ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2013. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/252.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadaci iz matematike

3339. Uz pretpostavku da je

$$\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\ldots}}}}$$

neki realan broj, odredi njegovu vrijednost.

3340. Dani su realni brojevi a, b takvi da je $a^2 \geq b^2 > a^2 - 1$. Riješi sustav jednadžbi

$$\frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = a,$$

$$\frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}} = b.$$

3341. Nađi zbroj svih rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{x^2-3x+5}+\frac{2}{x^2-3x-1}-\frac{3}{x^2-3x-7}=0.$$

3342. Riješi diofantsku jednadžbu

$$91x-28y=35.$$

3343. Odredi sve proste brojeve p takve da je 2^p+p^2, također prost broj.

3344. Odredi sve pozitivne cijele brojeve n, k_1, $\ldots$, k_n takve da vrijedi

$$k_1+\ldots+k_n=3n-2,$$

$$\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{k_n}=1.$$

3345. Svaka od kružnica $k_i(O_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, dodiruje druge dvije izvana. Odredi polumjer opisane kružnice trokuta $O_1O_2O_3$.

3346. U trokutu ABC je $|AC| > |AB|$, simetrala kuta uz vrh A siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D i E je nožište okomice iz B na $\overline{AD}$. Ako je $|AB| = 5$ i $|BE| = 4$, nađi vrijednost izraza

$$\frac{|AC|+|AB|}{|AC|-|AB|}\cdot|ED|.$$

3347. Dokaži da vrijedi jednakost

$$\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

3348. Pravac siječe asimptote hiperbole $xy = 1$ u točkama A i B, a samu hiperbolu u P i Q. Dokaži da je $|AP| = |BQ|$.

3349. Unutar kvadrata stranice duljine 1 nalazi se nekoliko kružnica čiji je zbroj opsega jednak 10. Dokaži da postoji pravac koji siječe barem četiri od ovih kružnica.

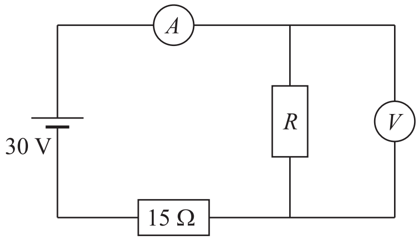
3350. Točka M je vrh piramide kojoj je baza paralelogram $ABCD$. Na strani MBC pravac EF je paralelan s BC i siječe MB i MC u E i F. Pokaži da je geometrijsko mjesto sjecišta pravaca AE i DF, pravac paralelan s bazom piramide.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 350. Učenik je pokosio komad tratine koja pokriva nogometno igralište. Na komadu oblika kvadrata stranice 5 cm učenik je izbrojio 64 vlati trave. Koliko vlati ima na cijelom igralištu ako mu je duljina 100 metara, a širina 65 metara?

OŠ – 351. Felix Baumgartner je nedavno oborio rekord u najvišem skoku s padobranom skočivši s visine od 39 kilometara. Prije 8 godina on je skočio u velebitsku jamu Mamet duboku 190 metara. Skok je ukupno trajao 10 sekundi, a padobran je otvorio nakon 140 metara slobodnog pada. Kolika je bila njegova prosječna vertikalna brzina tijekom pada? Ako pretpostavimo da je u tlo udario brzinom od 20 km na sat, kolika je bila prosječna akceleracija kojom je usporavao nakon otvaranja padobrana?

OŠ – 352. Ampermetar na slici pokazuje 1.5 ampera. Koliku vrijednost pokazuje voltmetar na slici? Koliki je nepoznati otpor?

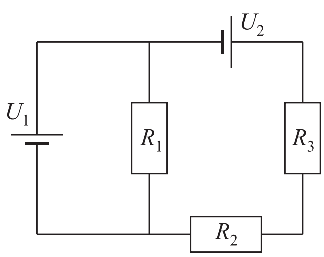


OŠ – 353. Kad normalno radi ljudsko srce kuca brzinom od oko 80 otkucaja u minuti. Srednja snaga mu je oko 2.5 W (vata). Koliko se energije potroši na jedan otkucaj? Na koju bi se visinu mogao podići teret mase 100 kilograma kad bismo energiju koju srce potroši u jednom danu upotrijebili za to dizanje?

1518. Fizičko njihalo sastoji se od štapa mase 1.2 kg duljine 63.9 cm i male kuglice mase 1 kg učvršćene na jednom kraju štapa. Odredi period njihanja oko drugog kraja štapa (za male oscilacije).

