53. međunarodna matematička olimpijada 2012. g.

Ovogodišnja međunarodna matematička olimpijada (MMO) održala se od 4. do 16. srpnja 2012. godine u argentinskom turističkom gradu Mar del Plati. Iako su učenici s voditeljima pristizali 7. i 8. srpnja, vođe ekipa su već od 4. srpnja, na nama nepoznatoj lokaciji, birali zadatke za natjecanje.

Na olimpijadi je sudjelovalo 548 natjecatelja, od čega samo 52 djevojke. Natjecatelji su dolazili iz 100 različitih zemalja, a o svakoj ekipi brinuo se po jedan vodič. Naša vodičica bila je *Natasha Duic*, Argentinka hrvatskog podrijetla.

Hrvatsku su na ovoj olimpijadi predstavljali: *Matija Bucić* (XV. gimnazija, Zagreb), *Domagoj Ćevid* (V. gimnazija, Zagreb), *Matija Milišić* (XV. gimnazija, Zagreb), *Vlatka Vazdar* (XV. gimnazija, Zagreb), *Verner Vlačić* (Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka) i *Borna Vukorepa* (XV. gimnazija, Zagreb). U Argentinu su nas vodili *Mea Bombardelli*, vođa ekipe te *Matija Bašić*, njezin pomoćnik. Rezerve naše ekipe bili su *Luka Skorić* i *Tomislav Bujanović*, obojica iz XV. gimnazije u Zagrebu.

Ove godine Kina nije zauzela prvo ekipno mjesto, već je ono pripalo Koreancima s ukupno osvojenih 209 bodova, dok je ekipa SAD-a za bod izgubila drugo mjesto od Kine. Hrvatska ekipa je, kao i prošle godine, osvojila 110 bodova, no ove godine to je bilo dovoljno za treći najbolji rezultat u povijesti, 25. ekipno mjesto. Naravno, ovu olimpijadu ćemo najbolje pamtiti po prvoj hrvatskoj zlatnoj medalji od početka sudjelovanja na MMO-u koju je osvojio *Domagoj Ćevid*. Samo malo sreće do zlatne medalje je nedostajalo *Matiji Buciću*, koji je osvojio srebrnu medalju. *Borna Vukorepa, Matija Milišić* i *Vlatka Vazdar* osvojili su brončane medalje, a ista je *Verneru Vlačiću* izmakla za bod, te je on dobio pohvalu.

Iako 53. po redu, ovogodišnja međunarodna matematička olimpijada bila je tek 4. na južnoj polutki. Vrijeme nam, stoga, nije bilo pretjerano naklonjeno, pa smo većinu vremena provodili u zajedničkoj dvorani, gdje su se predstavnici naše ekipe iskazali u stolnom nogometu, stolnom tenisu, jahanju mehaničkog bika i karaokama. Ekipno smo se iskazali u pjevanju s gitarom, dok je *Domagoj Ćevid* odlučio svoj glazbeni talent pokazati i u talent showu, u kojem je, iako po mišljenju žirija nije prošao u finale, osvojio publiku osjećajnom izvedbom pjesme *Heart of gold*. Posebno zanimljive bile su i lekcije tanga, naravno onog argentinskog. Zbog vremenskih neprilika otišli smo samo na jedan izlet u lokalni akvarij, gdje smo vidjeli nekoliko predstava s izrazito talentiranim dupinima i morskim lavovima. Zbog naporne koordinacije, naši nam se voditelji nisu mogli pridružiti.

S ove olimpijade vratit ćemo se s puno lijepih uspomena, novih poznanstava i novih iskustava. Prošlogodišnji olimpijci nisu bili pretjerano zadovoljni s organizacijom, ali čim su usporedili *vegetarian lunch policy* s mesom na argentinskim švedskim stolovima, počeli su mijenjati mišljenje. Sad nam je samo preostalo željno iščekivati sljedeću MMO u, nadajmo se, sunčanoj Kolumbiji.

Vlatka Vazdar, Domagoj Ćevid

Zadaci

Prvi dan, Mar del Plata, Argentina, utorak, 10. srpnja 2012.

1. Neka je ABC trokut i neka je točka J središte tom trokutu pripisane kružnice nasuprot vrha A. Ta pripisana kružnica dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki M, a pravce AB i AC redom u točkama K i L. Pravci LM i BJ sijeku se u točki F, a pravci KM i CJ u točki G. Neka je S sjecište pravaca AF i BC i neka je T sjecište pravaca AG i BC. Dokaži da je točka M polovište dužine $\overline{ST}$. (*Pripisana kružnica* trokuta ABC nasuprot vrha A je kružnica koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.)

2. Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj i neka su $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi za koje je $a_2a_3 \cdots a_n = 1$. Dokaži da vrijedi $(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n$.

3. *Razotkrivanje laži* je igra koju igraju dva igrača, A i B. Pravila igre ovise o dva prirodna broja k i n koji su poznati i jednom i drugom igraču.

