Heuristika i kumulativna formula za površinu tetivnog poligona

Petar Svirčević[1]

Sažetak. *U ovom članku je napravljeno poopćenje Heronove formule pomoću heurističke metode za opći tetivni poligon. Strogi dokaz te formule se odnosi samo na trokut i tetivni četverokut, te je dokazano da ona općenito ne vrijedi za ostale poligone.*

Prije nego prijeđemo na sama suštinska razmatranja u ovome članku, o čemu govori naslov, moramo dati nekoliko neophodnih objašnjenja. Naime, matematičari (počev od Papusa sve do Polya, a i dalje) su težili, a i danas teže, da stvore potpunu matematičku teoriju, koja će nas naučiti kako ćemo naslućivati matematičke teze, odnosno prije toga kako postavljati pravovaljane hipoteze, a nakon toga ih provjeravati, te ih konačno strogo dokazati nekom od matematičkih metoda, ako je to moguće, odnosno ako to znamo. Tako nastala teorija zove se *heuristika* (grč.; nauka o metodama istraživanja novih spoznaja) ili *ars inveniendi* (lat.; umijeće naslućivanja). Tu ćemo metodu koja proizlazi iz *heuristike* zvati *heuristička metoda*. To bi bilo prvo objašnjenje.

Drugo objašnjenje će se odnositi na dimenzije i jedinice matematičkih planimetrijskih i stereometrijskih veličina. Naime, znamo da duljine: stranica likova, polumjere upisanih ili opisanih kružnica, visina,..; mjerimo s duljinskim jedinicama. Površine likova i oplošja tijela mjerimo s površinskim jedinicama, a volumene tijela s kubnim jedinicama.

Na osnovu iznesenog slijedi da je logično, da se za svaku veličinu a koja predstavlja broj duljinskih jedinica uvede oznaka $[a]_D = L$, i čita se "*dimenzija od a je L*", a to je duljina; dakle ne preciziramo da li se radi o m (metru), cm (centimetru), mm (milimetru),...

Slično ćemo za veličinu P, koja predstavlja broj površinskih jedinica, pisati da joj je dimenzija jednaka L^2; dakle $[P]_D = L^2$, i ovdje se ne precizira, da li se radi o m^2, cm^2, mm^2,...; i konačno za broj volumnih jedinica definiramo da je $[V]_D = L^3$. Jasno je, da je $[\lambda]_D = L^\circ = 1$, gdje je λ neimenovani broj, tj. $\lambda \in \mathbf{R}^+$.

Sve ove definicije možemo objediniti u općoj definiciji, koja glasi

$$[x]_D = L^n; \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \tag{1}$$

Iz (1) slijede *pravila o dimenzioniranju*: sume, produkta i kvocijenta, koja glase;

$$[a \pm b]_D = [a]_D = [b]_D, \qquad [a \cdot b]_D = [a]_D \cdot [b]_D, \qquad \left[\frac{a}{b}\right]_D = \frac{[a]_D}{[b]_D}.$$

Svakako da ta pravila možemo poopćiti, pa dobivamo da je

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]_D = [a_j]_D, \quad j = 1, 2, ..., n; \qquad \left[\prod_{i=1}^{n} a_i\right]_D = \prod_{i=1}^{n} [a_i]_D.$$

Ako u (1) izvršimo specifikaciju, npr. u *SI-sustavu*, onda ćemo to označiti s $[x]_U = m$, gdje m ima značenje *metra*, a indeks U je uzet od engleske riječi *unit (jedinica)*, pa će se sam postupak zvati *junitiranje (jediničarenje)*. Svakako da ćemo junitiranje

[1] Profesor u mirovini na Željezničkoj tehničkoj školi u Zagrebu; e-pošta: `petar.svircevic@zg.t-com.hr`

izvršiti samo u istovrsnim jedinicama (sve u metrima, ili sve u centimetrima,...; odnosno njihovim potencijama).

Sada ćemo formulirati naš problem, i doći do vjerodostojne hipoteze, koju bi onda trebali dokazati.

Hipoteza o površini općeg tetivnog poligona. *Neka je zadan tetivni n-terokut $(n \geqslant 3)$, čiji su vrhovi desno orijentirani i nalaze se u točkama: $A_1, A_2, ..., A_n$. Njegove duljine stranica su $a_i = |A_iA_{i+1}|$; $i = 1, 2, ..., n-1$; $a_n = |A_nA_1|$, te je poluopseg*

$$s_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + ... + a_n). \tag{2}$$

Površina tog poligona dana formulom

$$P_n = \left(\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\right)\sqrt{\frac{n^{n-2}}{(n-2)^n} s_n^{4-n}\left(s_n - a_1\right)\left(s_n - a_2\right) \cdot ... \cdot \left(s_n - a_n\right)}. \tag{3}$$

Napomena. Formulu (3) ćemo zvati *kumulativna formula za površinu tetivnog poligona* ako je $n \in \{3, 4\}$; koju možemo još pisati i u oblicima

$$P_3 = \frac{1}{4}\sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2 - 2\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4\right)},$$

$$P_4 = \frac{1}{4}\sqrt{\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2\right)^2 - 2\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4\right) + 8a_1a_2a_3a_4},$$

u zavisnosti o tome da li se radi o trokutu ili tetivnom četverokutu. Pokazat ćemo da za slučajeve $n > 4$ ta formula općenito ne vrijedi.