1519. Oko planeta mase 10^{24} kg kruži satelit brzinom 2.2 km/s. Odredi radijus putanje i ophodno vrijeme satelita.

1520. Odredi struju kroz otpornik R_2 i napon na otporniku R_2 na shemi. $U_1 = 5$ V, $U_2 = 10$ V, $R_1 = 13\,\Omega$, $R_2 = 7\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$.



1521. Na nekoj udaljenosti od točkastog izotropnog izvora svjetlosti izmjerimo osvijetljenost od 0.8 W/m^2 okomito na smjer svjetlosti. Ako mjerač približimo izvoru za 1 metar, pokazivat će 3.4 W/m^2. Izračunaj ukupnu snagu izvora i udaljenost mjerača od izvora u oba slučaja.

1522. Crno tijelo temperature T_0 zagrijemo za 10 °C. Pri tom snaga zračenja poraste za 2%. Odredi T_0 i pripadajuću valnu duljinu maksimuma intenziteta zračenja.

1523. Tri naboja dovedena su u vrhove jednakostraničnog trokuta stranice 3 cm. Naboji su +300 nC, +450 nC i +500 nC. Odredi njihovu elektrostatičku energiju, tj. rad koji smo uložili da bi ih iz beskonačnosti doveli u vrhove trokuta.

1524. S vrha tornja visine h pustimo kamen da pada bez početne brzine. Istodobno iz podnožja bacimo vertikalno uvis drugi kamen brzinom 20 m/s. Dva kamena prođu jedan pored drugog na polovici visine tornja. Odredi visinu tornja i vrijeme proteklo od početka gibanja do susreta kamena.

C) Rješenja iz matematike

3317. *Nađi najveći cijeli broj n takav da su $n + 496$ i $n + 224$ potpuni kvadrati.*

Prvo rješenje. Neka je

$$n + 496 = x^2,$$
$$n + 224 = y^2.$$

Tada je

$$x^2 - y^2 = 272, \quad n \in \mathbf{Z}$$
$$(x + y)(x - y) = 272, \quad x,\ y \in \mathbf{N}.$$

Budući da broj n mora biti što veći, slijedi da i brojevi x i y moraju biti što veći, a dakako i njihov zbroj $x + y$, pa razlika $x - y$ mora biti što manja.

Zbroj $(x+y)+(x-y) = 2x$ je paran, pa su parni i brojevi $x + y$ i $x - y$. Najmanji parni prirodni broj je 2, pa je $x - y = 2$.

Nadalje,

$$x + y = 272 : 2 = 136,$$
$$x + y + x - y = 2x = 138,$$
$$x = 69, \quad x^2 = 4761,$$
$$n = x^2 - 496 = 4265.$$

Petar Orlić (1),
XV. gimnazija, Zagreb

Drugo rješenje. Neka je $N + 496 = a^2$, $N + 224 = b^2$ za neke pozitivne cjelobrojne a i b. Tada je

$$a^2 - b^2 = 496 - 224 = 272 = 2^4 \cdot 17.$$

Dakle, $17 \mid (a - b)(a + b)$. Ako $17 \mid a - b$ tada je $a + b \leqslant 16$, što nije moguće. Dakle, $17 \mid a + b$.

Imamo pet mogućnosti za $(a+b, a-b)$:
$(17,16)$, $(38,8)$, $(68,4)$, $(136,2)$, $(272,1)$.
Određujući samo cjelobrojna rješenja dobivamo $(a,b)=(21,13)$, $(36,32)$, $(69,67)$.

Najveći broj N je

$$69^2-496=4265=67^2-224.$$

Ur.

3318. *Dana su tri realna broja x, y, z takva da je*

$$\frac{x-y}{2+xy}+\frac{y-z}{2+yz}+\frac{z-x}{2+zx}=0.$$

Dokaži da su barem dva od ta tri broja međusobno jednaka.

Rješenje. Riješimo se nazivnika i cijelu jednadžbu pomnožimo s

$$(2+xy)(2+yz)(2+zx).$$

Tada imamo

$$(x-y)(2+yz)(2+zx)+(y-z)(2+xy)(2+zx)$$
$$+(z-x)(2+xy)(2+yz)=0.$$

Množenjem i sređivanjem dolazimo do jednadžbe:

$$x^2z-z^2x+xy^2-y^2z-x^2y+yz^2=0.$$

Sada korištenjem svojstva distributivnosti redom imamo:

$$xz(x-z)+y^2(x-z)-y(x-z)(x+z)=0,$$
$$(x-z)(xz+y^2-xy-yz)=0,$$
$$(x-z)[z(x-y)-y(x-y)]=0,$$
$$(x-z)(x-y)(z-y)=0.$$

Barem jedan od tri faktora mora biti jednak 0. Dakle, barem su dva od tri broja jednaka.

