6. srednjoeuropska matematička olimpijada 2012. g.

Ove godine je Srednjoeuropska matematička olimpijada održana u gradu Solothurnu, u Švicarskoj. Našu zemlju je među deset država predstavljalo šest učenika: *Mislav Balunović* (2. r.) iz Gimnazije Matije Mesića u Slavonskom Brodu, *Erik Banek* (2. r.) iz V. gimnazije u Zagrebu, *Aleksandar Bulj* (3. r.) iz Gimnazije Andrije Mohorovičića u Rijeci, *Vlatko Crnković* (2. r.) i *Mihael Marović* (3. r.) iz XV. gimnazije u Zagrebu te *Roko Žaja* (3. r.) iz Gimnazije Franje Petrića u Zadru. Voditelji naše ekipe su bili *Tonći Kokan* i *Stipe Vidak*.

Na put smo krenuli 5. rujna u popodnevnim satima i sljedeći dan rano ujutro stigli smo u Švicarsku. Već u danima prije natjecanja pokazali smo se kao vrsni sportaši.

Zadaci na individualnom natjecanju bili su kvalitetno, ali i lukavo izabrani pa su mnogi izgubili brojne sate rješavajući prvi zadatak koji se činio lakšim no što je bio. Na ekipnom natjecanju stvari ispočetka nisu izgledale obećavajuće, sve dok V. Crnković nije uočio da su određene tri točke na istom pravcu i uskoro riješio čarobni zadatak te nas naposlijetku doveo do ekipne bronce. Valja napomenuti i borbenost naših voditelja koji su braneći naša rješenja (bilo s individalnog, bilo s ekipnog natjecanja) redovno izvukli maksimalan mogući broj bodova za pojedino rješenje.

U slobodno vrijeme, u danima poslije individualnog i ekipnog natjecanja, osim već spomenutih sportskih aktivnosti, bila su organizirana i dva izleta. Na jednom smo probali švicarsku čokoladu i švicarski sir, a na drugom smo otkrili čari Berna. Spomenut ćemo i zanimljive partije pokera u kojima su sudjelovali i naši voditelji i u kojima su uspješno oboreni svi zakoni vjerojatnosti. Tek smo zadnju večer natjecanja, na dodjeli nagrada u vrhunski opremljenoj sali, saznali za uspjeh naše ekipe – dvije srebrne (M. Balunović i M. Marović) i jedna brončana medalja (R. Žaja) na individualnom natjecanju te brončana medalja na ekipnom natjecanju.

Ukupno je sudjelovalo 60 učenika iz deset država: Austrija, Češka, Hrvatska, Litva, Mađarska, Njemačka, Poljska, Slovačka, Slovenija i Švicarska. Dvoje ih je osvojilo zlatnu, njih deset srebrnu i 18 brončanu medalju. Na ekipnom natjecanju prva je Poljska, a druga Mađarska.

Vratili smo se vlakom 12. rujna u kasnim večernjim satima. Sljedeća Srednjoeuropska matematička olimpijada će se održati u Mađarskoj.

Za više podataka o 6. MEMO-u pogledajte na adresi:

`http://www.imosuisse.ch/memo2012/`

Mihael Marović

Zadaci s pojedinačnog natjecanja, 8. rujna 2012.

1. Odredi sve funkcije $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ takve da jednakost

$$f(x+f(y)) = yf(xy+1)$$

vrijedi za sve $x, y \in \mathbf{R}^+$. ($\mathbf{R}^+$ označava skup svih pozitivnih realnih brojeva.)

2. Dan je prirodni broj N. Za skup $S \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ kažemo da je *dozvoljen* ako ne sadrži tri različita elementa a, b, c takva da a dijeli b i b dijeli c. Odredi najveći mogući broj elemenata koji može imati neki dozvoljeni skup S.

3. U danom trapezu $ABCD$ u kojem je AB paralelno s CD te $|AB| > |CD|$, pravac BD raspolavlja kut $\sphericalangle ADC$. Pravac kroz točku C paralelan s AD siječe dužine $\overline{BD}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama E i F. Neka je O središte opisane kružnice trokuta BEF. Pretpostavimo da je $|\sphericalangle ACO| = 60^\circ$. Dokaži jednakost:

$$|CF| = |AF| + |FO|.$$

4. Niz $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ zadan je s $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{2} + a_n + a_{n-1}, \text{ za sve prirodne brojeve } n.$$

Odredi sve proste brojeve p za koje postoji prirodni broj m takav da p dijeli $a_m - 1$.

Zadaci s ekipnog natjecanja, 9. rujna 2012.

1. Nađite sve trojke realnih brojeva (x, y, z) takve da vrijedi:

$$2x^3 + 1 = 3zx, \qquad 2y^3 + 1 = 3xy, \qquad 2z^3 + 1 = 3yz.$$

2. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite nejednakost:

$$\sqrt{9+16a^2} + \sqrt{9+16b^2} + \sqrt{9+16c^2} \geqslant 3 + 4(a+b+c).$$

3. Dan je prirodni broj n. Promatramo riječi duljine n koje se sastoje od slova iz skupa $\{M, E, O\}$. Neka je a broj takvih riječi koji sadrže paran broj (uključujući nulu) blokova ME i paran broj (uključujući nulu) blokova MO. Nadalje, neka je b broj takvih riječi koje sadrže neparan broj blokova ME i neparan broj blokova MO. Dokažite da je $a > b$.

4. Neka je $p > 2$ prosti broj. Za danu permutaciju $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(p))$ skupa $S = \{1, 2, \ldots, p\}$, neka $f(\pi)$ označava broj višekratnika broja p među sljedećih p brojeva:

$$\pi(1),\ \pi(1)+\pi(2),\ \ldots,\ \pi(1)+\pi(2)+\ldots+\pi(p).$$

Odredite prosječnu vrijednost od $f(\pi)$ po svim permutacijama π skupa S.

5. Neka je K polovište stranice $\overline{AB}$ danog trokuta ABC. Neka su L i M redom točke na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ takve da $|\sphericalangle CLK| = |\sphericalangle KMC|$. Dokažite da se okomice na stranice $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom iz točaka K, L i M, sijeku u jednoj točki.

6. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut kojem nikoje dvije stranice nisu paralelne i u kojem je $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$. Pretpostavimo da sjecišta parova simetrala susjednih kutova četverokuta $ABCD$ tvore konveksni četverokut $EFGH$. Neka je K sjecište dijagonala četverokuta $EFGH$. Dokažite da se pravci AB i CD sijeku na opisanoj kružnici trokuta BKD.

7. Nađite sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) takve da vrijedi:

$$x^y + y^x = z^y, \qquad x^y + 2012 = y^{z+1}.$$

8. Za dani prirodni broj n, neka $d(n)$ označava broj njegovih pozitivnih djelitelja. Postoje li prirodni brojevi a i b takvi da je $d(a) = d(b)$ i $d(a^2) = d(b^2)$, ali $d(a^3) \neq d(b^3)$?

Vrijeme rješavanja svakog dana: 5 sati