Izvod hipoteze. Polazimo najprije od pravilnog *n-terokuta*, čija je površina dana s

$$P_n = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}, \tag{4}$$

gdje je $a_i = a$; $i = 1, 2, ..., n$. Pokušajmo sada naći još koji posebni slučaj. Neka to bude kada poligon degenerira u dužinu; a to znači da mu duljina polumjera opisane kružnice teži u beskonačnost; naime, neka je $a_2 + a_3 + ... + a_n = a_1$, a odatle je, jer smo uvažili (2), $s_n - a_1 = 0$. Zbog tog posebnog slučaja površina poligona $P_n = 0$, pa očekujemo da se u formuli pojavi $s_n - a_1$ kao faktor.

Budući da formula ne zavisi o tome kako smo označili duljine stranica, onda to povlači, da ona sadržava i faktore $s_n - a_2$, $s_n - a_3$,..., $s_n - a_n$, a odatle zaključujemo da naša formula sadrži produkt

$$p_n = \left(s_n - a_1\right)\left(s_n - a_2\right) \cdot ... \cdot \left(s_n - a_n\right). \tag{5}$$

Uvažimo li (1), onda je jasno da je dimenzija od p_n dana s

$$[p_n]_D = L^n, \tag{6}$$

a znamo da mora biti

$$[P_n]_D = L^2. \tag{7}$$

Malo se podsjetimo *Heronove formule* za površinu trokuta

$$P_3 = \sqrt{s_3\left(s_3 - a_1\right)\left(s_3 - a_2\right)\left(s_3 - a_3\right)}, \tag{8}$$

gdje je $s_3 = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_2 + a_3\right)$ i formule za površinu tetivnog četverokuta dane u obliku

$$P_4 = \sqrt{\left(s_4 - a_1\right)\left(s_4 - a_2\right)\left(s_4 - a_3\right)\left(s_4 - a_4\right)}, \tag{9}$$

gdje je $s_4 = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right)$. Formula (8) se lako izvodi na više načina, a formula (9) se može dobiti iz *Brahmaguptine formule* za površinu konveksnog četverokuta, tako da izvršimo specijalizaciju, da je suma mjera protivnih kutova jednaka $180°$, što je nužan i dovoljan uvjet za tetivni četverokut. Evidentno je, da se (8) može dobiti i iz (9), i to tako da trokut shvatimo kao degenerirani četverokut, kada mu je duljina jedne stranice jednaka nuli (npr. $a_4 = 0$).

U formulama (8) i (9) se pojavljuje drugi korijen, pa pretpostavljamo da i naša formula mora biti u obliku

$$P_n = \sqrt{f\,(a_1, a_2, ..., a_n)\, p_n}, \tag{10}$$

gdje je $f\,(a_1, a_2, ..., a_n)$ homogena i simetrična funkcija, ali takva da je

$$[f\,(a_1, a_2, ..., a_n)]_D = L^{4-n},$$

jer tada važi (7). Naslućujemo da je $f\,(a_1, a_2, ..., a_n) = ks_n^{4-n}$, $(k = \text{const.})$ te iz (10) slijedi

$$P_n = \sqrt{ks_n^{4-n} p_n}. \tag{11}$$

Dakle, u (11) trebamo još odrediti konstantu k. Da bi nju dobili napravimo specijalizaciju $a = a_1 = a_2 = ... = a_n$, prema tome radi se o pravilnom n*-terokutu*, kod kojega je

$$s_n = \frac{1}{2} na, \tag{12}$$

$$p_n = \frac{(n-2)^n}{2^n} a^n, \tag{13}$$

dakle vrijedi (4). Ako (12), (13) i (4) supstituiramo u (11) dobivamo da je $\frac{na^2}{4} ctg \frac{180°}{n} = \sqrt{k \left(\frac{1}{2} na\right)^{4-n} \frac{(n-2)^n}{2^n} a^n}$, a odatle je $k = \text{ctg}\, \frac{180°}{n} \sqrt{\frac{n^{n-2}}{(n-2)^n}}$, pa (11) poprima oblik (3), jer smo uvažili (5). Prema tome došli smo do vjerodostojne *Hipoteze o površini općeg tetivnog poligona.* Pokazat ćemo da ona općenito ne vrijedi.