Lucija Drašinac (4),
III. gimnazija, Osijek

3319. *Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva takav da vrijedi*

$$a_{n+1}\geq a_n^2+\frac{1}{5},\quad n\geq 0.$$

Dokaži da je $a_{n+5}\geq a_n^2$, za $n\geq 0$.

Rješenje. Ispišimo pet nejednakosti

$$a_{n+1}\geqslant a_n^2+\frac{1}{5},$$
$$a_{n+2}\geqslant a_{n+1}^2+\frac{1}{5},$$
$$a_{n+3}\geqslant a_{n+2}^2+\frac{1}{5},$$
$$a_{n+4}\geqslant a_{n+3}^2+\frac{1}{5},$$
$$a_{n+5}\geqslant a_{n+4}^2+\frac{1}{5}.$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
&a_{n+5}-a_n^2\\
&\geqslant (a_{n+1}^2+a_{n+2}^2+a_{n+3}^2+a_{n+4}^2)\\
&\quad-(a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4})+5\cdot\frac{1}{5}\\
&=\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a_{n+2}-\frac{1}{2}\right)^2\\
&\quad+\left(a_{n+3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a_{n+4}-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Lucija Drašinac (4), Osijek

3320. *Neka su a, b, x, y, realni brojevi takvi da vrijedi:*

$$ax+by=3,$$
$$ax^2+by^2=7,$$
$$ax^3+by^3=16,$$
$$ax^4+by^4=42.$$

Odredi vrijednost od ax^5+by^5.

Rješenje. Imamo

$$ax^3+by^3=(ax^2+by^2)(x+y)-(ax+by)xy.$$

Dakle,

$$16=7(x+y)-3xy. \qquad (1)$$

Slično je

$$ax^4+by^4=(ax^3+by^3)(x+y)-(ax^2+by^2)xy$$

tj.

$$42=16(x+y)-7xy. \qquad (2)$$

Rješavanjem sustava od dvije linearne jednadžbe dobivamo

$$x+y=-14, \qquad xy=-38.$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
ax^5+by^5&=(ax^4+by^4)(x+y)-(ax^3+by^3)xy\\
&=42\cdot(-14)-16\cdot(-38)=20.
\end{aligned}$$

Ur.

3321. *Jednakostranični trokuti ABE i BCF konstruirani su na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ s vanjske strane paralelograma $ABCD$. Dokaži da je trokut DEF jednakostraničan.*

Rješenje.

$|AB| = |CD| = |AE| = |BE| = a,$

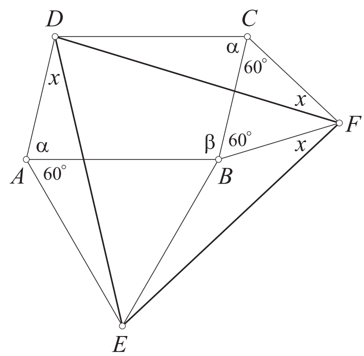
$|AD| = |BC| = |BF| = |CF| = b;$

$\sphericalangle EAD = \sphericalangle DCF = \alpha + 60^\circ, \ (\alpha + \beta = 180^\circ)$

$\sphericalangle EBF = 360^\circ - 120^\circ - \beta = \alpha + 60^\circ;$

$\triangle EAD \cong \triangle EBF \cong \triangle DCF$ po SKS,

$|DE| = |EF| = |FD|.$



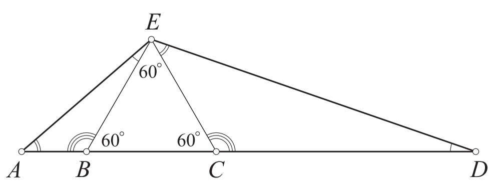
Trokut DEF je jednakostraničan.

Petar Orlić (1), Zagreb

3322. *U trokutu ADE je $\sphericalangle AED = 120^\circ$, B i C su točke na stranici AD tako da je BCE jednakostraničan trokut. Ako je $|AB| = 4$ cm i $|CD| = 16$ cm, koliko je $|BC|$?*

Rješenje. Kutovi $\sphericalangle ABE$ i $\sphericalangle DCE$ su jednaki i iznose 120°. Vrijedi i

$$\begin{aligned}\sphericalangle AEB &= \sphericalangle AED - \sphericalangle BEC - \sphericalangle CED\\ &= 120^\circ - 60^\circ - \sphericalangle CED\\ &= 60^\circ - \sphericalangle CED.\end{aligned}$$



