Kaži mi kaži, koliko je sati?

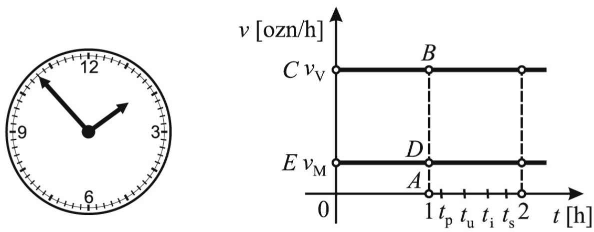
Ljiljana Sudar[1]

Iako živimo u eri digitalnih tehnologija, zadaci sa satovima s kazaljkama su "česti gosti" na matematičkim natjecanjima. Uglavnom su to zadaci sa satovima koji žure ili kasne ili sa satovima čije kazaljke zatvaraju određeni kut. U ovom članku će biti izloženo kako se ti zadaci mogu lako i elegantno rješavati primjenom geometrijsko-fizičke metode.

Takav način rješavanja ne zahtijeva za dano kretanje poznavanje eksplicitne ovisnosti brzine i prijeđenog puta od vremena, već se postupak bazira na: grafu koji daje ovisnost brzine od vremena i na geometriji. Detaljnije o metodi možete pročitati u članku "Geometrija i problemi kretanja" objavljenom u MFL-u br. 2/ 234 iz 2008./ 09. god. [1].

Što se tiče satova s kazaljkama, oni se također mogu rješavati primjenom ove geometrijsko-fizičke metode, imajući u vidu neke njihove specifičnosti [2].

U zadacima ovog tipa se za mjerenje vremena koristi sat s kazaljkama, kao na slici 1a. Sat, pored kazaljki, ima kružnicu s podjelom i brojevima. Kružnica je skalom podijeljena na 60 jednakih dijelova. Dijelovi kružnice označavaju minute, pa ćemo ih u zadacima nazivati *minutne oznake*, ili kraće *ozn*. Brojevi, od 1 do 12, označavaju sate. To znači da se između svaka dva susjedna broja nalazi pet minutnih oznaka (jer je $60 : 12 = 5$).



a) *b)*

Slika 1

Kako znamo koliko je sati? To znamo po *položaju kazaljki*, točnije po *položaju projekcija kazaljki* na kružnicu s minutnim oznakama (projekcija kazaljke se nalazi na presjeku pravca kazaljke i kružnice s minutnim oznakama). Broj minutnih oznaka na luku između broja 12 i projekcije velike kazaljke (točka V na crtežima sata) je broj *minuta*, a najveći broj (od 1 do 12) koji je "prešla" projekcija male kazaljke (točka M na crtežima sata), do trenutka kad mjerimo vrijeme satom, predstavlja *sate*. Kada sat pokazuje "pun sat" velika kazaljka (njena projekcija V) je na broju 12, dok je mala kazaljka (njena projekcija M) na nekom od brojeva od 1 do 12.

Dok velika kazaljka za jedan sat opiše kut od 360°, njena projekcija, V, "prebriše" svih 60 minutnih oznaka, pa je (obodna) brzina projekcije

$$v_V = \frac{60\,\text{ozn}}{1\,\text{h}} = 60\,\frac{\text{ozn}}{\text{h}}. \tag{1}$$

[1] Profesorica fizike u Leskovcu.

Dok mala kazaljka za 12 sati opiše kut od 360°, njena projekcija, M, "prebriše" svih 60 minutnih oznaka, pa je (obodna) brzina projekcije

$$v_M = \frac{60\,\mathrm{ozn}}{12\,\mathrm{h}} = 5\ \frac{\mathrm{ozn}}{\mathrm{h}}. \tag{2}$$

U zadacima ćemo brzine v_V i v_M zvati: *obodna brzina velike* i *obodna brzina male kazaljke*, redom.

Obodne brzine se mogu izraziti i po jednom danu tj. $\frac{\mathrm{ozn}}{\mathrm{dan}}$, ili po sekundi tj. $\frac{\mathrm{ozn}}{\mathrm{s}}$, zavisno od jedinica na t-osi. Jedino je važno da jedinice za vrijeme na obje koordinatne osi budu "usklađene" (ozn/ h – h, ozn/ dan – dan i sl.), jer se u tom slučaju, kod uspostavljanja veza između fizičkih veličina pomoću grafa, ne mora voditi računa o jedinicama fizičkih veličina, već samo o njihovim brojevnim vrijednostima. Na taj se način dobivaju preglednije formule.

