

Comenius projekt “Ins and outs of the magic Möbius strip”

Aneta Copic¹, Zrinka Mavračić²



Obrazovanje i kultura

Program za cjeloživotno učenje

Ova publikacija se financira uz podršku sredstava Europske komisije.

Ova publikacija odražava isključivo stajalište autora publikacije i Komisija se ne može smatrati odgovornom prilikom uporabe informacija koje se u njoj nalaze.

Projekt “Ins and outs of the magic Möbius strip” je međunarodni dvogodišnji projekt u okviru potprograma Comenius – multilateralna školska partnerstva. U projektu sudjeluju četiri škole:

- Moise Nicoara National College, Arad, Rumunjska
- Devenport High School for Girls, Plymouth, Velika Britanija
- Justus von Liebig Gymnasium, Neusäß, Njemačka
- XV. gimnazija, Zagreb, Hrvatska.

U XV. gimnaziji u projekt je uključeno tridesetak učenika, tri profesorice matematike – *Eva Špalj*, koja je koordinator projekta, *Sanja Antoliš* i *Aneta Copic* te profesorica fizike *Zrinka Mavračić*

Glavna je tema projekta Möbiusova traka koju je 1858. godine opisao njemački matematičar i astronom *August Ferdinand Möbius*. Metaforički naziv projekta upućuje na odnos između suštine (biti) i pojavnosti, između onog što se može vidjeti i onog što je obično skriveno, kako unutar, tako i izvan univerzuma. Möbiusova traka je svugdje oko nas. To je simbol za transformaciju, čudnovatost, zapletenost, neprekidnost i obnovljivost. To je tzv. slika besmrtnosti. Od Möbiusove trake kao polazne točke, proučavamo vezu između matematike i drugih predmeta. Istražili smo i proučili primjene trake u biologiji (DNA), ekologiji (znak za reciklažu), kemiji (aromatske molekule) i fizici (Möbiusova zavojnica i otpornik). U likovnoj umjetnosti, arhitekturi, dizajnu, ali i prozi, poeziji, religiji, Möbiusova je traka poticaj za kreativno stvaranje i izražavanje.

Učenici koji sudjeluju u projektu imaju između 14 do 18 godina. Kroz brojne aktivnosti i mobilnosti učenici će biti podvrgnuti raznim izazovima, razvijati istraživačke sposobnosti, kreativnost, komunikativnost i timski rad. I učenici i profesori dijelit će iskustva i dobru praksu kroz Europsku suradnju

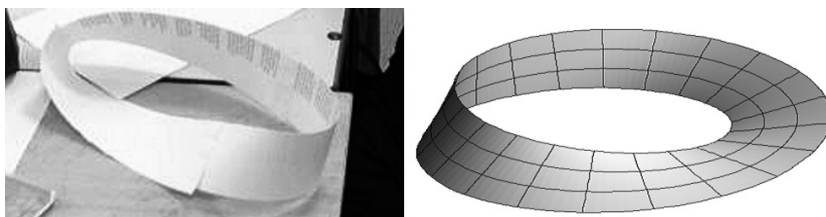
Möbiusova traka u matematici

Što je zapravo Möbiusova traka? Mogli bismo je opisati kao prsten s jednim zaokretom. Ako od papira izrežete dugačku traku, jedan njezin kraj zaokrenete za 180° pa zalijepite njezine krajeve, dobit ćete Möbiusovu traku. Pokušate li olovkom nacrtati neprekinutu liniju duž cijele trake, otkrit ćete da traka ima samo jednu stranu.

¹ Profesorica matematike na XV. gimnaziji u Zagrebu; e-pošta: aneta.copic@skole.hr

² Profesorica fizike na XV. gimnaziji u Zagrebu; e-pošta: zrinka.mavracic@skole.hr

Time ste zašli u područje matematike koje se zove *topologija*. Topologija proučava ona svojstva neke strukture koja ostaju nepromjenjena (invarijantna) pri njezinim neprekidnim transformacijama (kad se oblici izobličuju rastezanjem, izvrtanjem ili gnječanjem). Također proučava odnos područja i granice.



Što radimo u matematičkom dijelu projekta?

Topološka svojstva Möbiusove trake

Na samom početku učenici su istraživali osnovna topološka svojstva Möbiusove trake. Što se dobije rezanjem Möbiusove trake (trake s jednim poluokretom), po sredini ili na trećini udaljenosti od ruba? Dobije li se traka s jednim ili više poluokreta, s jednom ili dvije strane?

