Kako možemo pokazati da se sile zbrajaju kao vektori

Ivica Aviani[1]

U fizici razlikujemo skalarne veličine kao što su masa, obujam, energija od vektorskih veličina kao što su pomak, brzina, ubrzanje, sila. Za razliku od skalara koji se zbrajaju kao obični brojevi, vektori se zbrajaju sasvim drugačije, geometrijski. Čini se da je upravo to razlog zbog kojeg nam vektori stvaraju probleme u radu. Pojam vektora nije nastao u nekom određenom trenutku, on se razvio postupno tijekom 19. i 20. stoljeća. Prethodili su mu kompleksni brojevi koji su omogućili opis dvodimenzionalnog prostora, a potom kvaternioni pomoću kojih je omogućena analiza trodimenzionalnog prostora. Sam pojam *vektor* prvi je uveo Hamilton 1846. godine kada je svoje kvaternione prikazao kao sumu realnog i imaginarnog dijela, pri čemu se realni dio – skalar, sastojao od jedne, a imaginarni dio, kojeg je nazivao vektorom, od tri komponente. Suvremeni sustav vektorske analize koji danas koristimo uspostavio je Gibbs 1881. godine u svom djelu *Elementi vektorske analize*, gdje je odvojio i iskoristio samo vektorski dio kvaterniona. Dakle, vektori kakve danas poznajemo nisu tako stari – tek nešto više od sto godina.

Vektorom nazivamo skup svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina. Možemo ih po volji pomicati, ali ih ne smijemo ni rotirati niti im mijenjati duljinu. Pravilo zbrajanja vektora, najčešće zastupljeno u udžbenicima fizike je pravilo paralelograma. *Ako početke dvaju vektora dovedemo u istu točku tako da čine dvije susjedne stranice paralelograma, tada je njihov zbroj, po veličini i smjeru jednak vektoru određenom dijagonalom paralelograma usmjerenom iz te točke prema nasuprotnom vrhu paralelograma*. To se pravilo spominje još u djelima Aristotela i njegovih prethodnika kao pravilo za zbrajanje brzina, a u udžbenike fizike ulazi negdje oko 1800. godine kao pravilo zbrajanja sila. Pravilo je lako prihvatiti na temelju iskustva. Primjerice ako trebamo preveslati rijeku, znamo da, ako veslamo u smjeru okomitom na obale, nećemo završiti najbliže na suprotnoj obali, nego nešto nizvodno, to nizvodnije što je rijeka brža. Jasno je da mjesto do kojeg ćemo doveslati ovisi ne samo o iznosima brzina rijeke i čamca, nego i o njihovim smjerovima, dakle o geometriji situacije.

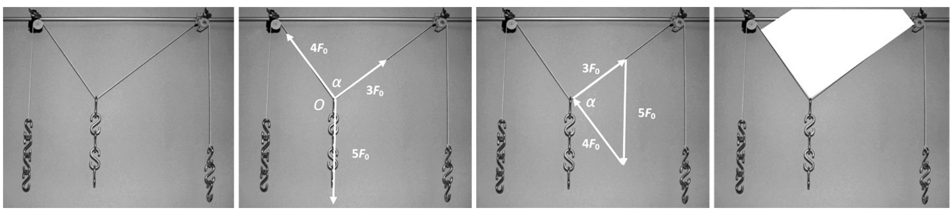
Pravilo paralelograma dobro opisuje zbrajanje vektora fizikalnih veličina koje se pojavljuju istodobno. No, što je s pomacima? I pomaci su vektori, ali se pojavljuju jedan za drugim. Primjerice, u školu možemo doći izravno, ali i tako da prvo odemo do dućana po sendvič, a potom u školu. To znači da je vektor pomaka od kuće do škole jednak zbroju vektora pomaka od kuće do dućana i vektora pomaka od dućana do škole. Ovdje dolazimo do drugog pravila za zbrajanje vektora. *Vektori se zbrajaju tako da se na kraj prvog vektora postavi početak drugoga vektora pri čemu je njihov zbroj jednak vektoru koji se proteže od početka prvog do kraja drugog vektora.* Prednost ovog pravila dolazi do punog izražaja kada zbrajamo više vektora. Tada to radimo jednostavno tako da ih nadovezujemo jedan na drugog. Ovo se pravilo naziva pravilom poligona. Budući da su pravila paralelograma i poligona potpuno ekvivalentna, sve vektorske fizikalne veličine možemo zbrajati koristeći pravilo poligona koje je znatno praktičnije za rad.

