mogu podijeliti u dvije grupe, grupu metoda koje napreduju malim koracima, tj. iteracije se nalaze blizu centralne putanje, i grupu metoda koje napreduju velikim koracima pa se mogu naći i podalje od centralne putanje. Zanimljivo je da prva grupa teorijski zahtijeva manji broj iteracija da bi se došlo do rješenja nego druga; međutim, u praksi je obrnuto, druga grupa se ponaša daleko bolje. Ta je dihotomija poznata pod imenom “ironija IPM”. Mnogi su istraživači radili i rade na tome da se dizajniraju IPM s velikim koracima čiji će teorijski broj iteracija biti, ako ne jednak, onda vrlo blizu onom za IPM s malim koracima. S našim suradnikom, prof. Kees Roosom iz Nizozemske uspjeli smo dizajnirati IPM s velikim koracima za linearne komplementarne probleme koji su bazirani na grupi separabilnih barijernih funkcija (barrier functions) s posebnom klasom tzv. dopustivih komponentnih funkcija (eligible kernel functions). Nadalje, dali smo unificiranu analizu konvergencije za cjelokupnu klasu, a za pojedine specijalne funkcije uspjeli smo dobiti do sada najbolji broj iteracija za IPM s velikim koracima. Iako nismo sasvim poništili razliku između IPM s velikim i IPM s malim koracima, u mnogome smo je smanjili.

Drugo područje mog istraživanja odnosi se na generalizaciju spomenutih metoda na optimizacijske probleme vezane uz simetrične konuse. Analiza konvergencije ovih metoda je daleko teža i zahtijeva dobro poznavanje “mašinerije” euklidsko-jordanovih algebri (Euclidean Jordan Algebras).

Imate li neki hobi?

U djetinjstvu i mladosti bavio sam se plivanjem i vaterpolom. Plivanje je ostalo moj hobi i nakon što sam se prestao aktivno baviti tim sportom. U gimnaziji sam zavolio rukomet pa sam godinama bio vratar školske ekipe i s tom sam aktivnošću nastavio i na fakultetu. Zadnjih par godina počeo sam se rekreativno baviti trčanjem na duge staze s ciljem da u dogledno vrijeme otrčim svoj prvi maraton. Nadalje, volim ronjenje i jedrenje na dasci, ali za bavljenje tim aktivnostima nemam baš puno prilike i vremena.

Sport je neobično važan za uravnotežen fizički i mentalni razvoj u djetinjstvu i mladosti, a i kasnije za održavanje zdravlja. Bavljenje sportom uči nas disciplini i upornosti, osobinama koje su itekako važne i u bavljenju matematikom. Uz rekreativno bavljenje sportom volim čitati i putovati mada uz redovan posao ne ostaje baš puno vremena za to.



Slika 5. Jedrenje na dasci na Korčuli.

Bavljenje isključivo jednom aktivnošću, pa tako i matematikom, ma kako je voljeli, može voditi u zasićenje i smanjenje produktivnosti. Uravnotežen pristup, koji uključuje, bavljenje sportom i drugim aktivnostima, vrlo je važan i obično ima pozitivne efekte na rad u struci, povećanje interesa, efikasnosti, pa čak i kreativnosti.

Imate li neku poruku za čitatelje MFL-a?

Sama činjenica da je učenik redovni čitatelj MFL-a znači njegov interes za matematiku i fiziku, a najvjerojatnije je njegovo znanje iz tih područja veće od prosječnog. MFL već desetljećima predstavlja izvor interesantnih članaka i zanimljivih zadataka vršeći pozitivan i često nezamjenjiv utjecaj na razvoj generacija mladih matematičara i fizičara među koje spadam i ja.

U doticaj s MFL-om sam došao polaskom u gimnaziju. Sa zanimanjem sam čitao priloge, ali sam s još većim zanimanjem rješavao zadatke objavljene u svakom broju lista. Rješavanje zadataka je predstavljalo izazov, ali i veselje, kad bih svoje ime našao među onima koji su pravilno riješili pojedine zadatke. To je sigurno pomoglo mom uspjehu u školi i van nje, na raznim natjecanjima.

Toplo bih preporučio mladim čitateljima da nastave s čitanjem MFL-a jer koristi od toga su mnogostruke i štoviše preporučio bih da populariziraju MFL među svojim prijateljima. Zadovoljstvo rješavanjem nekog zahtjevnijeg zadatka u najmanju ruku je usporedivo s “pobjedom” u video igri, a tvrdim da je i mnogo korisnije.

Nadalje, preporučio bih mladim čitateljima da nastoje sudjelovati na matematičkim natjecanjima. Mada ona sama predstavljaju izazov, ali i priliku za druženje s drugim natjecateljima, prava korist leži u sistematičnim i upornim pripremanjima za njih. Sjećam

se dana mog djetinjstva i mladosti, koliko su slične aktivnost utjecale na moj razvoj i odabir karijere.

Imajući na umu svoje iskustvo, nakon zaposlenja na Georgia Southern University, uz redovitu nastavu godinama sam volonterski pomagao u aktivnostima matematičkih klubova u lokalnoj osnovnoj i srednjoj školi. Veselilo me vidjeti entuzijazam i zainteresiranost, kao i uspjeh tih mladih učenika, te pratiti njihov razvoj. Lijep je osjećaj da sam možda pomogao u nekome zapaliti iskru ljubavi za matematiku i otvorio mu bar malo prozor u divan svijet matematike. Uz to, već desetak godina vodim na Sveučilištu pripreme grupe dodiplomskih studenata za nacionalna matematička natjecanja među sveučilištima. Jedno natjecanje je više teorijskog karaktera, prestižni Putnam Mathematical Competition, koje je na nivou matematičkih olimpijada, ali prilagođen univerzitetkom gradivu. Drugo natjecanje je primijenjenog karaktera, Mathematical Contest in Modeling, gdje grupa od tri sudenta ne rješava klasične zadatke nego radi na jednom od dva ponuđena problema, tokom produženog vikenda i na kraju predaju rješenje sa svojim modelom i proračunima na ocjenjivanje. Mi smo naročito u ovom drugom natjecanju imali dosta uspjeha. Neki bivši natjecatelji su mi kasnije rekli koliko je to bilo korisno za njihovo kasnije školovanje, a nekima je to pomoglo u odabiru karijere. Za svoj angažman s učenicima i sa studentima van nastave dobio sam 2011. godine univerzitetku nagradu za volonterski rad.



Slika 6. S matematičkog natjecanja (MCM 2010).

Završio bih s konkretnim prijedlogom. Mathematical Contest in Modeling je internacionalno natjecanje i otvoreno je za ekipe studenata iz svih krajeva svijeta. Tradicijskalo sudjeluje ih mnogo iz Kine, ali i iz drugih zemalja. Nisam dosad primijetio sudjelovanje Hrvatske. Toplo bih preporučio da naša sveučilišta razmotre sudjelovanje na tom natjecanju. Bilo bi to jako dobro i korisno iskustvo za studente matematike, a ne bi mnogo koštalo jer nema putovanja već je sve on-line. Toplo bih preporučio isto i za srednje škole jer ta vrsta natjecanja postoji i za srednjoškolce.

Zaključio bih s porukom mladim čitateljima MFL-a da se ne boje postavljati visoke ciljeve. Uz uporan i sistematičan rad mnogi od njih će biti i ostvareni. No, bavljenje matematikom ne smije biti samo napor, treba predstavljati i zadovoljstvo da bi se u potpunosti moglo uživati u njenoj ljepoti i značenju.