Sada ćemo najprije dati dvije posljedice dane hipoteze.

Posljedica 1. Ako je $n = 3$, tada iz (3) slijedi *Heronova formula* (8).

Rješenje. Supstituiramo li $n = 3$ u (3) $\Longrightarrow$ (8), jer smo uvažili da je $\text{ctg}\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

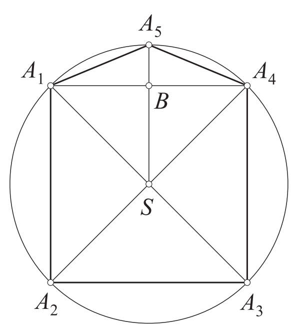
Posljedica 2. Ako je $n = 4$, tada iz (3) slijedi formula za površinu tetivnog četverokuta (9).

Rješenje. Uvrstimo li $n = 4$ u (3) $\Longrightarrow$ (9), jer smo uvažili da je $\text{ctg}\, 45° = 1$.

Posljedica 3. Ako je $n = 5$, tada iz (3) slijedi

$$P_5 = (\text{ctg}\, 36°) \sqrt{\frac{5^3}{3^5} s_5^{-1} (s_5 - a_1)(s_5 - a_2)(s_5 - a_3)(s_5 - a_4)(s_5 - a_5)}. \tag{14}$$

Treba pokazati da ova formula općenito nije točna za opći tetivni peterokut, no u nekim slučajevima dobra je aproksimacija.



Dokaz. Tu formulu ne znamo izvesti, ali ćemo je provjeriti za tetivni peterokut $A_1 ... A_5$ koji je prikazan na slici, gdje je

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \qquad a_4 = a_5, \tag{15}$$

a četverokut $A_1A_2A_3A_4$ je kvadrat. Nađimo a_4. Iz slike se vidi $|A_1S| = |A_5S| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dalje dobivamo $a_4 = |A_4A_5| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}$ ili

$$a_4 = a_5 = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2} = 0.5411961. \tag{16}$$

Iz (15) i (16) dobivamo

$$s_5 = \frac{3 + 2 \cdot 0.5411961}{2} = 2.0411961. \tag{17}$$

Supstituiramo li (15), (16) i (17) u (14) slijedi

$$P_5 = 1.10113. \tag{18}$$

Na drugi način dobijemo P_5 direktno iz slike 1, dakle potpuno točan ili približan; ako izvršimo korjenovanje; rezultat ovom metodom je

$$P_5 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \frac{3 + \sqrt{2}}{4} = 1.1035534. \tag{19}$$

Vidimo de se rezultati (18) i (19) razlikuju za 0.002423...(relativna greška je oko 0.2%) a to i nije čudo jer smo koristili formulu (14) gdje je realizirano 17 viših operacija, koje su vjerojatno napravile navedenu grešku, pa bi i dalje mogli vjerovati da je upotrebljena formula možda potpuno točna, jer je nismo strogo dokazali. Sada ćemo jednom strožom analizom to negirati.

Baveći se *zlatnim rezom* i *konstrukcijom pravilnog peterokuta* dolazi se do relacije $\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, i odatle do

$$\operatorname{ctg} 36^\circ = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}}. \tag{20}$$

Ako sada vrijednosti $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = a_5 = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{2}$, $P_5 = \frac{3 + \sqrt{2}}{4}$ i (20) supstituiramo u (14) vidimo da formula nije točna, jer lijeva strana te jednakosti ne sadrži $\sqrt{5}$, a desna ga sadrži (postoji barem jedna kontradikcija), dakle formula (14) samo približno daje površinu.

Dokaz da hipoteza ne vrijedi za $n > 5$. Znamo, da je implikacija istinita ako iz istine slijedi istina. Nadalje, neistina je da iz istine slijedi neistina, i istina je da iz neistine može slijediti i istina ili neistina.

Prijeđimo na analizu formule (3). Dokazali smo da je ona neistinita za $n = 5$. Pretpostavimo da (3) vrijedi za $n = 6$. No, poligon za $n = 6$ može degenerirati tako da duljina jedne stranice bude jednaka nula, a to znači da bi (3) trebala vrijediti i za $n = 5$, što nije istina. I na osnovu ovih razmatranja možemo matematičkom indukcijom pokazati da (3) ne vrijedi za $n > 5$.

Literatura

[1] BORIS PAVKOVIĆ, *Metoda posebnih slučajeva*, HMD, Zbornik radova, Šesti susret nastavnika matematike; Zagreb, 3. – 5. srpnja 2002.

[2] BORIS PAVKOVIĆ, BRANIMIR DAKIĆ, ŽELJKO HANJŠ, PETAR MLADINIĆ, *Male teme iz matematike*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb 1994.

[3] PETAR SVIRČEVIĆ, *Heuristika i višedimenzionalni tetraedar*, OML, Osijek 2006.