ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2013. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/253.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 208.

A) Zadaci iz matematike

3351. Nađi sve parove (x, y) pozitivnih cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^3 - y^3 = 721.$$

3352. Dokaži da za svake pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3(a+b+c+d)}.$$

3353. Ako je $n > 4$ složen prirodan broj dokaži da ne postoji permutacija $a_1, a_2, \ldots, a_n$ brojeva $1, 2, \ldots, n$ takva da brojevi

$$a_1,\ a_1a_2,\ \ldots,\ a_1a_2\ldots a_n$$

daju sve moguće ostatke pri dijeljenju s n. Da li to vrijedi za $n = 4$?

3354. Odredi sve cijele brojeve x za koje je $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ također cijeli broj.

3355. Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom u vrhu C. S njegove vanjske strane konstruirani su jednakostranični trokuti ADB i AEC. Pokaži da je

$$P(ACD) = P(AEC) + \frac{1}{2}P(ABC).$$

3356. Točke P i Q su na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ četverokuta $ABCD$ tako da vrijedi

$$|AP| : |PB| = |CQ| : |QD|.$$

Pokaži da je zbroj površina trokuta QAB i PCD jednak površini četverokuta $ABCD$.

3357. Ako za kutove α i β vrijedi

$$\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$$

dokaži da je $\sin\alpha\sin\beta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3358. Neka je n cijeli broj koji nije djeljiv niti s 2 niti s 3. Dokaži da $24|n^2 + 47$.

3359. Od sedam mladića i četiri djevojke želimo napraviti šesteročlanu ekipu za odbojku, ali tako da u njoj bude barem jedna djevojka. Na koliko načina se to može napraviti?

3360. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1.$$

3361. Koliko je $x+y$ ako su x i y od nule različita rješenja sustava jednadžbi

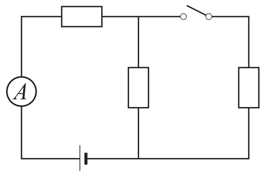
$$y^2x = 15x^2 + 17xy + 15y^2,$$
$$x^2y = 20x^2 + 3y^2.$$

3362. Neka je a duljina stranice baze pravilne uspravne četverostrane prizme. Kroz dijagonalu donje baze i nasuprotni vrh gornje baze prolazi ravnina koja siječe dvije bočne strane prizme po pravcima koji zatvaraju kut φ. Koliki je volumen prizme?

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 354. Poluga, s osloncem u sredini, ima duljinu osamdeset centimetara. Uravnotežena je pomoću šest jednakih prstena i jedne kocke. Na lijevoj strani, deset centimetara od kraja poluge, ima obješena četiri prstena, a na desnoj dva prstena i jednu kocku. Kocka je od oslonca udaljena deset centimetara, a prsteni dvadeset. Koliko je puta veća masa kocke od mase jednog prstena?

OŠ – 355. Svi otpornici na slici imaju jednak otpor. Kad je prekidač otvoren ampermetar pokazuje struju od 0.9 ampera. Koliko će pokazivati kad se prekidač zatvori?



OŠ – 356. Autobusi dva različita prijevoznika polaze iz Zagreba u Rijeku u razmaku od pola sata. Prvi je vozio prosječnom brzinom od 65 km/h. Kolika je bila prosječna brzina drugog autobusa ako je u Rijeku stigao istovremeno s prvim? Udaljenost od Zagreba do Rijeke iznosi oko 184 kilometra.

OŠ – 357. Bazen je dugačak 30 i širok 20 metara. Napunjen je vodom do visine 2 metra. Ako se u vodu stavi jedan gram soli koliko će molekula te soli biti u jednom kubnom milimetru vode kad se sol otopi i jednoliko rasporedi? Masa jedne molekule soli iznosi $9.7 \cdot 10^{-26}$ kg.

1525. Oko planeta prosječne gustoće $4500\ \mathrm{kg/m^3}$ kruži satelit na visini 350 km, tako da mu je ophodno vrijeme 100 minuta. Odredi radijus planeta i brzinu kruženja satelita.

1526. Uz površinu nabijene metalne kugle električno polje iznosi 500 V/m, a na udaljenosti 15 cm od površine 280 V/m. Odredi radijus i naboj kugle.

1527. Minimalni kut devijacije snopa svjetlosti za prizmu od stakla indeksa loma 1.5 iznosi 10°. Koliki je kut prizme? Koliki je kut devijacije ako snop upada okomito na prizmu?