Kako dan ima 24 sata tj. 1 dan = 24 h, obodne brzine velike i male kazaljke su, redom:

$$v_V = \frac{60\,\mathrm{ozn}}{1\,\mathrm{h}} = 60\ \frac{\mathrm{ozn}}{\frac{\mathrm{dan}}{24}} = 1440\ \frac{\mathrm{ozn}}{\mathrm{dan}} \quad \text{i} \quad v_M = 5\ \frac{\mathrm{ozn}}{\mathrm{h}} = 5\ \frac{\mathrm{ozn}}{\frac{\mathrm{dan}}{24}} = 120\ \frac{\mathrm{ozn}}{\mathrm{dan}}. \tag{3}$$

U svim narednim zadacima će se ove obodne brzine smatrati poznatima.

Geometrijsko-fizička metoda zahtijeva da se stalno ima u vidu: ([2])

1) površina ispod grafa brzine v-t dijagrama je prijeđeni put tijela;
2) nagib tangente na graf brzine u v-t dijagramu određen je ubrzanjem tijela koje se kreće.

Kako se kod sata obodne brzine velike i male kazaljke tokom vremena ne mijenjaju, ovisnosti tih brzina od vremena su pravci paralelni t-osi.

Na slici 1b dane su ovisnosti obodne brzine velike i male kazaljke o vremenu. Nulti trenutak vremena na t-osi je ponoć.

Dužina luka, koji prijeđe projekcija kazaljke, kraće se naziva *prijeđeni put kazaljke* i uvijek je u *minutnim oznakama* (*ozn*). Prijeđeni put kazaljke je *površina ispod grafa brzine* za određeni interval vremena. Izračunato vrijeme je u odgovarajućoj jedinici za vrijeme koja je stavljena na t-os, a izračunata vrijednost brzine u onoj jedinici koja je stavljena na v-os.

Za jedan sat velika kazaljka sata prijeđe put s_V jednak površini P_{OABC} pravokutnika osnovice $\overline{OA} = 1$ i visine $\overline{OC} = v_V$ tj. $s_V = P_{OABC} = 1 \cdot v_V$.

Za jedan sat mala kazaljka prijeđe put s_M jednak površini P_{OADE} pravokutnika osnovice $\overline{OA} = 1$ i visine $\overline{OE} = v_M$ tj. $s_M = P_{OADE} = 1 \cdot v_M$.

Iz (1) i (2) je očigledno $v_M = \frac{v_V}{12}$, pa će mala kazaljka, u jednakom vremenskom intervalu, prijeći put s_M koji je dvanaest puta manji od prijeđenog puta s_V velike kazaljke tj.

$$s_M = \frac{s_V}{12} \tag{4}$$

Tijekom kretanja, kazaljke se u nekom trenutku t_p *poklapaju*. Kažemo da se kazaljke poklapaju kada je kut između kazaljki 0°.

Zatim se velika kazaljka "udaljava" od male dok se kut između male i velike kazaljke, gledano u smjeru kretanja kazaljki, povećava od 0° do 180°, dok se duljina odgovarajućeg luka $\overset{\frown}{MV}$ pritom povećava od nule do 30 minutnih oznaka. t_u je trenutak u kojem velika kazaljka, tokom "udaljavanja" od male, zatvara s njom *pravi kut* $(90°)$. Tada je na luku $\overset{\frown}{MV}$, koji odgovara pravom kutu, 15 minutnih oznaka.

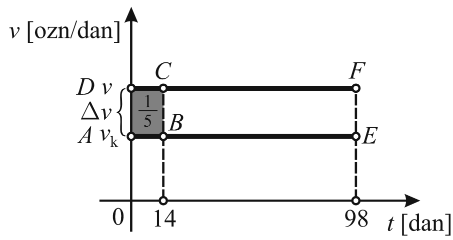
Nakon *ispruženog kuta* $(180°)$ između kazaljki u trenutku t_i, velika kazaljka se "približava" maloj, tj. "sustiže" ju. Tada se kut između velike i male kazaljke, gledano u smjeru kretanja kazaljki, smanjuje od $180°$ do $0°$, dok se duljina odgovarajućeg luka $\overset{\frown}{MV}$ pri tome smanjuje od 30 minutnih oznaka do nule. t_s je trenutak vremena kada velika kazaljka, tokom "sustizanja" male, zatvori s malom kazaljkom *pravi kut* $(90°)$. Tada je na luku $\overset{\frown}{MV}$, koji odgovara pravom kutu, 15 minutnih oznaka.

