ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2012. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/ 251.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadaci iz matematike

3327. Nađi sve cijele brojeve n za koje je $\dfrac{n^3-3n^2+4}{2n-1}$, također cijeli broj.

3328. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i

$$p=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},\quad q=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$$

pokaži da je $|p-q|<1$.

3329. Ako je $a,b\in(0,1)$, dokaži da vrijedi nejednakost

$$\sqrt{ab}+\sqrt{(1-a)(1-b)}\le 1.$$

3330. Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$6x^2+5y^2=74.$$

3331. Neka su a, b pozitivni brojevi različiti od 1 i x, y zadovoljavaju jednadžbe $a^x=b$, $b^y=a$. Dokaži da je $xy=1$.

3332. Duljina visine jednakokračnog trapeza je h, a kut između dijagonala nasuprot njegovom kraku je α. Kolika je duljina srednjice trapeza?

3333. Dan je pravokutan trapez s bazama a i b $(b<a)$. Pravac paralelan bazi trapeza dijeli ga na dva manja takva da se u svaki od njih može upisati kružnica. Koliki je zbroj duljina njihovih polumjera?

3334. Odredi točku na elipsi $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1$ u prvom kvadrantu, takvu da tangenta na elipsu u toj točki zatvara s koordinatnim osima trokut najmanje površine.

3335. Ako su α, β, γ kutovi trokuta, dokaži jednakost

$$\frac{\dfrac{b}{\cos\beta}+\dfrac{c}{\cos\gamma}}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\dfrac{c}{\cos\gamma}+\dfrac{a}{\cos\alpha}}{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha}.$$

3336. Odredi produkt

$$(\sqrt{3}+\operatorname{tg}1^\circ)(\sqrt{3}+\operatorname{tg}2^\circ)\ldots(\sqrt{3}+\operatorname{tg}29^\circ).$$

3337. Koliko ima pravokutnih trokuta s vrhovima u vrhovima pravilnog n-terokuta?

3338. Dana je pravilna četverostrana piramida čija je duljina dijagonale baze jednaka duljini bočnog brida i jednaka je a. Nađi oplošje i volumen piramide.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 346. Aluminijsko tijelo ima masu 8.1 kg. Ako se petina njegovog obujma zamijeni materijalom tri puta veće gustoće kolika će biti prosječna gustoća tog tijela? Gustoća aluminija je 2700 kg/ m^3.

OŠ – 347. Anica je izbrojala da joj u menzuru od 10 cm^3 stane 40 kapi vode. Koliki je obujam jedne kapi? Anica ima akvarij dugačak 1 m i širok 6 dm. Napunjen je vodom do visine 50 cm. Kad bi ga se željelo napuniti vodom kapajući iz kapaljke koliko bi vremena trebalo za to ako iz kapaljke izlaze dvije kapi u sekundi i ako se isparavanje vode zanemari?

OŠ – 348. Dva učenika se utrkuju koji će prije stići na suprotne krajeve maksimirskog nogometnog igrališta. Kako ne trče jednakom brzinom odlučili su da brži od njih trči po stranicama, a sporiji po dijagonali igrališta. Brzina sporijeg učenika je 6.8 m/ s, a bržeg 8.2 m/ s. Dimenzije nogometnog igrališta su 105 m i 68 m. Koji će učenik prije stići na cilj?

OŠ – 349. Koje se najveće, a koje najmanje vrijednosti električnog otpora mogu dobiti spajanjem otpornika od 2.5 i 10 Ω?

1511. Prosječna kalendarska godina traje 365.25 dana po Julijanskom (starijem) i 365.2425 dana po Gregorijanskom (novijem) kalendaru. Tropska godina (prosjek između dva uzastopna ljetna solsticija) iznosi 365.24219 dana. Odredi u koliko se godina greška u kalendaru akumulira do jednog cijelog dana. Rezultat izrazi za oba kalendara.

1512. Projektil izbačen kosim hicem ima 3 sekunde nakon izbačaja 70%, a u tjemenu putanje 36% početne kinetičke energije. Uz $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ i zanemariv otpor zraka, odredi horizontalni domet i vrijeme leta projektila.

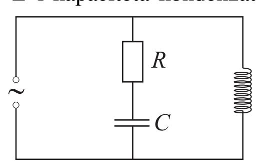
1513. Odredi masu utega matematičkog njihala, ako je period njihanja 1.19 s, a maksimalno ubrzanje pri njihanju iznosi $0.33\ \mathrm{m/s^2}$ za energiju njihanja 0.0012 J.

1514. Zvijezda udaljena 92.82 svjetlosne godine ima magnitudu (relativni sjaj) $+2.05$. Ako je smanjenje sjaja za *faktor* 100 po definiciji povećanje magnitude za $+5.0$, odredi:

— Na kojoj bi udaljenosti magnituda zvijezde bila $+6.0$?