1528. Dvije spektralne linije vodika imaju u vakuumu valne duljine 1874.6 nm i 1943.9 nm. Kojim prijelazima (glavnim kvantnim brojevima n) odgovaraju te linije?

1529. Niz kosinu kuta α kolica ubrzavaju akceleracijom a. Koeficijent trenja kolica i kosine je $\mu = 0.2$. Ako nagib kosine povećamo za 10°, akceleracija će porasti za 40%. Odredi α i a.

1530. Bikonveksna leća načinjena od stakla indeksa loma 1.5 ima dva dioptra jednakih radijusa zakrivljenosti $R_1 = R_2 = 40$ cm. Debljina leće duž optičke osi iznosi 3 cm. Odredi žarišnu daljinu pomoću jednadžbe tanke leće i pomoću izraza za leću debljine d:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right).$$

Izrazi pogrešku izraza za tanku leću u postocima.

1531. Vodik i ugljik imaju po dva stabilna izotopa. Prirodni ugljik sadrži 1.11% izotopa $^{13}\mathrm{C}$ (ostatak je $^{12}\mathrm{C}$), a vodik 0.015% izotopa $^{2}\mathrm{H}$ (ostatak je $^{1}\mathrm{H}$). Koliko ima molekula koje sadrže jedan $^{13}\mathrm{C}$ i četiri $^{2}\mathrm{H}$ atoma u jednom gramu metana (CH_4)?

C) Rješenja iz matematike

3327. *Nađi sve cijele brojeve n za koje je $\dfrac{n^3 - 3n^2 + 4}{2n - 1}$, također cijeli broj.*

Rješenje. Množenjem ovog izraza s 8 on će opet biti cijeli broj. Dakle,

$$8 \cdot \frac{n^3 - 3n^2 + 4}{2n - 1} = 4n^2 - 10n - 5 + \frac{27}{2n - 1}.$$

Stoga, 27 mora biti djeljiv s $2n - 1$. To je moguće samo ako je $2n - 1 = \pm 1$, ± 3, ± 9, ± 27 tj. $n = -13$, -4, -1, 0, 1, 2, 5, 14. Lako se provjeri da je za svaki ovaj broj dani razlomak cijeli broj.

Lukas Novak (8),
I. osnovna škola Čakovec, Čakovec

3328. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i*

$$p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \quad q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

pokaži da je $|p - q| < 1$.

Rješenje.

$$p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \quad q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} p - q &= \frac{a^2c - a^2b^2 + b^2a - b^2c + c^2b - c^2a}{abc} \\ &= \frac{a^2(c-b) + a(b^2 - c^2) + bc(c-b)}{abc} \\ &= \frac{(c-b)(a^2 - ab - ac + bc)}{abc} \\ &= \frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{abc}. \end{aligned}$$

Iz

$$|c - b| < a, \quad |a - b| < c, \quad |a - c| < b$$

slijedi

$$|p - q| = \frac{|(c-b)(a-b)(a-c)|}{abc} < \frac{abc}{abc} = 1,$$

tj. $|p - q| < 1$.

Petar Orlić (1),
XV. gimnazija, Zagreb

3329. *Ako je $a, b \in (0, 1)$, dokaži da vrijedi nejednakost*

$$\sqrt{ab} + \sqrt{(1-a)(1-b)} \le 1.$$

Rješenje. Za a, $b \in (0,1)$ prema A-G nejednakosti imamo

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{ab}{2} \quad \text{i} \quad \sqrt{(1-a)(1-b)} \leqslant \frac{2-a-b}{2}$$

odnosno

$$\sqrt{ab} + \sqrt{(1-a)(1-b)} \leqslant \frac{2-a-b+a+b}{2} = 1.$$

Dakle,

$$\sqrt{ab} + \sqrt{(1-a)(1-b)} \leq 1$$

za a, $b \in (0,1)$.

Lukas Novak (8), Čakovec

3330. *Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$6x^2 + 5y^2 = 74.$$

Rješenje. Neka je $a = x^2$, $a \in \mathbf{N}_0$ i $b = y^2$, $b \in \mathbf{N}_0$. Tada je

$$6a + 5b = 74 \quad \text{tj.}$$

$$b = 14 - a + \frac{4-a}{5}. \qquad (1)$$

Nadalje, $0 \leqslant a \leqslant \frac{37}{3}$ tj. $0 \leqslant a \leqslant 12$, a iz (1) dobivamo $a \in \{4, 9\}$.