Točkama V i M *jednoznačno su određeni položaji velike i male kazaljke.*

Zadaci sa satovima koji žure ili kasne

Primjer 1. (*Županijsko natjecanje učenika osnovnih škola Hrvatske 1994., V. razred, 1. zadatak*). Jedan sat zaostaje 12 sekundi u 14 dana. Koliko će sati pokazivati taj sat 9. travnja 1994. godine u 10 sati ako je namješten na točno vrijeme 1. siječnja 1994. godine u 10 sati?

Rješenje. Minuta ima 60 sekundi, pa je $12\,\text{s} = 12 \cdot \dfrac{1}{60}\,\text{min} = \dfrac{1}{5}\,\text{min}$. Da sat zaostaje tj. kasni $12\,\text{s} = \dfrac{1}{5}\,\text{min}$ za 14 dana znači da će velika kazaljka za 14 dana prijeći put za $\dfrac{1}{5}$ ozn manji nego što bi prešla u slučaju da sat ide točno.



Slika 2

Na slici 2 je dana ovisnost obodne brzine velike kazaljke sata o vremenu kada radi točno (v) i kada kasni (v_k). Nulti trenutak na t-osi je 1. siječanj 1994. godine u 10 h, kada je sat "namješten".

Od 1. siječnja u 10 h do 31. siječnja u 10 h prođe 30 dana. Od 31. siječnja u 10 h do 28. veljače u 10 h prođe 28 dana. Od 28. veljače u 10 h do 31. ožujka u 10 h prođe 31 dan. Od 31. ožujka u 10 h do 9. travnja u 10 h, iste godine, prođe 9 dana. Dakle, od 1. siječnja u 10 h do 9. travnja u 10 h, iste godine, prođe $30 + 28 + 31 + 9 = 98$ dana (1994. nije prestupna godina).

Na t-osi je s 98 označen trenutak kada se navršava 98 dana od 1. siječnja 1994. u 10 h, a to je 9. travnja 1994. u 10 h.

Koliko će nakon 98 dana sat kasniti?

Na slici 2 kašnjenju od $12\,\text{s} = \dfrac{1}{5}\,\text{min}$ za 14 dana odgovara osjenčana površina P_{ABCD} pravokutnika (osnovice $\overline{AB} = 14$ i visine $\overline{AD} = v - v_k = \Delta v$) od $\dfrac{1}{5}$ ozn tj.

$$\frac{1}{5} = P_{ABCD} = 14 \cdot \Delta v \implies \Delta v = \frac{1}{70} \quad \left(\frac{\text{ozn}}{\text{dan}}\right). \tag{5}$$

Ukupno kašnjenje za 98 dana je površina P_{AEFD} pravokutnika (osnovice $\overline{AE} = 98$ i visine Δv) pa je, imajući u vidu (5),

$$P_{AEFD} = 98 \cdot \Delta v = 98 \cdot \frac{1}{70} = 1\frac{28}{70} = 1\frac{2}{5} \text{ (ozn)}.$$

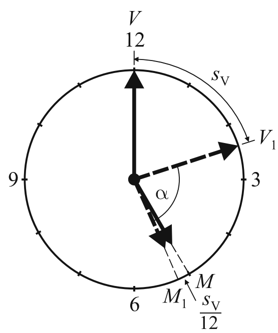
Koliko je manje (minutnih) oznaka prijeđeno za 98 dana, toliko će manje minuta od 10 h pokazivati sat.

Zato je do 9. travnja 1994. u 10 h ukupno kašnjenje $1\frac{2}{5}$ min $= 1$ min 24 s, pa će sat 9. travnja 1994. u 10 h pokazivati $10\,\text{h} - 1$ min $24\,\text{s} = 9\,\text{h}\ 58\,\text{min}\ 36\,\text{s}$.