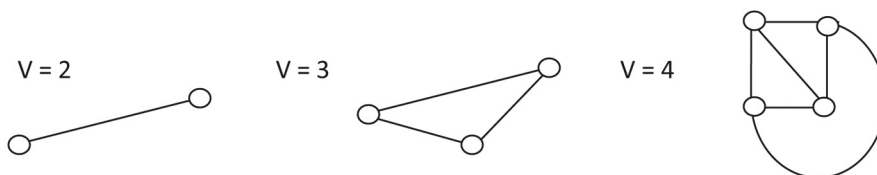
Rezanjem i bilježenjem rezultata učenici su došli do zaključka:

- Rezanjem trake s neparnim brojem n poluokreta dobit ćemo traku s $2n + 2$ poluokreta.
- Rezanjem trake s parnim brojem n poluokreta dobit ćemo dvije trake od kojih svaka ima n poluokreta.

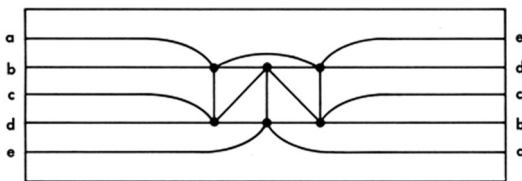
Teorija grafova

Zahvaljujući Möbiusovoj traci naučili smo ponešto i o teoriji grafova.

Na početku smo se igrali spajanja vrhova (točaka) bridovima (linijama) tako da svaka dva vrha budu direktno povezani i to bez presijecanja bridova. Zaključili smo da je to moguće napraviti u ravnini samo ako je broj vrhova V manji od 5.



Na Möbiusovoj plohi je na taj način moguće povezati 5 vrhova i 6 vrhova. Ovo je primjer za 6 vrhova.



Nakon crtanja grafova nastavili smo se igrati, ovaj put bojicama. Bojali smo različite karte (ili skupove područja) tako da bilo koja dva područja koja imaju zajedničku granicu (brid) nisu obojana istom bojom. Pri tome ako dva područja imaju zajedničku samo jednu točku (vrh) mogu biti obojani istom bojom. Zadatak je bio obojati kartu koristeći se minimalnim brojem boja.



Tako smo došli do poznatog *Teorema o četiri boje* koji kaže da su u ravni dovoljne četiri boje za obojati proizvoljnu kartu. Zadatak je dalje bio vidjeti što se zbiva na Möbiusovoj traci. Na njoj je za proizvoljnu kartu dovoljno šest boja.

Neki su učenici razmišljali i o dokazu, no nisu daleko odmakli od bojanja. Matematičarima je trebalo 124 godine da dokažu teorem i to je jedan od prvih dokaza u kojem je korišteno računalo.

Kako je jedan od ciljeva projekta i uključiti što više učenika (i izvan projektne grupe), to me ponukalo da u dijelu svog razreda (C program – koji ima dodatni sat matematike) kroz nekih 15-ak sati napravim mali izlet u teoriju grafova iz kojeg su proizašli mali učenički projekti u kojem su rješavali neke logističke probleme iz njihovog svakodnevnog života.