Za $a = 4$ je $b = 10$, što nije moguće jer $y \in \{\pm\sqrt{10}\}$ nije cijeli broj.

Za $a = 9$ je $b = 4$ te imamo 4 rješenja

$$(x, y) \in \{(3,2); (3,-2); (-3,2); (-3,-2)\}.$$

Lukas Novak (8), Čakovec

3331. *Neka su a, b pozitivni brojevi različiti od 1 i x, y zadovoljavaju jednadžbe $a^x = b$, $b^y = a$. Dokaži da je $xy = 1$.*

Prvo rješenje. Iz $a^x = b$ ($a, b > 0$ i $a \neq 1$ i $b \neq 1$), imamo

$$b^y = a \;/\;^x \quad \text{tj.} \quad b^{yx} = a^x,$$

odnosno

$$b^{xy} = b \;/\; : b,$$

$$b^{xy-1} = 1 \quad \text{tj.} \quad xy - 1 = 0.$$

Lukas Novak (8), Čakovec

Drugo rješenje. Iz

$$a^x = b \implies x \log_a a = \log_a b \implies x = \log_a b,$$

$$b^y = a \implies y \log_b b = \log_b a \implies y = \log_b a$$

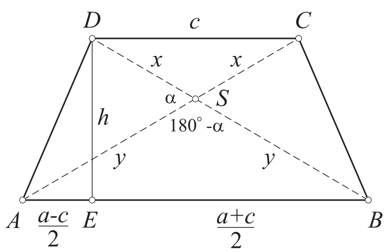
imamo

$$xy = \log_a b \cdot \log_b a = \log_a b \cdot \frac{1}{\log_a b} = 1.$$

Lucija Drašinac (4),
III. gimnazija, Osijek

3332. *Duljina visine jednakokračnog trapeza je h, a kut između dijagonala nasuprot njegovom kraku je α. Kolika je duljina srednjice trapeza?*

Rješenje. $|AB| = a$, $|CD| = c$, $|AE| = \frac{a-c}{2}$, $|EB| = \frac{a+c}{2}$, $|CS| = |DS| = x$, $|AS| = |BS| = y$.



Po kosinusovom poučku vrijedi:

$$c^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$
$$= 2x^2(1 + \cos\alpha),$$
$$x^2 = \frac{c^2}{2(1+\cos\alpha)};$$
$$a^2 = y^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y \cdot \cos(180^\circ - a)$$
$$= 2y^2(1 + \cos\alpha),$$
$$y^2 = \frac{a^2}{2(1+\cos\alpha)}.$$

Promatramo pravokutni trokut DEB:

$$(x+y)^2 = h^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2.$$

Srednjica trokuta se računa po formuli $s = \frac{a+c}{2}$

$$(x+y)^2 = h^2 + s^2,$$
$$s^2 = (x+y)^2 - h^2$$
$$= x^2 + 2xy + y^2 - h^2$$

$$= \frac{c^2}{2(1+\cos\alpha)} + 2 \cdot \frac{c}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}$$
$$\cdot \frac{a}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}} + \frac{a^2}{2(1+\cos\alpha)} - h^2$$
$$= \frac{c^2}{2(1+\cos\alpha)} + \frac{2ac}{2(1+\cos\alpha)}$$
$$+ \frac{a^2}{2(1+\cos\alpha)} - h^2$$
$$= \frac{(a+c)^2}{2(1+\cos\alpha} - h^2$$
$$= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{1+\cos\alpha} - h^2$$
$$= s^2 \cdot \frac{2}{1+\cos\alpha} - h^2.$$

Nadalje

$$s^2(1+\cos\alpha) = 2s^2 - h^2(1+\cos\alpha),$$
$$s^2(1+\cos\alpha) - 2s^2 = -h^2(1+\cos\alpha),$$
$$s^2(1-\cos\alpha) = h^2(1+\cos\alpha),$$
$$s^2 = \frac{h^2(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} \quad / \sqrt{\ }$$
$$s = h\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = h \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Andrea Klarić (4), Prometna škola, Rijeka

3333. *Dan je pravokutan trapez s bazama a i b $(b < a)$. Pravac paralelan bazi trapeza dijeli ga na dva manja takva da se u svaki od njih može upisati kružnica. Koliki je zbroj duljina njihovih polumjera?*

