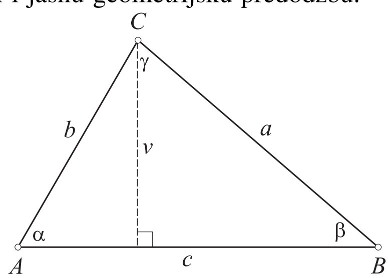
Poučci o trokutu i veza između sinusa i kosinusa

Marko Obradović[1], *Mirko Radić*[2]

Osnovni elementi trokuta su njegovi kutovi i stranice. Jedna od veza između stranica i kutova u trokutu iskazana je poučkom o sinusima i poučkom o kosinusu. Što je s njihovom povezanošću? Matematičare je to zanimalo još od davnine. Naime, "riješiti trokut" znači iz zadanih podataka odrediti njegove nepoznate elemente. Odavde je iznimna važnost navedenih poučaka.

Nacrtajmo bilo koji trokut ABC i označimo njegove elemente kao na slici. Svakako je uz izvode korisno imati i jasnu geometrijsku predodžbu.



Koristit ćemo sljedeće standardne oznake: a, b, c – duljine stranica trokuta; α, β, γ – njegovi odgovarajući kutovi; R – polumjer opisane mu kružnice; P – njegova površina.

Još iz osnovne škole znamo da je trokut zadan svojim elementima i to:

(a) jedna stranica i dva kuta;

(b) dvije stranice i kut nasuprot većoj od njih;

(c) dvije stranice i kut među njima;

(d) tri stranice.

U slučajevima (a) i (b) koristimo poučak o sinusima, a u slučajevima (c) i (d) kosinusov poučak. Koristit ćemo poznate identitete:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi,$$

(1°) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$,

(2°) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.

Promatrat ćemo vezu između poučaka (1) i (2).

Poučak o sinusima

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R} = K. \tag{1}$$

Poučak o kosinusu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \tag{2}$$

Cikličkom zamjenom dobivamo još dvije pridružene formule.

---

[1] Profesor matematike u srednjoj školi "Marko Marulić" u Slatini

[2] Profesor emeritus na Filozofskom fakultetu u Rijeci; e-pošta: `mradic@ffri.hr`

Razmotrimo sada vezu između tih poučaka. Pokažimo najprije kako iz (1) dobivamo (2).

Iz (1) imamo: $\dfrac{\sin\alpha}{a} = K$ tj. $aK = \sin\alpha$, odnosno, $bK = \sin\beta$, $cK = \sin\gamma$.

Kvadriranjem dobivamo

$$K^2a^2 = \sin^2\alpha = \sin^2(\beta+\gamma),$$

jer je $\sin(\beta+\gamma) = \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$. Upotrebom teorema (1°) za sinus dobivamo:

$$\begin{aligned}
K^2a^2 &= (\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)^2 \\
&= \sin^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\beta\sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma \\
&= \sin^2\beta(1-\sin^2\gamma) + (1-\sin^2\beta)\sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma \\
&= \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma(\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma) \\
&= K^2(b^2+c^2) - 2K^2bc\,(-\cos(\beta+\gamma)) \\
&= K^2(b^2+c^2 - 2bc\cos\,(\pi-(\beta+\gamma))) \\
&= K^2\left(b^2+c^2-2bc\cos\alpha\right).
\end{aligned}$$

Kako je $K \neq 0$, dobivamo poučak (2) o kosinusu.

Cikličkom zamjenom imamo i njoj srodne dvije formule.

Pokažimo da vrijedi i obrat. Neka vrijedi (2), odnosno, i ciklički srodna formula

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta. \tag{3}$$

Iz $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ dobivamo

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos^2\beta} = \frac{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}{1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2} = \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2} = \ldots = \frac{a^2}{b^2},$$

odakle je $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b}$, što smo i trebali pokazati. Analogno slijedi $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$, a to je *poučak o sinusima* (1).