— Koliki bi bio sjaj zvijezde na udaljenosti 32.6 svjetlosnih godina?

1515. Izrazi rezonantnu frekvenciju strujnog kruga na shemi pomoću otpora R, induktiviteta zavojnice L i kapaciteta kondenzatora C.



1516. Odredi indeks loma stakla od kojeg je napravljena bikonveksna leća, ako je jedan radijus zakrivljenosti 20% veći, a drugi 5% manji od žarišne daljine.

1517. U nekom trenutku kolica se gibaju uzbrdo po kosini brzinom 1 m/s. Nakon zaustavljanja i pokretanja niz kosinu, kolica ponovo prođu isti položaj nakon 1.6 sekundi brzinom 0.6 m/s (suprotnog smjera). Odredi prevaljeni put, nagib kosine i koeficijent trenja kolica i kosine.

C) Rješenja iz matematike

3307. *Neka su x, y pozitivni cijeli brojevi, takvi da je $3x+5y=2010$ i da xy poprima maksimalnu vrijednost. Odredi koliko je $x-y$.*

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$2010 = 3x+5y \geqslant 2\sqrt{3x\cdot 5y} = 2\sqrt{15xy}$$

Dakle,

$$\sqrt{15xy} \leqslant 1005.$$

I nakon kvadridanja i sređivanja je

$$xy \leqslant 67\,335.$$

xy je maksimalan kada vrijedi znak jednakosti u prethodnom izrazu. Tada mora biti i $x = \dfrac{67\,335}{y}$.

Uvrstimo to u polaznu jednadžbu:

$$3\cdot\frac{67\,335}{y} + 5y = 2010.$$

Riješimo se sada nazivnika i sredimo ovu kvadratnu jednadžbu:

$$y^2 - 402y + 40\,401 = 0.$$

Rješenje ove kvadratne jednadžbe je: $y = 201$ i tada je $x = 335$.

Konačno, $x - y = 335 - 201 = 134$.

Lucija Drašinac (3),
III. gimnazija, Osijek

3308. *Nađi sva rješenja (x, y) sistema jednadžbi*

$$x^4 + 2x^3 - y = -\frac14 + \sqrt3,$$
$$y^4 + 2y^3 - x = -\frac14 - \sqrt3.$$

Rješenje. Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$\Big(x^4+2x^3-x+\frac14\Big) + \Big(y^4+2y^3-y+\frac14\Big) = 0.$$

U zagradama su kvadrati trinoma, tj.

$$\Big(x^2+x-\frac12\Big)^2 + \Big(y^2+y-\frac12\Big)^2 = 0.$$

Jednakost vrijedi samo ako je

$$x^2+x-\frac12 = y^2+y-\frac12 = 0,$$

što je moguće jedino ako je

$$\{x,y\} \subseteq \Big\{-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}, -\frac12+\frac{\sqrt3}{2}\Big\}.$$

Kako mora biti $x \neq y$, vrijedi

$$\{x,y\} = \Big\{-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}, -\frac12+\frac{\sqrt3}{2}\Big\}.$$

Lako se provjeri da je

$$(x,y) = \Big(-\frac12-\frac{\sqrt3}{2}, -\frac12+\frac{\sqrt3}{2}\Big)$$

rješenje.

Ur.

3309. *Ako je*

$$y^2 + yz + z^2 = a^2,$$
$$z^2 + zx + x^2 = b^2,$$
$$x^2 + xy + y^2 = c^2,$$
$$yz + zx + xy = 0,$$

pokaži da vrijedi
$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 0.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\\
=&[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]\\
=&[(a+b)^2+(a-b)^2]c^2-c^4-(a+b)^2(a-b)^2\\
=&(2a^2 + 2b^2)c^2 - c^4 - (a^2 - b^2)^2\\
=&2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)\\
=&2[(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2)\\
&+ (y^2 + yz + z^2)(x^2 + xy + y^2)\\
&+ (z^2 + zx + x^2)(x^2 + xy + y^2)]\\
&- [(y^2 + yz + z^2)^2 + (z^2 + zx + x^2)^2\\
&+ (x^2 + xy + y^2)^2]\\
=&3x^2y^2+3x^2z^2+3y^2z^2+6x^2yz+6xy^2z+6xyz^2\\
=&3[xy + xz + yz]^2 = 0.
\end{aligned}$$

Lucija Drašinac (3), Osijek

3310. *Koliko pozitivnih cijelih brojeva x zadovoljava nejednadžbu*

$$\left|2 + \log_x \frac{1}{2}\right| < \frac{7}{4}.$$

Rješenje. Kako je $x > 0$ i $x \neq 1$ imamo:

$$\begin{aligned}
-\frac{7}{4} &< 2 + \log_x \frac{1}{2} < \frac{7}{4},\\
-\frac{15}{4} &< -\log_x 2 < -\frac{1}{4},\\
-\frac{15}{4} &< -\frac{1}{\log_2 x} < -\frac{1}{4},\\
\frac{15}{4} &> \frac{1}{\log_2 x} > \frac{1}{4},\\
\frac{4}{15} &< \log_2 x < 4,\\
2^{\frac{4}{15}} &< x < 16.
\end{aligned}$$

Kako je $1 < 2^{\frac{4}{15}} < 2$ rješenja su $x = 2$, $3, \dots, 15$.