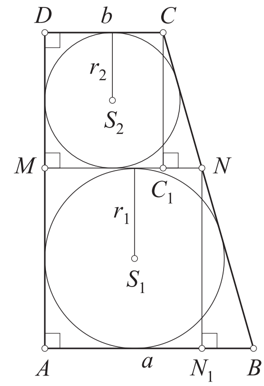
Rješenje. Neka je $|MN| = x$. Uz oznake kao na slici imamo: $|DM| = |CC_1| = 2r_2$, $|C_1N| = x - b$, $|NN_1| = |MA| = 2r_1$, $|N_1B| = a - x$. Četverokut $MNCD$ je tangencijalni četverokut pa je $|CN| = |DC| + |MN| - |DM| = b + x - 2r_2$. Analogno je $|NB| = a + x - 2r_1$.

Prema Talesovom poučku vrijedi

$$\frac{|CC_1|}{|NN_1|} = \frac{|C_1N|}{|N_1B|} = \frac{|CN|}{|NB|},$$

odnosno

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{x-b}{a-x} = \frac{b+x-2r_2}{a+x-2r_1}.$$



Nadalje imamo

$$\frac{b+x-2r_2}{a+x-2r_1} = \frac{b+x-2r_2+2r_2}{a+x-2r_1+2r_1} = \frac{b+x}{a+x}$$

odnosno

$$\frac{x-b}{a-x} = \frac{x+b}{a+x}$$

odakle dobivamo $x = \sqrt{ab}$.

Primijenimo li Pitagorin poučak na $\triangle C_1NC$ imamo

$$|CC_1|^2 + |C_1N|^2 = |CN|^2,$$

odnosno

$$4r_2^2 + x^2 + b^2 - 2xb$$
$$= b^2 + x^2 + 4r_2^2 + 2bx - 4r_2b - 4r_2x$$

tj.

$$r_2 = \frac{xb}{x+b} = \frac{b\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Analogno dobijemo $r_1 = \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

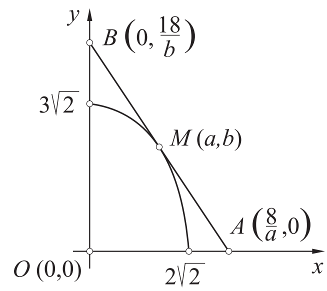
I napokon

$$r_1 + r_2 = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{ab}.$$

Lukas Novak (8), Čakovec

3334. *Odredi točku na elipsi* $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{18} = 1$ *u prvom kvadrantu, takvu da tangenta na elipsu u toj točki zatvara s koordinatnim osima trokut najmanje površine.*

Rješenje. Jednadžba tangente u točki $M(a,b)$, a, $b > 0$ je $\dfrac{xa}{8} + \dfrac{yb}{18} = 1$. Njezini presjeci s koordinatnim osima su točke $A\left(\frac{8}{a}, 0\right)$ i $B\left(0, \frac{18}{b}\right)$.



Kako točka M pripada elipsi, iz $\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{18}=1$ nalazimo $b=\frac{3}{2}\sqrt{8-a^2}$, pa je

$$P_{\triangle ABO}=\frac{|AO|\cdot|BO|}{2}=\frac{\frac{8}{a}\cdot\frac{18}{b}}{2}$$
$$=\frac{72}{ab}=\frac{48}{a\sqrt{8-a^2}}.$$

Kako je $P'(a)=\frac{96(a^2-4)}{a^2(8-a^2)^{\frac{3}{2}}}$, vrijedi $P'(a)<0$ za $0<a<2$; $P'(a)>0$ za $2<a<2\sqrt{2}$, tj. minimum se postiže za $a=2$. Dakle, tražena točka je $M(2,3)$.

Lucija Drašinac (4),
III. gimnazija, Osijek

3335. *Ako su α, β, γ kutovi trokuta, dokaži jednakost*

$$\frac{\frac{b}{\cos\beta}+\frac{c}{\cos\gamma}}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\frac{c}{\cos\gamma}+\frac{a}{\cos\alpha}}{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha}.$$

Rješenje. Redom imamo

$$\frac{\frac{b\cos\gamma+c\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma}}{\frac{\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma}}=\frac{\frac{c\cos\alpha+a\cos\gamma}{\cos\gamma\cos\alpha}}{\frac{\sin\gamma\cos\alpha+\sin\alpha\cos\gamma}{\cos\gamma\cos\alpha}},$$

$$\frac{b\cos\gamma+c\cos\beta}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{c\cos\alpha+a\cos\gamma}{\sin(\gamma+\alpha)},$$

$$\frac{b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\sin\alpha}=\frac{c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\sin\beta},$$

$$\frac{\frac{a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2}{2a}}{\sin\alpha}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2+a^2+b^2-c^2}{2b}}{\sin\beta},$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}.$$

Ovo je poučak o sinusima, čime je dokazana dana jednakost.