Primjer. Duljine dviju stranica u trokutu ABC iznose 5 cm i 8 cm, a kut nasuprot jedne od ovih dviju je dva puta je manji od kuta nasuprot druge. Kolika je duljina treće stranice?

Ne smanjujući općenitost možemo uzeti da je $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, te $\beta = 2\alpha$. Iz poučka o sinusima (1) imamo $a : b = \sin\alpha : 2\sin\alpha\cos\alpha$. Odnosno, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. Iz $\beta = 2\alpha$, imamo $\sin\beta = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{24}{25}$, $\cos\beta = \dfrac{7}{25}$. Zatim,

$$\cos\gamma = \cos(\pi-(\alpha+\beta)) = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{44}{125}.$$

Konačno je $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = \left(\dfrac{39}{5}\right)^2$, odakle je $c = 7.8$ cm.

Neke crtice iz prošlosti

Matematika se tokom svoje povijesti nije mogla odvojiti od astronomije. Prva trigonometrijska računanja javljaju se vrlo rano, još u starom Babilonu i Egiptu, i to u astronomiji

Začetnici trigonometrije su Grci u 3. st. pr. Krista. Prve tablice nalik onima za *sinus* funkciju sastavili su Indi u 5. st. pr. Krista.

Kroz povijest matematičari su na razne načine pokušavali naći vezu poučaka (1) i (2). Poučak o sinusima opisao je Abual-Wafa (940. – 998.).

F. Viète (1540. – 1603.) je izveo poučak o kosinusu u današnjem obliku. Povezao je trigonometriju s algebrom. Matematičari koji su pridonijeli procvatu trigonometrije bili su: J. Napier, L. Euler, K. F. Gauss, R. Bošković,...

Zadaci (za vježbu)

1. Odredi nepoznate elemente u trokutu, ako je zadano: $a = 42$ cm, $b = 37.1$ cm, kut $\gamma = 67^\circ 19'$.

2. Ako je zbroj duljina dviju stranica trokuta $a + b = 85$ cm, duljina polumjera trokutu upisane kružnice 9.6 cm, te $\gamma = 46^\circ 12'$, odredi površinu tog trokuta.

3. Odredi nepoznate stranice trokuta ako je $a : b = 12 : 7$, $c = 3$ cm i $\alpha = 2\gamma$.

4. Duljine stranica trokuta tri su uzastopna cijela broja, a najveći je kut trokuta dvostruko veći od najmanjeg. Kolike su duljine stranica i kutovi trokuta?

Upute.

1. Imamo: $c = 44.03$ cm, $\alpha = 61^\circ 39'$, $\beta = 51^\circ 2'$.

2. Iz $x = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{85-c}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{x}$, imamo $c = 39.9262$ cm, $P = 599.9339\ \text{cm}^2$.

3. Dobivamo: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin 2\gamma}{\sin\gamma} = 2\cos\gamma$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, odakle je $28a^3 - 193a^2 + 1296 = 0$. Jedno rješenje je $a_1 = 4$, $28a^3 - 193a^2 + 1296 = 28(a-4)\left(a - \dfrac{36}{7}\right)\left(a + \dfrac{9}{4}\right)$, pa postoji još jedno pozitivno rješenje $a_2 = \dfrac{36}{7}$. Odgovarajuće stranice su $b_1 = \dfrac{7}{3}$, $b_2 = 3$.

4. Duljine stranica trokuta su 4, 5 i 6, a kutovi $\alpha = 41^\circ 24' 35''$, $\beta = 55^\circ 46' 16''$ i $\gamma = 82^\circ 49' 9''$.

Literatura

[1] N. Elezović, Ž. Hanjš, S. Varošanec, *Matematičko natjecanje 3*, 1999.

[2] V. Mićić i dr., *Matematika za 3. r. srednjih škola*, Novi Sad, 2000.

[3] M. Valčić, *Trigonometrija (odabrani zadaci)*, Element d.o.o., Zagreb 2000.