No, iz trokuta CED imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle CDE &= 180^\circ - \sphericalangle ECD - \sphericalangle CED\\ &= 60^\circ - \sphericalangle CED = \sphericalangle AEB,\end{aligned}$$

a kako je i $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DCE$, trokuti ABE i ECD su slični. Stoga je

$$\frac{|CD|}{|CE|} = \frac{|BE|}{|AB|},$$

$$|BC|^2 = |CD| \cdot |AB| = 64 \text{ cm}^2,$$

$$|BC| = 8 \text{ cm}.$$

Matea Prenc (3),
Gimnazija Pula, Pula

3323. *Pokaži da unutrašnjosti konačno mnogo parabola u ravnini ne mogu pokriti cijelu tu ravninu.*

Rješenje. Pretpostavimo suprotno tj. da unutrašnjosti konačno mnogo podataka mogu pokriti cijelu ravninu. Presjek pravca s unutrašnjosti parabole je polupravac samo ako je on paralelan s osi parabole, segment ili nema zajedničkih točaka s unutrašnjosti parabole. Postoji pravac koji nije paralelan niti s jednom osi danih parabola. Unutrašnjosti parabola pokrivaju samo uniju konačno mnogo segmenata tog pravca, što znači da ne mogu pokriti cijeli pravac. Kontradikcija s pretpostavkom! Zato vrijedi tvrdnja u zadatku.

Ur.

3324. *Duljine stranica trokuta su a, b, c, a nasuprotni kutovi α, β, γ. Ako je $a^2 = b(b+c)$, dokaži da je $\alpha = 2\beta$.*

Prvo rješenje. Iz kosinusovog poučka i zadane jednakosti imamo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$a^2 = b(b+c) = b^2 + bc.$$

Dobivamo

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + bc,$$

$$c(b + 2b\cos\alpha - c) = 0.$$

Kako je $c \neq 0$ slijedi:

$$\begin{aligned}0 &= b + 2b\cdot\cos\alpha - c\\ &= 2R(\sin\beta + 2\sin\beta\cos\alpha - \sin(\alpha+\beta))\end{aligned}$$

jer je $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$ i $R \neq 0$ te iz adicijske formule za sinus:

$$\sin\beta + 2\sin\beta\cos\alpha$$
$$- (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$
$$= \sin\beta + \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta$$
$$= \sin\beta - \sin(\alpha - \beta) = 0$$

tj.

$$\sin\beta = \sin(\alpha - \beta).$$

Dvije su mogućnosti

a) $\beta = \alpha - \beta$ tj. $\alpha = 2\beta$;

b) $\beta = 180^\circ - \alpha + \beta$ tj. $\alpha = 180^\circ$ što nije moguće

Stoga je $\alpha = 2\beta$.

Matea Prenc (3), Gimnazija Pula, Pula

Drugo rješenje. Iz poučka o sinusima dobivamo

$$\sin^2\alpha = \sin\beta(\sin\beta + \sin\gamma) \quad \text{tj.}$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin\beta\sin(\pi - \alpha - \beta),$$
$$(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta) = \sin\beta\sin(\alpha+\beta),$$
$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$= \sin\beta\sin(\alpha+\beta),$$
$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) - \sin\beta\sin(\alpha+\beta) = 0,$$
$$\sin(\alpha+\beta)[\sin(\alpha-\beta) - \sin\beta] = 0.$$

Iz $\sin(\alpha+\beta) \neq 0$ dobivamo

$$\sin\beta - \sin(\alpha - \beta) = 0,$$
$$2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Kako je $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ imamo

$$\sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) = 0,\ \beta = \frac{\alpha}{2},\ \text{tj. } \alpha = 2\beta.$$

Ur.

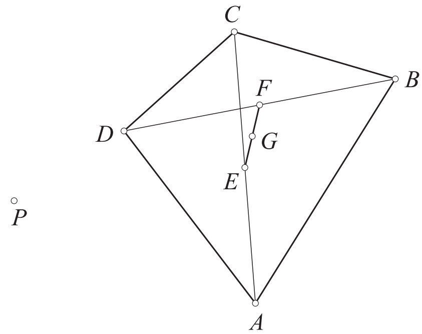
3325. *Točke E, F su polovišta dijagonala $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$. Ako je G polovište dužine $\overline{EF}$ i P bilo koja točka ravnine tog četverokuta, dokaži jednakost*

$$|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 + |DP|^2$$
$$= |AG|^2 + |BG|^2 + |CG|^2 + |DG|^2 + 4|PG|^2.$$

Prvo rješenje. Vrijedi:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP},$$
$$|\overrightarrow{AP}|^2 = |\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}|^2$$
$$= |\overrightarrow{AG}|^2 + |\overrightarrow{GP}|^2 + 2\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GP}.$$

Analogno vrijedi i za $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CP}$ i $\overrightarrow{DP}$.