Andrea Klarić (4), Rijeka

3336. *Odredi produkt*

$$(\sqrt{3}+\operatorname{tg}1^\circ)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}2^\circ)\ldots(\sqrt{3}+\operatorname{tg}29^\circ).$$

Rješenje. Umnožak čini 29 zagrada. Grupiranjem zagrada čiji zbroj kutova iznosi 30° dobivamo:

$$(\sqrt{3}+\operatorname{tg}1^\circ)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}29^\circ)=4,$$
$$(\sqrt{3}+\operatorname{tg}2^\circ)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}28^\circ)=4,$$
$$\vdots$$
$$(\sqrt{3}+\operatorname{tg}14^\circ)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}16^\circ)=4.$$

Zbog neparnog broja članova izraz $(\sqrt{3}+\operatorname{tg}15^\circ)$ nema svog para, pa računamo $(\sqrt{3}+\operatorname{tg}15^\circ)=2$.

Umnožak svih članova iznosi

$$4^{14}\cdot 2=2^{29}.$$

Andrea Klarić (4), Rijeka

3337. *Koliko ima pravokutnih trokuta s vrhovima u vrhovima pravilnog n-terokuta?*

Rješenje. Kada se mnogokutu opiše kružnica pravokutni trokuti su samo oni koji su nad promjerom te kružnice.

Primijetimo da kod n-terokuta s neparnim brojem stranica nijedan promjer ne sadrži dva vrha mnogokuta. Dakle, postoje pravokutni trokuti samo ako je n paran. Tada mnogokut ima $\frac{n}{2}$ promjera koji sadrže dva vrha mnogokuta. Nad svakim promjerom ima $n-2$ pravokutnih trokuta. Stoge je ukupan broj pravokutnih trokuta:

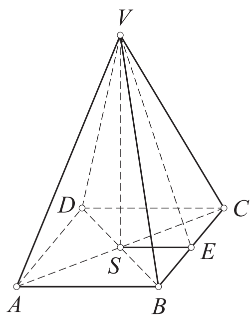
$$\frac{n(n-2)}{2}=\frac{n^2-2n}{2}.$$

Paško Majcenović (2), Gimnazija Franje Petrića, Zadar

3338. *Dana je pravilna četverostrana piramida čija je duljina dijagonale baze jednaka duljini bočnog brida i jednaka je* a. *Nađi oplošje i volumen piramide.*

Rješenje. $|AC|=|BD|=a$,

$|AV|=|BV|=|CV|=|DV|=a$.



Sada redom imamo,

$$\begin{aligned}|AB|^2&=\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2+\left(\frac{|BD|}{2}\right)^2\\&=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2},\\|AB|&=\frac{\sqrt{2}}{2}a;\\|SV|^2&=|CV|^2-|SC|^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}a^2,\\|SV|&=\frac{\sqrt{3}}{2}a;\\|EV|^2&=|SE|^2+|SV|^2\\&=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\\&=\frac{1}{8}a^2+\frac{3}{4}a^2=\frac{7}{8}a^2,\\|EV|&=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}a;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}O&=|AB|^2+2|AB|\cdot|EV|\\&=\frac{1}{2}a^2+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}a\\&=\frac{1+\sqrt{7}}{2}a^2;\\V&=\frac{1}{3}|AB|^2|SV|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\\&=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3.\end{aligned}$$

Andrea Klarić (4), Rijeka

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 346. *Aluminijsko tijelo ima masu* 8.1 *kg. Ako se petina njegovog obujma zamijeni materijalom tri puta veće gustoće kolika će biti prosječna gustoća tog tijela? Gustoća aluminija je* 2700 *kg/m*^{3}.

Rješenje.