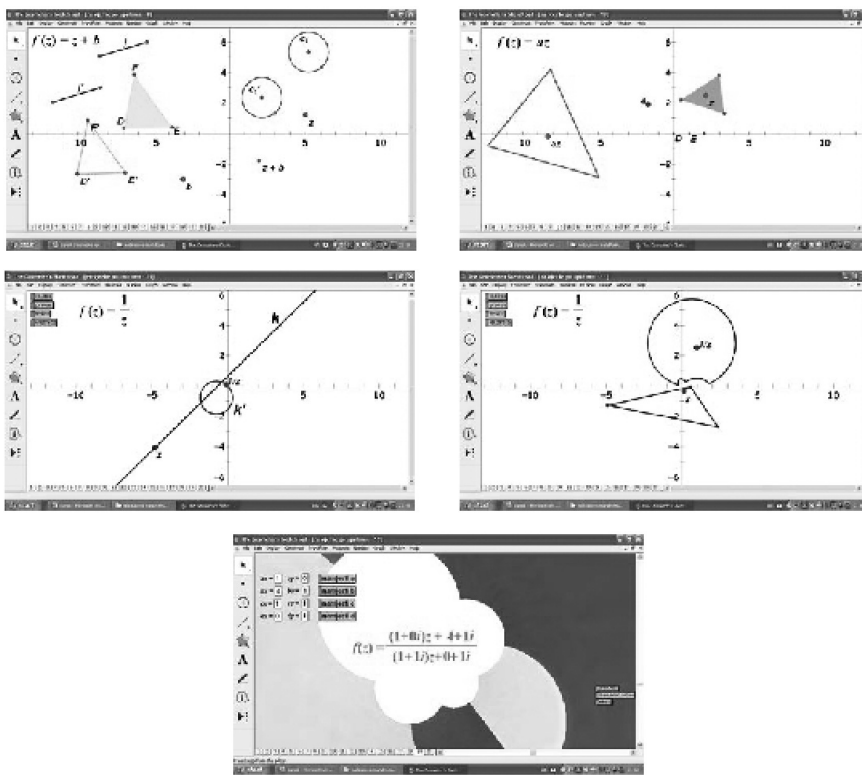
Möbiusovo preslikavanje

Radili smo i “ozbiljnu” matematiku. Proučavali smo funkcije čija je domena i kodomena skup kompleksnih brojeva. U tu smo svrhu koristili računalo i program dinamične geometrije.

Izradili smo alate za zbrajanje, množenje i invertiranje kompleksnih brojeva. Zatim smo definirali preslikavanja $f(z) = z + b$, $f(z) = az$, $f(z) = z^2$, $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, gdje su a , b , c , d , kompleksni brojevi. Ovo se posljednje preslikavanje zove Möbiusova transformacija. Crtali smo različite skupove točaka T u Gaussovoj ravnini i njihove slike, odnosno skupove točaka $T' = f(T)$.

Učenici su trebali uočiti o kojim se transformacijama radi. Dodavanje kompleksnog broja z je translacija. Množenje realnim brojem a je homotetija, množenje kompleksnim brojem a , $|a| = 1$ je rotacija dok je općenito množenje kompleksnim brojem a kompozicija rotacije i homotetije. Invertiranje kompleksnih brojeva je kompozicija inverzije i osne simetrije.

Na kraju su Möbiusovim preslikavanjem različitih fotografija proizašla prava mala umjetnička djela.



Möbius u fizici³

Otpornici i zavojnice vrlo su važni elementi strujnih krugova. Odlučili smo ispitati kako primjena Möbiusovog čvora na te elemente utječe na njihova elektromagnetska svojstva. Proučavali smo razlike između oblika induciranih magnetskih polja, električnog otpora i induktiviteta “Möbiusovih” elemenata i elemenata bez Möbiusovog čvora.

Pretpostavljamo da ćemo primjenom Möbiusovog čvora na elektromagnet dobiti elektromagnet s istim magnetskim polovima na obje strane, te smanjen induktivitet kako otpornika, tako i zavojnice.

Napravili smo dvije zavojnice, jednu motajući bakrenu žicu “normalno” oko plastične cijevi, a drugu motajući prvu polovicu zavojnice u jednom smjeru, a drugu polovicu u drugom. Na taj način smo promijenili orijentaciju vektora površine poprečnog presjeka zavojnice. Zavojnice su nam bile jednake duljine, imale su jednak broj zavoja i jednaku površinu poprečnog presjeka.

Kad zavojnicom teče struja oko nje se inducira magnetsko polje čiji se smjer može odrediti pravilom desne ruke. Uključivši u strujni krug Möbiusovu zavojnicu, dobili smo elektromagnet s dva ista magnetska pola (slika 1).

³ Priredili: učenici Vedrana Vlahović i Dalibor Žgela i mentorica Zrinka Mavračić, XV. gimnazija u Zagrebu.



Slika 1. Möbiusov elektromagnet s dva ista magnetska pola (suprotni pol je u sredini).

Nadalje smo napravili dva okrugla otpornika od kojih je jedan sadržavao Möbiusov čvor (Möbiusov otpornik). Napravili smo ih od aluminijskih traka koje smo izrezali iz podložaka za serviranje hrane u kućanstvu. Trake predstavljaju dvije strane Möbiusove vrpce, a između njih je zbog izolacije smještena papirnata traka. Trake koje smo upotrebljavali su bile iste duljine i širine (slika 2).



Slika 2. Möbiusov i "običan" otpornik.

Ako priključimo Möbiusov otpornik u strujni krug, očekujemo u najmanju ruku smanjenje induciranog magnetskog polja u odnosu na "običan" otpornik. Uistinu smo takvim pokusom opazili manji otklon magnetske igle u blizini Möbiusovog nego u blizini "običnog" otpornika.

Preliminarna mjerenja pokazala su malu, ali uočljivu razliku induktiviteta elemenata sa i bez Möbiusovog čvora, pa smo odlučili konstruirati veće i bolje elemente, koji bi nam dali signifikantne numeričke pokazatelje tih razlika.