Za pomake i za brzine smo dosta jednostavno zaključili da se zbrajaju kao vektori, ali što je sa silama? Zašto se i sile zbrajaju kao vektori? Zakon paralelograma za sile prvi je primijenio Stevin 1587. godine u svome djelu *Načela umjetnosti vaganja*, no tek je Newton 1687. godine u svojoj *Principiji* objasnio zašto je tome tako. Pritom je koristio činjenicu da se ubrzanja, odnosno pomaci, zbrajaju po pravilu paralelograma i svoj drugi zakon gibanja, odnosno proporcionalnost između sile i ubrzanja. Treba napomenuti da

[1] Autor je viši znanstveni suradnik na Institutu za fiziku u Zagrebu i izvanredni profesor na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Splitu; e-pošta: `aviani@ifs.hr`

u doba Newtona vektori nisu bili poznati. Njegovo dinamičko objašnjenje naišlo je na kritike mnogih fizičara 19. stoljeća koji su smatrali da pravilo paralelograma mora vrijediti bez obzira na drugi Newtonov zakon i da se mora moći objasniti samo statičkim argumentima, odnosno ravnotežom sila. Statička objašnjenja zakona paralelograma sila dali su Duchayla 1804. i Poisson 1811. godine, ali i njihova objašnjenja imaju određene slabosti, odnosno u sebi sadrže neke druge principe koje je također moguće kritizirati. *Ukratko, zaista je složeno odgovoriti na pitanje zašto se sile zbrajaju vektorski. Ipak, činjenicu da taj princip vrijedi možemo pokazati jednostavnim pokusom.*

Za pokus nam je potreban sljedeći pribor: 2 koloture, 2 stege, 12 jednakih utega, 1 metalna prečka, 1.5 m tankog užeta, list A4 papira, 2 laboratorijska stalka sa stegama. Postav pokusa prikazan je na slici 1a. Metalna prečka pričvršćena je između dva laboratorijska stalka (ne vide se na slici). Na njoj su stegama pričvršćene koloture (to su ovdje kotačići iz odbačenog printera). Preko kolotura prebačeno je uže na čijim su krajevima i na sredini između kolotura ovješeni utezi. Na lijevom kraju ovješeno je 4 utega ukupne težine $4F_0$, na desnom 3 utega težine $3F_0$, a u sredini 5 utega težine $5F_0$.



a) b) c) d)

Slika 1. Pokus i crtež sila kojim pokazujemo da se sile zbrajaju kao vektori.

Težina srednjeg utega u točki O uravnotežena je silama napetosti lijeve i desne niti koje su po iznosima jednake težinama lijevih, odnosno desnih utega (kolotura mijenja samo smjer sile). Ove tri sile prikazane su odgovarajućim vektorima na slici 1b. Važno je napomenuti da je težina srednjeg utega usmjerena vertikalno prema dolje dok su sile napetosti usmjerene u smjer užeta te međusobno zatvaraju kut α. Uz pretpostavku da se sile zbrajaju kao vektori, vektore sila zbrojimo koristeći pravilo poligona za zbrajanje vektora tako da ih nadovezujemo jedan na drugog (slika 1c). Oni moraju zatvoriti trokut zato što njihov zbroj mora biti jednak nuli. To znamo po tome što cijeli sustav miruje pa za njega vrijedi prvi Newtonov zakon po kojem zbroj sila na promatranu točku O mora biti jednak nuli. Lako je pokazati da je kut nasuprot najduljoj stranici trokuta jedak izmjerenom kutu α kojeg zatvara uže. Trokut sila je dobro poznati pravokutni trokut čije stranice zadovoljavaju omjer $3:4:5$. Zbog toga vrijedi $\alpha = 90^\circ$. Sada samo još moramo provjeriti da je kut α zaista pravi kut. Rukom nekoliko puta poremetimo ravnotežu te svaki put, nakon smirivanja utega, primicanjem pravokutnog lista A4 papira, pokažemo da srednji dio užeta zaista zatvara pravi kut (slika 1d). Budući da mjerenje i matematički postupak zbrajanja vektora daju jednaku vrijednost za kut α postupak zbrajanja sila koji smo koristili je ispravan, odnosno sile se zaista zbrajaju kao vektori.

Literatura

[1] M. Lange, *Why do forces add vectorially? A forgotten controversy in the foundations of classical mechanics*, Am. J. Phys. 79, 380 (2011).

[2] M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System (Dover Books on Mathematics)*, Dover Publications. Inc., New York (1985).