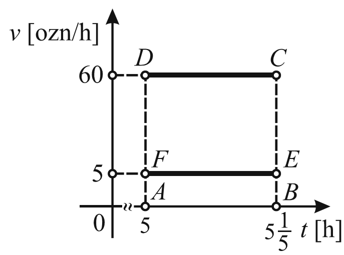
Zadaci sa satovima čije se kazaljke poklapaju ili zatvaraju određeni kut

Primjer 2. (*Općinsko/školsko natjecanje učenika osnovnih škola Hrvatske 2007., VI. razred, 3. zadatak*). Koliki kut zatvaraju mala i velika kazaljka na satu u 5 sati i 12 minuta?

Rješenje. Na slici 3 punim strelicama prikazan je položaj kazaljki u 5 h. V i M označavaju redom projekcije velike i male kazaljke u 5 h, a V_1 i M_1 u 5 sati i 12 minuta, kada kazaljke zatvaraju kut α koji treba odrediti.



Slika 3



Slika 4

Sat ima 60 minuta, pa je $12 \text{ min} = 12 \cdot \frac{1}{60}\text{h} = \frac{1}{5}\text{h}$.

Na luku $\overset{\frown}{VM}$ je 25 minutnih oznaka, tj.

$$\overset{\frown}{VM} = 25 \text{ (ozn)} \tag{6}$$

Do $5\frac{1}{5}$ h velika kazaljka prijeđe put

$$s_V = \overset{\frown}{VV_1} \tag{7}$$

a mala kazaljka

$$s_M = \overset{\frown}{MM_1} = \frac{s_V}{12}. \tag{8}$$

Sa slike 3 se vidi da kutu α odgovara luk

$$\overset{\frown}{V_1M_1} = \overset{\frown}{V_1M} + \overset{\frown}{MM_1}. \tag{9}$$

Također je, imajući u vidu (6) i (7)

$$\overset{\frown}{V_1M} = \overset{\frown}{VM} - \overset{\frown}{VV_1} = 25 - s_V. \tag{10}$$

Zamjena (10) i (8) u (9) daje:

$$\overset{\frown}{V_1M_1} = 25 - s_V + \frac{s_V}{12} = 25 - \frac{11}{12} \cdot s_V. \qquad (11)$$

Na slici 4 dane su vremenske ovisnosti obodnih brzina velike i male kazaljke. Nulti trenutak vremena na t-osi je ponoć, a $5\frac{1}{5}$ h je trenutak vremena kada kazaljke zatvaraju kut α. Prijeđeni put s_V velike kazaljke je površina P_{ABCD} pravokutnika (osnovice $\overline{AB} = 5\frac{1}{5} - 5 = \frac{1}{5}$ i visine $\overline{AD} = 60$) tj.

$$s_V = P_{ABCD} = \frac{1}{5} \cdot 60 = 12 \text{ (ozn).} \qquad (12)$$

Zamjena (12) u (11) daje duljinu luka $\overset{\frown}{V_1M_1}$ u oznakama tj.

$$\overset{\frown}{V_1M_1} = 25 - \frac{11}{12} \cdot 12 = 14 \text{ (ozn).}$$

S obzirom da je kružnica s minutnim oznakama podijeljena na 60 jednakih dijelova, jednoj minutnoj oznaci odgovara kut od $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$, a luku $\overset{\frown}{V_1M_1}$ kut $\alpha = 14 \cdot 6^\circ = 84^\circ$.

Dakle, u 5 sati i 12 minuta kazaljke zatvaraju kut $\alpha = 84^\circ$.

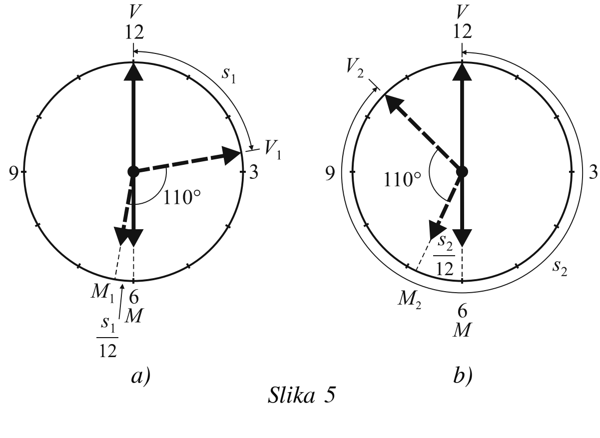
Primjer 3. (*X. državni susret mladih matematičara Hrvatske, 2001., VII. razred, 3. zadatak*). Ivana je izašla iz kuće nekoliko minuta nakon 18 sati. U trenutku izlaska pogledala je na svoj ručni sat i zapazila da kazaljke na njemu zatvaraju kut od 110°. Kući se vratila nešto prije 19 sati istog dana, iznenadivši se kad je na ulasku u kuću vidjela da kazaljke na satu opet zatvaraju kut od 110°. Koliko je minuta Ivana bila odsutna od kuće, ukoliko je poznato da je njen sat točan?