Zbrojimo te četiri jednakosti.

$$|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 + |\overrightarrow{CP}|^2 + |\overrightarrow{DP}|^2$$
$$= |\overrightarrow{AG}|^2 + |\overrightarrow{BG}|^2 + |\overrightarrow{CG}|^2 + |\overrightarrow{DG}|^2 + 4|\overrightarrow{GP}|^2$$
$$+ 2\overrightarrow{GP}\ \underbrace{(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG})}_{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EG}}.$$

Kako je $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$ slijedi:

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DE}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB})$$
$$= \vec{0}.$$

Kako je izraz

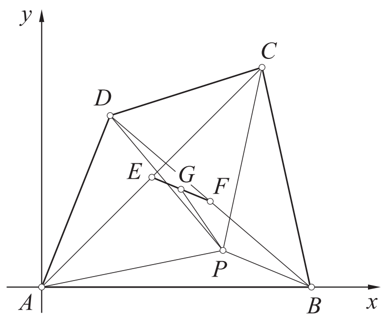
$$2\overrightarrow{GP}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG}) = \vec{0},$$

tvrdnja je dokazana.

Matea Prenc (3), Pula

Drugo rješenje.

$A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$, $P(x_3,y_3)$, $E\left(\frac{x_1}{2},\frac{y_1}{2}\right)$, $F\left(\frac{a+x_2}{2},\frac{y_2}{2}\right)$, $G\left(\frac{x_1+x_2+a}{4},\frac{y_1+y_2}{4}\right)$.



$$|AG|^2=\left(\frac{x_1+x_2+a}{4}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{4}\right)^2,$$

$$|BG|^2=\left(\frac{x_1+x_2-3a}{4}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{4}\right)^2,$$

$$|CG|^2=\left(\frac{-3x_1+x_2+a}{4}\right)^2+\left(\frac{-3y_1+y_2}{4}\right)^2,$$

$$|DG|^2=\left(\frac{x_1-3x_2+a}{4}\right)^2+\left(\frac{y_1-3y_2}{4}\right)^2,$$

$$4|PG|^2=4\left(\frac{x_1+x_2+a-4x_3}{4}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2-4y_3}{4}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}
&|AG|^2+|BG|^2+|CG|^2+|DG|^2+4|PG|^2\\
&\quad=[64(x_3^2+y_3^2)+16(x_1^2+x_2^2+a^2)\\
&\qquad-32x_3(x_1+x_2+a)+16(y_1^2+y_2^2)\\
&\qquad-32y_3(y_1+y_2)]\Big/16\\
&\quad=x_1^2+x_2^2+a^2+4x_3^2\\
&\qquad-2x_1x_3-2x_2x_3-2x_3a+y_1^2\\
&\qquad+y_2^2+4y_3^2-2y_1y_3-2y_2y_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|AP|^2=x_3^2+y_3^2,\\
&|BP|^2=(x_3-a)^2+y_3^2,\\
&|CP|^2=(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2,\\
&|DP|^2=(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2,\\
&|AP|^2+|BP|^2+|CP|^2+|DP|^2\\
&\quad=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+a^2-2x_1x_3\\
&\qquad-2x_2x_3-2ax_3+y_1^2+y_2^2\\
&\qquad+4y_3^2-2y_1y_3-2y_2y_3.
\end{aligned}$$

Odavde vidimo da je

$$\begin{aligned}
&|AP|^2+|BP|^2+|CP|^2+|DP|^2\\
&\quad=|AG|^2+|BG|^2+|CG|^2+|DG|^2+4|PG|^2
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Paško Majcenović (2),
Gimnazija Franje Petrića, Zadar

3326. *Odredi* $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1})|$.

Rješenje. Funkcija $|\sin A|$ je periodička s periodom π. Dakle,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1})|\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}|\sin\pi(\sqrt{n^2+n+1}-n)|.
\end{aligned}$$

No,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}|\sin(\sqrt{n^2+n+1}-n)|\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\lim_{n\to\infty}|\sin\pi\sqrt{n^2+n+1}|=\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|=1.$$

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 342. *Za kupanje u kadi Manda potroši 150 litara vode temperature* $40\,^\circ C$*, a za tuširanje 30 litara vode iste temperature. Temperatura vode u vodovodu je 18 stupnjeva i zagrijava se u električnom bojleru. Cijena jednog kilovatsata električne energije je 0.93 kune, a kubnog metra vode 11.9 kuna. Koliko kuna Manda manje potroši kad se tušira?*

Rješenje.

$$V_1=150\ \mathrm{l}=0.15\ \mathrm{m}^3$$

$$V_2=30\ \mathrm{l}=0.03\ \mathrm{m}^3$$

$$m_1=150\ \mathrm{kg},\quad m_2=30\ \mathrm{kg}$$

$$t_1=18\,^\circ\mathrm{C},\quad t_2=40\,^\circ\mathrm{C}$$

cijena 1 kwh = 0.93 kn

cijena 1 m^3 vode = 11.9 kn

razlika cijene =?