Promatrajući naš Möbiusov otpornik, ustanovili smo da ga možemo gledati kao zavojnicu s jednim navojem, drugim riječima, da bismo na isti način mogli namotati i cijelu zavojnicu, motajući naše preko papira spojene vodljive trake oko željezne jezgre (zbog povećanja induciranog magnetskog polja) i uklopivši na svakih 360° okreta Möbiusov čvor.

Problemi su nastali pri nabavi materijala i to još uvijek pokušavamo riješiti. Ako ne uspijemo naći vodljive trake, ili dovoljno tanke ploče iz kojih bismo ih mogli sami rezati, upotrijebit ćemo žicu koju ćemo motati na jezgru na način da na svakih 360° okreta promijenimo smjer motanja.

Tokom zagrebačkog projektog tjedna posjetili smo Tehnički muzej u Zagrebu, posebno dio posvećen radu Nikole Tesle. Promatrali smo pokuse s velikim Teslinim zavojnicama i pitali se što bi bilo kad bismo za naše pokuse sagradili tako nešto.

Projektni tjedni

Druga godina projekta je u tijeku i iza nas su već tri projektna tjedna – u Njemačkoj, Engleskoj i Hrvatskoj. Preostala su nam još dva projektna tjedna – u Rumunjskoj i završni u Njemačkoj.

U tijeku projektnog tjedna, osim samog putovanja i razgledavanja gradova, druženja, razmjene iskustava, upoznavanja drugih školskih sustava, učenici su imali priliku vidjeti strana sveučilišta i uživati u predavanjima ili radionicama cijenjenih sveučilišnih profesora. Tako smo u Njemačkoj, posjetili Schulpfortu, rodno mjesto *Augusta Ferdinanda Möbiusa* i Leipzig gdje je Möbius studirao i radio kao profesor. U Leipzigu smo na fakultetu matematike i informatike slušali predavanje prof. dr. Kürstena.

U Londonu smo posjetili Muzej znanosti gdje je cijeli jedan odjel posvećen matematici i sadrži mnoštvo izložaka s temom Möbiusove trake. U Oxfordu je prof. dr. Richard Earl s Matematičkog odjela održao predavanje o Platonovim tijelima, Möbiusovoj traci i topologiji.

U našem je projektnom tjednu, profesorica Franka Miriam Brückler, s Prirodoslovno matematičkog fakulteta, na istom fakultetu držala zanimljivu radionicu o čvorovima. Slušali smo, također zanimljivo, predavanje u Tehničkom muzeju i imali radionicu u Muzeju suvremene umjetnosti.

S obzirom da je Möbius bio astronom, u Zagrebu smo iskoristili priliku i našim gostima pokazali dio instalacije “Devet pogleda”, modele planeta postavljene oko skulpture “Prizemljeno sunce” Ivana Kožarića u Bogovićevoj ulici, što sve zajedno čini “Zagrebački sunčev sustav”. U tom kontekstu posjetili smo i Astronomski centar u Rijeci, posebno njegov suvremeni digitalni planetarij, jedini takav u regiji. Nakon dva predavanja imali smo priliku promatrati nebo kroz teleskop.

Učenici i nastavnici sudjelovat će u travnju 2013. na Međunarodnoj matematičkoj konferenciji “Tiberiu Popoviciu”. U lipnju 2013. na završnom susretu u Njemačkoj održati će se velika izložba radova.

Ovakvi su projekti od neprocjenjive vrijednosti i za mnoge veliko životno iskustvo. Oni će matematiku i prirodne znanosti učiniti atraktivnijima. Mnogi će učenici biti motivirani da se u daljnjem životu i radu nastave baviti matematikom ili znanostima.

Literatura

- [1] SANDRA GRAČAN, *Möbiusova traka*, Miš 22 godište V.
- [2] CLIFFORD A. PICKOVER, *The Mobius Strip: Dr. August Möbius's Marvelous Band in Mathematics, Games, Literature, Art, Technology, and Cosmology*, Thunder's Mouth Press, New York, 2006.
- [3] PAMELA V., EDWARD K., MICHAEL H., ROBERT H., SANDRA H., MARK H., CHRIS S., *Mathematics for the international students, MYP 5-plus*, Haese&Harris publications.
- [4] EVA ŠPALJ, SANJA ANTOLIŠ, *Möbiusova traka*, Zbornik radova petog kongresa.
- [5] <http://www.geom.uiuc.edu/~zaremba/graphpt1.html>
- [6] <http://www.mathmaniacs.org/lessons/15-mapcoloring/>
- [7] <http://www.ccs3.lanl.gov/mega-math/workbk/map/mppoor.html>