$m_{\text{al}}=8.1$ kg

$V_{\text{x}}=\frac{1}{5}V_{\text{al}}$

$\rho_{\text{al}}=2700\ \text{kg/m}^3$

$\rho_{\text{x}}=8100\ \text{kg/m}^3$

$\rho=?$

$$\begin{aligned}V_{\text{al}}&=\frac{m_{\text{al}}}{\rho_{\text{al}}}=\frac{8.1\ \text{kg}}{2700\ \text{kg/m}^3}=0.003\ \text{m}^3;\\V_{\text{x}}&=\frac{0.003}{5}\ \text{m}^3=0.0006\ \text{m}^3;\\m_{\text{x}}&=\rho_{\text{x}}\cdot V_{\text{x}}=8100\ \text{kg/m}^3\cdot0.0006\ \text{m}^3\\&=4.86\ \text{kg};\\m_{\text{al}}&=0.8\cdot8.1\ \text{kg}=6.48\ \text{kg};\\m&=m_{\text{al}}+m_{\text{x}}=4.86\ \text{kg}+6.48\ \text{kg}\\&=11.34\ \text{kg}:\\\rho&=\frac{m}{V}=\frac{11.34\ \text{kg}}{0.003\ \text{m}^3}=3780\ \text{kg/m}^3.\end{aligned}$$

Lovro Rački (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 347. *Anica je izbrojala da joj u menzuru od* 10 *cm*^{3} *stane* 40 *kapi vode. Koliki je obujam jedne kapi? Anica ima akvarij dugačak* 1 *m i širok* 6 *dm. Napunjen je vodom do visine* 50 *cm. Kad bi ga se željelo napuniti* *vodom kapajući iz kapaljke koliko bi vremena trebalo za to ako iz kapaljke izlaze dvije kapi u sekundi i ako se isparavanje vode zanemari?*

Rješenje.

$V = 10\ \text{cm}^3$
$n = 40$
$a = 1\ \text{m}$
$b = 6\ \text{dm}$
$c = 50\ \text{cm}$
$n_{1s} = 2$ kapi
$\underline{t = ?}$

$$V_1 = \frac{10}{40}\ \text{cm}^3 = 0.25\ \text{cm}^3;$$

$$V_{ak} = a \cdot b \cdot c = 100\ \text{cm} \cdot 60\ \text{cm} \cdot 50\ \text{cm} = 300\,000\ \text{cm}^3;$$

$$n_{kapi} = \frac{V_{ak}}{V_1} = \frac{300\,000\ \text{cm}^3}{0.25\ \text{cm}^3} = 1\,200\,000\ \text{kapi};$$

$$t = \frac{n_{kapi}}{n_{1s}} = 600\,000\ \text{s} = 10\,000\ \text{min} = 166.7\ \text{h} = 6.94\ \text{dana}.$$

Sanjin Jurić Fot (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 348. *Dva učenika se utrkuju koji će prije stići na suprotne krajeve maksimirskog nogometnog igrališta. Kako ne trče jednakom brzinom odlučili su da brži od njih trči po stranicama, a sporiji po dijagonali igrališta. Brzina sporijeg učenika je* $6.8\ m/s$, *a bržeg* $8.2\ m/s$. *Dimenzije nogometnog igrališta su* $105\ m$ *i* $68\ m$. *Koji će učenik prije stići na cilj?*

Rješenje.

$v_1 = 6.8\ \text{m/s}$
$v_2 = 8.2\ \text{m/s}$
$a = 105\ \text{m}$
$b = 68\ \text{m}$
$\underline{\Delta t = ?}$

$$s_1^2 = a^2 + b^2 = (105\ \text{m})^2 + (68\ \text{m})^2 = 11\,025\ \text{m}^2 + 4624\ \text{m}^2 = 15\,649\ \text{m}^2,$$

$$s_1 = 125.1\ \text{m};$$

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{125.1\ \text{m}}{6.8\ \text{m/s}} = 18.4\ \text{s};$$

$$s_2 = a + b = 105\ \text{m} + 68\ \text{m} = 173\ \text{m};$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{173\ \text{m}}{8.2\ \text{m/s}} = 21.1\ \text{s};$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 21.1\ \text{s} - 18.4\ \text{s} = 2.7\ \text{s}.$$

Na cilj će prije doći sporiji učenik.

Lovro Rački (8), Zagreb

OŠ – 349. *Koje se najveće, a koje najmanje vrijednosti električnog otpora mogu dobiti spajanjem otpornika od* $2\ \Omega$, $5\ \Omega$ *i* $10\ \Omega$*?*

Rješenje.