$\Delta t = t_2 - t_1 = 22\,^\circ\mathrm{C}.$

Kupanje:

$$Q = c \cdot m_1 \cdot \Delta t = 4200 \cdot 150 \cdot 22$$
$$= 13\,860\,000 \text{ J} = 3.85 \text{ kWh};$$
$$\text{cijena struje} = 3.85 \text{ kWh} \cdot 0.93 \text{ kn/kWh}$$
$$= 3.5805 \text{ kn},$$
$$\text{cijena vode} = 0.15 \text{ m}^3 \cdot 11.9 \text{ kn/m}^3$$
$$= 1.785 \text{ kn},$$
$$\text{ukupna cijena kupanja} = 3.5805 + 1.785$$
$$= 5.3655 \text{ kn}.$$

Tuširanje:

$$Q = c \cdot m_2 \cdot \Delta t = 4200 \cdot 30 \cdot 22$$
$$= 2\,772\,000 \text{ J} = 0.77 \text{ kWh};$$
$$\text{cijena struje} = 0.77 \text{ kWh} \cdot 0.93 \text{ kn/kWh}$$
$$= 0.716 \text{ kn},$$
$$\text{cijena vode} = 0.03 \text{ m}^3 \cdot 11.9 \text{ kn/m}^3$$
$$= 0.357 \text{ kn},$$
$$\text{ukupna cijena tuširanja} = 0.716 + 0.357$$
$$= 1.073 \text{ kn},$$
$$\text{razlika cijene} = 5.3655 \text{ kn} - 1.073 \text{ kn}$$
$$= 4.2925 \text{ kn}.$$

Lovre Juras (7), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 343. *Tsunami koji je prošle godine izazvao havariju nuklearne elektrane Fukushima 1, jedne od 25 najvećih nuklearnih elektrana na svijetu, nastao je u potresu kojem je epicentar bio u moru na udaljenosti 130 kilometara od Japana. Tsunami je putovao prosječnom brzinom od oko 350 kilometara na sat. U potresima nastaju 4 vrste valova od kojih su najbrži longitudinalni koji putuju brzinama od 1 do 14 km/s. Pretpostavimo da im je brzina u tom potresu bila 5 km/s. Koliko je vremena prošlo otkad se tlo prvi put zatreslo do dolaska tsunamija?*

Rješenje.

$s = 130 \text{ km} = 130\,000 \text{ m}$

$v_1 = 350 \text{ km/h} = 97.2 \text{ m/s}$

$\underline{v_2 = 5 \text{ km/s} = 5000 \text{ m/s}}$

$\Delta t = ?$

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{130\,000 \text{ m}}{97.2 \text{ m/s}} = 1337 \text{ s},$$
$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{130\,000 \text{ m}}{5000 \text{ m/s}} = 26 \text{ s},$$
$$\Delta t = t_1 - t_2 = 1337 \text{ s} - 26 \text{ s} = 1311 \text{ s}.$$

Krešimir Štrkalj (7), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 344. *Usporedi prosječnu gustoću Zemlje kojoj je srednji polumjer 6371 km, a masa* $5.98 \cdot 10^{24}$ *kg i Saturna kojem je srednji polumjer 58 232 km, a masa* $5.68 \cdot 10^{26}$ *kg. Pretpostavi da su ova svemirska tijela oblika kugle.*

Rješenje.

