Pitagorine[1] trojke i Fibonaccijevi[2] brojevi

Šefket Arslanagić[3], *Alija Muminagić*[4]

U ovom članku ćemo pokazati kakvu vezu imaju *Fibonaccijevi* brojevi i *Pitagorine* trojke brojeva. Najprije, podsjetimo se.

1. Najjednostavnija kvadratna diofantska jednadžba je Pitagorina jednadžba

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Prirodne brojeve (a, b, c) koji su rješenja jednadžbe (1) nazivamo Pitagorinim trojkama. Opće rješenje jednadžbe (1) može se napisati u obliku

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2), \tag{2}$$

gdje su m i n relativno prosti prirodni brojevi takvi da je jedan od njih paran, drugi neparan i $m > n$.

2. Fibonaccijev niz (F_n) zadan je rekurzivnom relacijom

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geqslant 1. \tag{3}$$

To je dakle niz dan u donjoj tablici:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	...

Napravimo sada novu tablicu na sljedeći način: Uzmimo da su m i n uzastopni Fibonaccijevi brojevi i napišimo odgovarajuće Pitagorine trojke.

m	n		a	b	c
2	1		3	4	5
3	2		5	12	13
5	3		16	30	34
8	5		39	80	89
13	8		105	208	233
21	13		272	546	610
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Pažljivim promatranjem ovih tablica, uočavamo da su u koloni ispod c u drugoj tablici neki Fibonaccijevi brojevi. Preciznije, to su počev od 5 Fibonaccijevi brojevi

[1] Pitagora, veliki starogrčki matematičar koji je živio i djelovao u 6. stoljeću prije Krista.

[2] Leonardo Pisano Fibonacci (1170.–1240.), talijanski matematičar (glavno njegovo djelo je *Liber Abaci* iz 1202. godine).

[3] Izvanredni profesor u mirovini na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

[4] Nykøbing F., Danska

neparnog indeksa i osim toga je:

$$\begin{array}{lll} 2^2+1^2=5, & \text{tj.} & F_3^2+F_2^2=F_5 \\ 3^2+2^2=13, & \text{tj.} & F_4^2+F_3^2=F_7 \\ 5^2+3^2=34, & \text{tj.} & F_5^2+F_4^2=F_9 \\ & \vdots & \end{array}$$

Naslućujemo da vrijedi

$$F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1}, \tag{4}$$

odnosno: Fibonaccijev broj neparnog indeksa jednak je zbroju kvadrata dva uzastopna Fibonaccijeva broja.

Da bismo dokazali tvrdnju (4), prethodno ćemo dokazati da vrijedi jednakost:

$$F_{m+n}=F_{m-1}\cdot F_n+F_m\cdot F_{n+1}, \quad (m>1). \tag{5}$$

Jednakost (5) se najčešće (i najlakše) dokazuje pomoću principa matematičke indukcije ili se primjenjuje kombinatorni dokaz. Rjeđe nailazimo na dokaz koji slijedi.

Dokaz. Poznat je *Binetov*[5] obrazac za izračunavanje n-tog Fibonaccijevog broja:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right],$$

ili stavljajući da je $\alpha=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ i $\beta=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^n-\beta^n\right). \tag{6}$$

Uočimo da je

$$\alpha+\beta=1 \quad \text{i} \quad \alpha\cdot\beta=-1. \tag{7}$$

Napomena 1. Obrazac (6) možemo također dokazati na različite načine, a dokaz prepuštamo čitaocima (metoda matematičke indukcije ili riješavanjem karakteristične jednadžbe rekurzivnog obrasca (3) ili tako da se odredi funkcija izvodnica za niz (F_n) Fibonaccijevih brojeva i pomoću toga izračuna F_n).