$R_1 = 2\ \Omega, \quad R_2 = 5\ \Omega, \quad R_3 = 10\ \Omega$

$\underline{R_{max},\ R_{min} = ?}$

Najveće vrijednosti otpora će biti kad su otpornici spojeni serijski.

$$R_{max} = R_1 + R_2 + R_3 = 2\ \Omega + 5\ \Omega + 10\ \Omega = 17\ \Omega.$$

Najmanji se otpor dobije kad su spojeni paralelno.

$$\frac{1}{R_{min}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5+2+1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

$$R_{min} = \frac{5}{4}\ \Omega = 1.25\ \Omega.$$

Sanjin Jurić Fot (8), Zagreb

1511. *Prosječna kalendarska godina traje* 365.25 *dana po julijanskom (starijem) i* 365.2425 *dana po gregorijanskom (novijem) kalendaru. Tropska godina (prosjek između dva uzastopna ljetna solsticija) iznosi* 365.24219 *dana. Odredi u koliko se godina greška u kalendaru akumulira do jednog cijelog dana. Rezultat izrazi za oba kalendara.*

Rješenje. U julijanskom kalendaru:
Greška u jednoj godini iznosi

$$\delta = 365.25 - 365.24219 = 0.00781\ \text{dan}.$$

1 dan greške nakupi se nakon $\frac{1}{\delta} = 128.04$ godine.

U gregorijanskom kalendaru:
Greška u jednoj godini iznosi

$$\delta = 365.2425 - 365.24219 = 0.00031\ \text{dan}.$$

1 dan greške nakupi se nakon $\frac{1}{\delta} = 3225.8$ godina.

Matea Prenc (4),
Gimnazija Pula, Pula

1512. *Projektil izbačen kosim hicem ima 3 sekunde nakon izbačaja 70%, a u tjemenu putanje 36% početne kinetičke energije. Uz $g = 10$ m/s^2 i zanemariv otpor zraka, odredi horizontalni domet i vrijeme leta projektila.*

Rješenje. Za horizontalnu (v_x) i vertikalnu (v_y) komponentu brzine vrijedi $v_x^2 + v_y^2 = v^2$. U tjemenu postoji samo x-komponenta, pa drugi uvjet daje

$$\frac{E_{k2}}{E_{k0}} = \frac{\frac{mv_x^2}{2}}{\frac{mv_0^2}{2}} = 0.36.$$

Odatle slijedi

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v_0} = 0.6, \quad \alpha = 53.13^0, \quad \sin\alpha = 0.8.$$

Kinetička energija u nekom trenutku t iznosi

$$E = \frac{m}{2}(v_x^2+v_y^2) = E_{k0}\left[\cos^2\alpha + \left(\sin\alpha - \frac{gt}{v_0}\right)^2\right].$$

Uvrstimo $t = 3$ s i $E = 0.7E_{k0}$ i dobit ćemo jednadžbu

$$0.7 = 0.6^2 + \left(0.8 - \frac{30}{v_0}\right)^2.$$

Odatle dobivamo dva rješenja $v_0 = 21.7$ m/s i $v_0 = 138.3$ m/s. Odgovarajuća vremena leta iznose $T_1 = 1.73$ s i $T_2 = 11.06$ s. Kako je prvo kraće od 3 sekunde, fizikalno je ono drugo, za koje domet iznosi

$$D = T_2 v_0 \cos\alpha = 918.1 \text{ m}.$$

Matea Prenc (4), Pula

1513. *Odredi masu utega matematičkog njihala, ako je period njihanja* 1.19 *s, a maksimalno ubrzanje pri njihanju iznosi* 0.33 *m/s^2 za energiju njihanja* 0.0012 *J.*

Rješenje. Maksimalnu akceleraciju uteg ima u položaju najvećeg otklona, kada je brzina nula. Ukupna energija jednaka je kinetičkoj energiji utega u položaju ravnoteže, kada je brzina maksimalna. Vrijedi: $a_{max} = A\omega^2$, $v_{max} = A\omega$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$E = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{m(A\omega)^2}{2} = \frac{ma_{max}^2}{2\omega^2},$$

pa slijedi

$$m = \frac{2E\omega^2}{a_{max}^2} = \frac{8\pi^2 E}{a_{max}^2 T^2} = 0.6143 \text{ kg}.$$

Matea Prenc (4), Pula

1514. *Zvijezda udaljena* 92.82 *svjetlosne godine (ly) ima magnitudu (relativni sjaj)* +2.05*. Ako je smanjenje sjaja za faktor* 100 *po definiciji povećanje magnitude za* +5.0*, odredi:*