$R_Z = 6371 \text{ km}$

$m_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

$R_S = 58\,232 \text{ km}$

$\underline{m_Z = 5.68 \cdot 10^{26} \text{ kg}}$

$\dfrac{\rho_Z}{\rho_S} = ?$

$$V_Z = \frac{4}{3}R_Z^3\pi = \frac{4}{3}(6.371 \cdot 10^6 \text{ m})^3 \cdot 3.14$$
$$= 1.1 \cdot 10^{21} \text{ m}^3,$$
$$V_S = \frac{4}{3}R_S^3\pi = \frac{4}{3}(5.8232 \cdot 10^7 \text{ m})^3 \cdot 3.14$$
$$= 8.267 \cdot 10^{23} \text{ m}^3,$$
$$\rho_Z = \frac{m_Z}{V_Z} = \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{1.1 \cdot 10^{21} \text{ m}^3} = 5400 \text{ kg/m}^3,$$
$$\rho_S = \frac{m_S}{V_S} = \frac{5.68 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{8.26 \cdot 10^{23} \text{ m}^3} = 687 \text{ kg/m}^3,$$
$$\frac{\rho_Z}{\rho_S} = \frac{5400 \text{ kg/m}^3}{687 \text{ kg/m}^3} = 7.86.$$

Prosječna gustoća Zemlje veća je 7.86 puta od prosječne gustoće Saturna.

Krešimir Štrkalj (7), Šibenik

OŠ – 345. *Marija i Iva trče na dionici od 10 kilometara. Marija trči brzinom 10 km/h, a Iva sporije. Iva je krenula 10 minuta ranije. Izračunaj Ivinu brzinu i udaljenost od cilja na* *kojoj ju je Marija prestigla ako je Marija u cilj ušla 10 minuta prije nje.*

Rješenje.

$s = 10\ \text{km} = 10\,000\ \text{m}$

$v_M = 10\ \text{km/h}$

$\underline{t_I = t_M + 20\ \text{min}}$

$v_I = ?\quad s_{\text{stizanja}} = ?$

$$t_M = \frac{s}{v_M} = \frac{10\ \text{km}}{10\ \text{km/h}} = 1\ \text{h},$$

$$t_I = t_M + 20\ \text{min} = 80\ \text{minuta} = \frac{4}{3}\ \text{h},$$

$$v_I = \frac{s}{t_I} = \frac{10\ \text{km}}{\frac{4}{3}\ \text{h}} = 7.5\ \text{km/h}.$$

U trenutku dostizanja vrijedi $s_M = s_I$ i $t_I = t_M + \dfrac{1}{6}$.

$$s_M = s_I,$$

$$v_M \cdot t_M = v_I \cdot t_I = v_I \cdot \left(t_M + \frac{1}{6}\right),$$

$$10t_M = 7.5t_M + 1.25,$$

$$2.5t_M = 1.25 \implies t_M = 0.5\ \text{h};$$

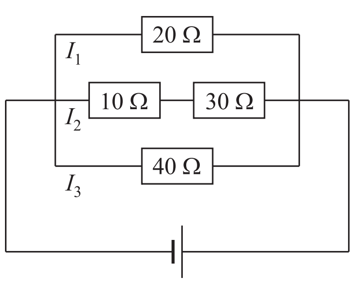
$$s_M = v_M \cdot t_M = 10\ \text{km/h} \cdot 0.5\ \text{h} = 5\ \text{km}.$$

Marija je Ivu stigla na pola puta do cilja.

Lovre Juras (7), Šibenik

1504. *Četiri otpornika od* $10\ \Omega$, $20\ \Omega$, $30\ \Omega$ *i* $40\ \Omega$ *spojeni su tako da je ukupan otpor* $10\ \Omega$. *Ako spoj priključimo na naponski izvor takav da ukupna oslobođena snaga iznosi 96 W, kolika je snaga otpornika od* $10\ \Omega$*?*

Rješenje. Shema danog spoja je sljedeća:



Iz ukupne snage dobije se napon izvora:

$$P = \frac{U^2}{R} \implies U = \sqrt{PR} = 8\sqrt{15}\ \text{V},$$

a to je ujedno i napon svake grane tog kruga. Stoga za granu 2 vrijedi:

$$U = U_2 = U_{10\ \Omega} + U_{30\ \Omega} = I_2(10 + 30)$$

$$\implies I_2 = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

pa snaga otpornika od $10\ \Omega$ iznosi

$$P = RI_2^2 = 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2 = 6\ \text{W}.$$

Matea Prenc (3), Gimnazija Pula, Pula

1505. *Prirodni kalij sadrži* 0.0117% *radioaktivnog* ^{40}*K, vremena poluživota 1.25 milijardi godina. Kolika je aktivnost (broj raspada u sekundi) 100 grama kalija? Atomska težina kalija je 39.1 g/mol.*

Rješenje. Masa radioaktivnog kalija u 100 grama prirodnog kalija iznosi

$$m\left(^{40}\text{K}\right) = m\left(\text{K}\right) \cdot 0.0117 \cdot 10^{-2} = 0.0117\ \text{g}.$$