Na početku igre igrač A bira prirodne brojeve x i N takve da je $1 \leqslant x \leqslant N$. Igrač A čuva broj x kao tajnu, ali kaže igraču B točnu vrijednost broja N. Nakon toga igrač B nastoji prikupiti informacije o broju x postavljajući igraču A pitanja na sljedeći način: za svako pitanje igrač B odabire podskup S skupa prirodnih brojeva (možda isti kao u nekom od prethodnih pitanja) i pita igrača A pripada li broj x skupu S. Igrač B može postaviti po volji mnogo pitanja ovog tipa. Na svako pitanje igrač A mora odmah odgovoriti sa *da* ili *ne*, ali smije lagati koliko god puta želi; jedino je ograničenje da među svakih $k+1$ uzastopnih odgovora barem jedan mora biti istinit.

Nakon što B postavi koliko god pitanja želi, on odabire skup X koji se sastoji od najviše n prirodnih brojeva. Ako broj x pripada skupu X onda igrač B pobjeđuje, u suprotnom B gubi. Dokaži da:

1. Ako je $n \geqslant 2^k$, onda igrač B može osigurati pobjedu.
2. Za svaki dovoljno veliki k, postoji $n \geqslant 1.99^k$ za koji igrač B ne može osigurati pobjedu.

Drugi dan, Mar del Plata, Argentina, srijeda, 11. srpnja 2012.

4. Odredi sve funkcije $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ takve da, za sve cijele brojeve a, b, c koji zadovoljavaju $a+b+c=0$, vrijedi jednakost:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbf{Z}$ označava skup svih cijelih brojeva)

5. Neka je ABC trokut u kojem je $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ i neka je D nožište visine iz vrha C. Neka je X unutarnja točka dužine $\overline{CD}$. Neka je K točka na dužini $\overline{AX}$ takva da je $|BK| = |BC|$. Analogno, neka je L točka na dužini $\overline{BX}$ takva da je $|AL| = |AC|$. Neka je M sjecište pravaca AL i BK. Dokaži da je $|MK| = |ML|$.

6. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje nenegativni cijeli brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takvi da vrijedi

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Vrijeme za rad svakog dana: 4 sata i 30 minuta

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Rang-lista

	nagrade I	nagrade II	nagrade III	poh.	broj bod.
Sjeverna Koreja	6				209
Kina	5		1		195
SAD	5	1			194
Rusija	4	2			177
Kanada	3	1	2		159
Tajland	3	3			159
Singapur	1	3	2		154
Iran	3	2	1		151
Vijetnam	1	3	2		149
Rumunjska	2	3	1		144
Indija	2	3		1	136
Južna Koreja	2	1	3		128
Turska	1	3	2		128
Tajvan	1	3		2	127
Srbija	1	2	1	2	126
Peru		3	2	1	125
Japan		4	1	1	121
Poljska		2	4		119
Brazil	1	1	3	1	116
Bugarska	1	2	2	1	116
Ukrajina		3	2	1	116
Nizozemska	2		3	1	115
Velika Britanija	1	1	4		115
Bjelorusija		4	1	1	114
Hrvatska	1	1	3	1	110
Grčka	1	1	3	1	107
Australija		2	4		106
Hong Kong		3	1	2	106
Saudijska Arabija		2	3		105
Moldavija		2	3	1	104
Izrael		3	1	1	102
Meksiko	1	1	2	2	102
Njemačka		2	3	1	102
Kazahstan		1	4	1	101
Indonezija		1	3	1	100
Malezija		2	3	1	100
Portugal	1	1	2	1	96
Belgija		2	1	2	93
Francuska		1	4	1	93
Italija		2	1	2	93
Mađarska		2	1	3	93
Tadžikistan			4	2	91
Mongolija	1		2	3	90
Slovačka	1		2	2	85
Bosna i Hercegovina		1	2	2	84
Kolumbija			3	3	83
Armenija		1	2	2	80
Češka		1	1	4	80
Kostarika			3	2	80
Austrija			4	1	79

	nagrade I	nagrade II	nagrade III	poh.	broj bod.
Turkmenistan		1	2	2	78
Švicarska			3	1	76
Novi Zeland			2	4	75
Argentina			2	4	74
Bangladeš (5)		1	2	2	74
Južnoafrička Republika			2	3	71
Slovenija			2	4	71
Litva			3	1	69
Gruzija			1	3	68
Španjolska		1		3	64
Azerbejdžan			2	2	60
Danska			1	4	60
Čile			1	4	59
Makedonija			2	2	59
Finska		1		3	57
Latvija				5	55
Nigerija			1	3	52
Estonija				4	50
Kirgistan				6	50
Maroko (5)			2		49
Ekvador			1	2	47
Švedska			1	1	47
Filipini (3)			2	1	41
Pakistan (5)		1		1	41
Makao				3	40
Cipar				3	39
Luksemburg (4)			1	2	36
Irska				2	34
Honduras (3)			1	2	33
Norveška				1	33
Portoriko (4)			1	1	32
Paragvaj				2	31
Šri Lanka (4)			1	1	30
Urugvaj				2	30
Obala Bjelokosti (4)				3	29
Salvador (3)				2	28
Trinidad i Tobago (5)				1	26
Tunis (2)		1			25
Island					21
Sirija				1	19
Panama (3)				1	17
Venecuela (3)				1	17
Gvatemala (2)				1	11
Kosovo					9
Kuba (1)					8
Bolivija					6
Crna Gora (2)					5
Lihtenštajn (2)					5
Uganda (5)					2
Kuvajt (3)					0

(U zagradama je naveden broj učenika za ekipe koje su imale manje od 6 članova.)