Rješenje. S obzirom na uvjete zadatka, potrebno je odrediti:

a) t_1, trenutak izlaska Ivane iz kuće nekoliko minuta nakon 18 sati kada kazaljke zatvaraju kut od 110°,

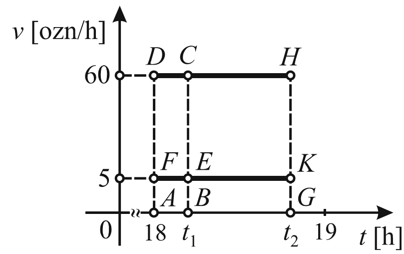
b) t_2, trenutak kada se Ivana vratila kući nešto prije 19 sati, istog dana kada su kazaljke ponovo zatvarale kut od 110°.

a) Na slici 5a punim strelicama prikazan je položaj kazaljki u 18 h. V i M označavaju redom projekcije velike i male kazaljke u 18 h, a V_1 i M_1 u trenutku t_1 kada kazaljke zatvaraju kut od 110°. Isprekidane crne strelice prikazuju pretpostavljeni položaj kazaljki u trenutku t_1.



Slika 5

Na slici 6 dane su vremenske ovisnosti obodnih brzina velike i male kazaljke. Nulti trenutak vremena na t-osi je ponoć, t_1 je trenutak kada kazaljke, nekoliko minuta poslije 18 h, zatvaraju kut od 110°, t_2 je trenutak, nešto prije 19 h istog dana, kada kazaljke ponovo zatvaraju kut od 110°. S obzirom da je kružnica s minutnim oznakama podijeljena na 60 jednakih dijelova, jednoj minutnoj oznaci odgovara kut od $\dfrac{360^\circ}{60} = 6^\circ$, pa kutu od 110° na slici 5 odgovara luk



Slika 6

$$\overset{\frown}{V_1M_1} = \overset{\frown}{M_2V_2} = 110 \cdot \frac{1}{6} = \frac{55}{3}\ \text{(ozn)}. \tag{13}$$

Prijeđeni put velike kazaljke od 18 h do trenutka t_1 je

$$s_1 = \overset{\frown}{VV_1} \tag{14}$$

dok je, za isti interval vremena, prijeđeni put male kazaljke

$$\overset{\frown}{MM_1} = \frac{s_1}{12}. \tag{15}$$

Imajući u vidu (14) i da je $\overset{\frown}{VM} = 30$ (ozn) sa slike 5a je:

$$\overset{\frown}{V_1M} = \overset{\frown}{VM} - \overset{\frown}{VV_1} = 30 - s_1. \tag{16}$$

Sa slike 5a je, imajući u vidu (13), (16) i (15):

$$\overset{\frown}{V_1M_1} = \overset{\frown}{V_1M} + \overset{\frown}{MM_1} \implies$$

$$\frac{55}{3} = 30 - s_1 + \frac{s_1}{12} \implies \frac{11}{12} \cdot s_1 = \frac{35}{3} \implies s_1 = \frac{140}{11}. \tag{17}$$

Prijeđeni put s_1 velike kazaljke od 18 h do trenutka t_1 je na slici 6 površina P_{ABCD} pravokutnika (osnovice $\overline{AB} = t_1 - 18$ i visine $\overline{AD} = 60$) tj.

$$s_1 = P_{ABCD} = (t_1 - 18) \cdot 60\ \text{(ozn)}. \tag{18)}$$

Iz (17) i (18) dobiva se t_1:

$$\frac{140}{11} = (t_1 - 18) \cdot 60 \implies t_1 = 18 + \frac{7}{33} = 18\frac{7}{33}\ \text{(h)}. \tag{19}$$