Broj atoma ^{40}K iznosi

$$N = N_A \cdot \frac{m\left(^{40}\text{K}\right)}{M\left(^{40}\text{K}\right)} = 1.801 \cdot 10^{20}.$$

Aktivnost kalija je

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} \cdot N = 3166.8\ \text{Bq}.$$

Matea Prenc (3), Pula

1506. *Kolica se spuštaju jednolikom brzinom 2 m/s niz kosinu nagiba* 8°. *Na dnu kosine, kolica se nastave gibati vodoravno, po istoj vrsti podloge. Odredi koeficijent trenja i zaustavni put koji kolica prevale po vodoravnoj podlozi.*

Rješenje. Za vrijeme spuštanja kolica niz kosinu vrijedi

$$F = 0 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$\implies \mu = \operatorname{tg}\alpha = 0.14.$$

Na vodoravnoj podlozi djeluje samo sila trenja, pa se kinetička energija kolica troši na savladavanje te sile:

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgs \implies s = \frac{v^2}{2\mu g} = 1.43 \text{ m.}$$

Matea Prenc (3), Pula
Josip Jelić (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1507. *Saturnovi prsteni kruže oko planete na udaljenosti od 67 000 do 480 000 km od središta. Ako je najbrže ophodno vrijeme materijala prstena 294.5 minuta, odredi masu planeta te najmanju i najveću brzinu kruženja prstenova.*

Rješenje. Na materijal prstena djeluje gravitacijska sila, koja ima ulogu centripetalne sile:

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

pri čemu je m masa materijala prstena, M masa Saturna, a r udaljenost od središta. Slijedi:

$$M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G} = 5.698 \cdot 10^{26} \text{ kg},$$

uzimajući $r = 67 \cdot 10^6$ m i $T = 17\,670$ s (294.5 min). Iz trećeg Keplerovog zakona dobivamo:

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} \implies T_2 = T_1\sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} = 338\,833 \text{ s},$$

te iz toga

$$v_1 = \frac{2r_1\pi}{T_1} = 23\,824 \text{ m/ s},$$

$$v_2 = \frac{2r_2\pi}{T_2} = 8901 \text{ m/ s}.$$

Matea Prenc (3), Pula

1508. *Elektron kruži u homogenom magnetskom polju frekvencijom 100 Mhz. Kolika je jakost polja? Koliki je radijus kruženja, ako je kinetička energija elektrona* $8 \cdot 10^{-18}$ *J?*

Rješenje. Iz kinetičke energije elektrona izračunamo brzinu kruženja

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_e}} = 4\,191\,000 \text{ m/ s},$$

a iz frekvencije i brzine radijus kruženja

$$r = \frac{v}{2\pi f} = 6.67 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Jakost polja je

$$B = \frac{m\omega}{q} = \frac{mv}{rq} = 3.57 \cdot 10^{-3} \text{ T.}$$

Matea Prenc (3), Pula
Josip Jelić (3), Zagreb

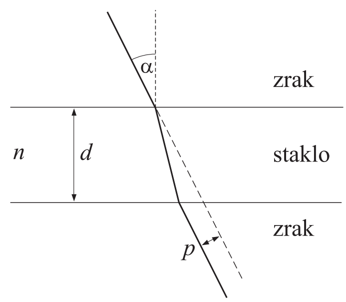
1509. *Dalekovidna osoba ne vidi jasno predmete bliže oku od 75 cm. Odredi jakost leća naočala koje omogućuju toj osobi jasno čitanje teksta na udaljenosti 23 cm od oka.*

Rješenje. Dalekovidna osoba treba za čitanje konvergentne leće (s pozitivnom dioptrijom). Predmet na udaljenosti 23 cm mora stvoriti virtualnu sliku na 75 cm udaljenosti. Iz jednadžbe leće imamo:

$$J = \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{0.23} - \frac{1}{0.75} = \frac{208}{69}$$
$$= 3.014 \text{ dpt.}$$

Matea Prenc (3), Pula

1510. *Koliki je otklon (p) zraka svjetlosti koje upadaju na ravno staklo debljine d = 30 mm indeksa loma n = 1.55 pod kutem $\alpha = 25^\circ$ u odnosu na okomicu (vidi sliku)?*



Rješenje. Označimo s l duljinu puta kroz staklo. Vrijedi:

$$l = \frac{d}{\cos\beta},$$

$$p = l\sin(\alpha - \beta) = d(\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tg}\beta).$$

Iz Snellovog zakona $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ slijedi $\beta = 15^\circ 49' 20''$. Uvrštavanjem dobijemo $p = 4.97$ mm.

Matea Prenc (3), Pula
Josip Jelić (3), Zagreb