Sada, zbog (6), imamo:

$$\begin{aligned} &F_{m-1}\cdot F_n+F_m\cdot F_{n+1}\\ &=\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^n-\beta^n\right)+\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^m-\beta^m\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)\\ &=\frac15\left[\left(\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}\right)\left(\alpha^n-\beta^n\right)+\left(\alpha^m-\beta^m\right)\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)\right]\\ &=\frac15\left(\alpha^{m+n-1}-\alpha^n\beta^{m-1}-\alpha^{m-1}\beta^n+\beta^{m+n-1}+\alpha^{m+n+1}-\alpha^m\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}\beta^m+\beta^{m+n+1}\right) \end{aligned}$$

[a odavde zbog (7)

$$\alpha^n\cdot\beta^{m-1}=\left(-\beta^{-1}\right)^n\cdot\beta^{m-1}=(-1)^n\cdot\beta^{m-n-1}$$

i slično:

$$\alpha^{m-1}\cdot\beta^n=(-1)^n\cdot\alpha^{m-n-1},\ \ \alpha^m\beta^{n+1}=-(-1)^n\cdot\alpha^{m-n-1},\ \ \alpha^{n+1}\cdot\beta^m=-(-1)^n\cdot\beta^{m-n-1}]$$

[5] Jacques Phillipe Marie Binet (1786.–1856.), francuski matematičar i astronom.

$$= \frac{1}{5}\left(\alpha^{m+n-1} - (-1)^n \cdot \beta^{m-n-1} - (-1)^n \cdot \alpha^{m-n-1} + \beta^{m+n-1} + \alpha^{m+n+1}\right.$$
$$\left. + (-1)^n \cdot \alpha^{m-n-1} + (-1)^n \cdot \beta^{m-n-1} + \beta^{m+n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\alpha^{m+n-1} + \beta^{m+n-1} + \alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1}\right)$$

[a odavde zbog $\alpha \cdot \beta = -1$, tj. $\alpha = -\beta^{-1}$ i $\beta = -\alpha^{-1}$ te $\alpha - \beta = \sqrt{5}$]

$$= \frac{1}{5}(\alpha - \beta)\left(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{m+n} - \beta^{m+n}\right) = F_{m+n}.$$

Uvrstimo li sada u obrazac (5) $m = n + 1$, dobijemo

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2,$$

što predstavlja obrazac (4) koji je trebalo dokazati.

Napomena 2. Uvrštavanjem $m = n$ u obrazac (5), dobijemo:

$$F_{2n} = F_{n-1} \cdot F_n + F_n \cdot F_{n+1} = F_n\left(F_{n-1} + F_{n+1}\right)$$
$$\stackrel{(3)}{=} \left(F_{n+1} - F_{n-1}\right)\left(F_{n-1} + F_{n+1}\right) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2; \quad (n \geqslant 2).$$

Napomena 3. Bilo bi interesantno utvrditi da li postoji neka veza između Fibonaccijevih i *trokutastih* brojeva.

Da ponovimo trokutasti brojevi su:

$\mathbf{1}$, $\mathbf{3}(= 1 + 2)$, $\mathbf{6}(= 1 + 2 + 3)$, $\mathbf{10}(= 1 + 2 + 3 + 4)$, $\mathbf{15}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5)$,
$\mathbf{21}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$, $\mathbf{28}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$,
$\mathbf{36}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$, $\mathbf{45}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)$,
$\mathbf{55}(= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10), \ldots$

Dakle, imamo

$$T_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2},$$
$$T_2 = 1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2},$$
$$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2},$$
$$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2},$$
$$T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \cdot 6}{2}$$
$$\vdots$$
$$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

što znači da je svaki broj koji se može napisati u obliku $\dfrac{n(n+1)}{2}$ trokutasti.

Uočavamo ovdje da je

$$F_1 = F_2 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = T_1, \quad F_4 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} = T_2, \quad F_8 = 21 = \frac{6 \cdot 7}{2} = T_6,$$
$$T_{10} = 55 = \frac{10 \cdot 11}{2} = F_{10}, ...$$

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[2] A. Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Matkina biblioteka, Zagreb, 2000.

[3] V. Mićić, Z. Kadelburg, D. Đukić, *Uvod u teoriju brojeva*, Društvo matematičara Srbije, Materijali za mlade matematičare, Sveska 15, Beograd, 2004.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.