Kako je $\dfrac{7}{33}\text{h} = \dfrac{7}{33} \cdot 60\ \text{min} = 12\dfrac{8}{11}\ \text{min}$, to znači da je Ivana iz kuće izašla u

$$18\,\text{h}\ 12\frac{8}{11}\ \text{min}.$$

b) Na slici 5b punim strelicama prikazan je, također, položaj kazaljki u 18 h. V i M označavaju redom projekcije velike i male kazaljke u 18 h, a V_2 i M_2 u trenutku t_2 kada su kazaljke ponovo zaklopile kut od 110° i Ivana se vratila kući. Isprekidane crne strelice prikazuju pretpostavljeni položaj kazaljki u trenutku t_2.

Prijeđeni put velike kazaljke od 18 h do trenutka t_1 je

$$s_2 = \overset{\frown}{VV_2}, \tag{20}$$

dok je, za isti interval vremena, prijeđeni put male kazaljke

$$\overset{\frown}{MM_2} = \frac{s_2}{12}. \tag{21}$$

Imajući u vidu (13), (20), (21) i $\overset{\frown}{VM} = 30$ (ozn) sa slike 5b je:

$$\overset{\frown}{M_2V_2} = \overset{\frown}{VV_2} - \overset{\frown}{VM} - \overset{\frown}{MM_2} \implies$$

$$\frac{55}{3} + 30 = s_2 - \frac{s_2}{12} \implies \frac{145}{3} = \frac{11}{12} \cdot s_2 \implies s_2 = \frac{145 \cdot 12}{3 \cdot 11}. \tag{22}$$

Prijeđeni put s_2 velike kazaljke od 18 h do trenutka t_2 je na slici 6 površina P_{AGHD} pravokutnika (osnovice $\overline{AG} = t_2 - 18$ i visine $\overline{AD} = 60$) tj.

$$s_2 = P_{AGHD} = (t_2 - 18) \cdot 60 \text{ (ozn)}. \tag{23}$$

Iz (22) i (23) se dobije t_2

$$(t_2 - 18) \cdot 60 = \frac{145 \cdot 12}{3 \cdot 11} \implies t_2 = 18 + \frac{29}{33} = 18\frac{29}{33} \text{ (h)}. \tag{24}$$

Kako je $\frac{29}{33}\text{h} = \frac{29}{33} \cdot 60 \text{ min} = \frac{580}{11} \text{ min} = 52\frac{8}{11} \text{ min}$, to znači da se Ivana vratila kući u $18\,\text{h}\ 52\frac{8}{11}$ min.

Od Ivaninog izlaska iz kuće do njenog povratka prošlo je

$$18\,\text{h}\ 52\frac{8}{11} \text{ min} - 18\,\text{h}\ 12\frac{8}{11} \text{ min} = 40 \text{ min}.$$

Dakle, Ivana je bila odsutna od kuće 40 min.

Iz ova tri primjera može se vidjeti kako se geometrijsko-fizičkom metodom rješavaju problemi satova s kazaljkama. Treba istaći da se ovom grafičkom metodom rješavaju i ostali problemi iz kretanja i to često i efikasnije i elegantnije nego algebarski, kako je to uobičajeno. I dok algebarski način rješavanja problema iz kretanja u fizici (dakle, nivo šestog-sedmog razreda osnovne škole) zahtijeva da se za dano kretanje zna eksplicitna ovisnost brzine i prijeđenog puta od vremena ($s = v \cdot t$, $v = v_0 \pm a \cdot t$, $s = v_0 \cdot t \pm \frac{at^2}{2}$) kao i veza između trenutne brzine, početne brzine, ubrzanja i prijeđenog puta ($v^2 = v_0^2 \pm 2as$), ovom metodom se oni rješavaju grafički, *bez upotrebe ijedne od tih ovisnosti* [1], [2].

Literatura

[1] LJILJANA SUDAR, *Geometrija i problemi kretanja*, MFL 2/ 234, god. LIX, Zagreb 2008./ 2009., str. 95–101.

[2] LJILJANA SUDAR, *Geometrija pomaže fizici – zbirka zadataka iz kretanja sa nestandardnim rešenjima*", I deo, Poglavlje 7, Leskovac 2012. (u pripremi)

[3] *Natjecanja iz matematike u Republici Hrvatskoj* (dostupno na: `http://public.carnet.hr/mat-natj`)