— Na kojoj bi udaljenosti magnituda zvijezde bila +6.0*?*

— Koliki bi bio sjaj zvijezde na udaljenosti 32.6 *svjetlosnih godina?*

Rješenje. Apsolutni sjaj zvijezde M izražava se preko udaljenosti u parsecima D i relativnog sjaja m kao $M = m + 5 - 5\log D$. Kako je M jednak za obje udaljenosti, vrijedi

$$m_1 + 5 - 5\log D_1 = m_2 + 5 - 5\log D_2,$$

pa je

$$10^{(m_1-m_2)/5} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Odatle je udaljenost

$$D_2 = D_1/10^{-0.79} = 572.32 \text{ ly}.$$

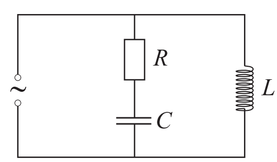
Na udaljenosti 32.6 svjetlosnih godina (10 parseka) prividni sjaj bi bio

$$m_2 = m_1 - 5\log\frac{92.82}{32.6} = -0.22.$$

To je ujedno i apsolutni sjaj ove zvijezde, po definiciji.

Matea Prenc (4), Pula

1515. *Izrazi rezonantnu frekvenciju strujnog kruga na shemi pomoću otpora R, induktiviteta zavojnice L i kapaciteta kondenzatora C.*



Rješenje. Koristeći izraze za kompleksnu impedanciju $X_L = i\omega L$ i $X_C = -\dfrac{i}{\omega C}$, u dvije grane strujnog kruga one su

$$Z_1 = R - \frac{i}{\omega C}, \qquad Z_2 = i\omega L,$$

pa je ukupna jednaka

$$\begin{aligned} Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} &= \frac{i\omega L\left(R - \frac{i}{\omega C}\right)}{R - \frac{i}{\omega C} + i\omega L} \\ &= \frac{\frac{L}{C} + i\omega LR}{R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) i} \\ &= \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} + \frac{\omega LR^2 + \frac{L}{\omega C^2} - \frac{\omega L^2}{C}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} i. \end{aligned}$$

Na rezonantnoj frekvenciji imaginarni dio je nula, dakle

$$\omega_0 LR^2 + \frac{L}{\omega_0 C^2} - \frac{\omega_0 L^2}{C} = 0,$$

pa je rezonantna frekvencija određena izrazom

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC - R^2C^2},$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC - R^2C^2}}.$$

Matea Prenc (4), Pula

1516. *Odredi indeks loma stakla od kojeg je napravljena bikonveksna leća, ako je jedan radijus zakrivljenosti 20% veći, a drugi 5% manji od žarišne daljine.*

Rješenje. Jakost i žarišna daljina leće određeni su izrazom:

$$j = \frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Uvrštavanjem $R_1 = 1.2f$ i $R_2 = 0.95f$ dobijemo

$$n = \frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{1.2f} + \frac{1}{0.95f}} + 1 = 1.53.$$

Josip Jelić (4), Gimnazija Lucija Vranjanina, Zagreb
Matea Prenc (4), Pula

1517. *U nekom trenutku kolica se gibaju uzbrdo po kosini brzinom* 1 m/s. *Nakon zaustavljanja i pokretanja niz kosinu, kolica ponovo prođu isti položaj nakon* 1.6 *sekundi brzinom* 0.6 m/s *(suprotnog smjera). Odredi prevaljeni put, nagib kosine i koeficijent trenja kolica i kosine.*

Rješenje. Kako vrijedi $t_1 + t_2 = 1.6$ s i $v_1 t_1 = v_2 t_2 = 2$ s, slijedi $t_1 = 0.96$ s i $t_2 = 1.6$ s, i prevaljeni put $2s = 0.48$ m. Pri gibanju uzbrdo i nizbrdo ubrzanja su:

$$ma_1 = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha,$$

$$ma_2 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha.$$

Zbrajanjem i uvrštavanjem $a = \frac{v}{t}$ dobijemo:

$$a_1 + a_2 = \frac{v_1}{t_1} + \frac{v_2}{t_2} = 2g\sin\alpha$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$\sin\alpha = 0.0708, \qquad \alpha = 4.0542^\circ.$$

Odatle je

$$\mu = \frac{g\sin\alpha - a_2}{g\cos\alpha} = 0.033.$$

Josip Jelić (4), Zagreb