Dakle, nejednadžba ima 14 pozitivnih cjelobrojnih rješenja.

Lucija Drašinac (3), Osijek

3311. *Neka su p i q kompleksni brojevi, $q \neq 0$. Ako su rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ istog modula, dokaži da je $\frac{p}{q}$ realan broj.*

Rješenje. Neka su x_1, x_2 rješenja dane kvadratne jednadžbe i $r = |x_1| = |x_2|$. Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{p^2}{q^2} &= \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2\\
&= \frac{x_1\overline{x}_2}{r^2} + \frac{x_2\overline{x}_1}{r^2} + 2 = 2 + \frac{2}{r^2}\mathrm{Re}\,(x_1\overline{x}_2)
\end{aligned}$$

realan broj. Štoviše,

$$\mathrm{Re}\,(x_1\overline{x}_2) \geqslant -|x_1\overline{x}_2| = -r^2,$$

pa je $\frac{p^2}{q^2} \geqslant 0$.

Dakle, $\frac{p}{q}$ je realan broj.

Lucija Drašinac (3), Osijek

3312. *U pravokutniku ABCD točka E je na dijagonali $\overline{BD}$ i $\sphericalangle DAE = 15^\circ$. Izračunaj kut $\sphericalangle EAC$ ako je duljina visine $\overline{EF}$ trokuta ABE jednaka polovini duljine stranice $\overline{AB}$.*

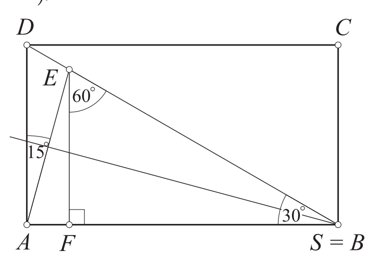
Rješenje. Neka je S točka u kojoj simetrala dužine $\overline{AE}$ siječe pravac AB. Tada je $|AS| = |ES|$ i $\triangle ASE$ je jednakokračan.

Kako je

$$\sphericalangle SAE = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ,$$

imamo

$$\sphericalangle ASE = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ.$$



Radi toga je $\triangle FSE$ polovina jednakostraničnog trokuta i $|EF| = \frac{1}{2}|ES| = \frac{1}{2}|AS|$, a kako je $|EF| = \frac{1}{2}|AB|$, točke S i B su identične.

Stoga je

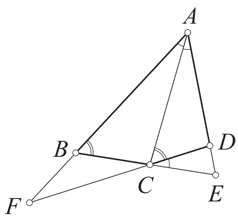
$$\begin{aligned}\sphericalangle EAC &= 90^\circ - \sphericalangle DAE - \sphericalangle CAB \\ &= 75^\circ - \sphericalangle ABE = 45^\circ.\end{aligned}$$

Lucija Drašinac (3), Osijek

3313. *U konveksnom četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD$. Pravci AD i BC sijeku se u E, a AB i DC u F. Odredi omjer*

$$\frac{|AB| \cdot |DE|}{|BC| \cdot |CE|}.$$

Rješenje. Kako je $\sphericalangle ACE$ vanjski kut trokuta ABC imamo $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC$, odakle je $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACD + \sphericalangle CAD$.



Odavde slijedi $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DCE$, pa su trokuti CED i AEC slični. Stoga je

$$\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{|DE|}{|CE|}. \tag{1}$$

No, iz $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAE$ (AC je simetrala kuta $\sphericalangle BAE$) dobivamo

$$\frac{|BC|}{|CE|} = \frac{|AB|}{|AE|}. \tag{2}$$

Iz jednakosti (1) i (2) dobivamo

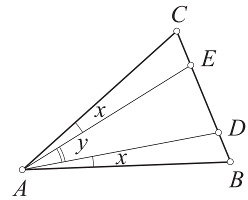
$$\frac{|AB| \cdot |DE|}{|BC| \cdot |CE|} = 1.$$

Paško Majcenović (1),
Gimnazija Franje Petrića, Zadar

3314. *Točke D i E su na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC tako da je D bliže vrhu B i E bliže vrhu C, te $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DAB$. Dokaži da je*

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BD| \cdot |BE|}{|CE| \cdot |CD|}.$$

Prvo rješenje. Neka je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC = x$, a $\sphericalangle DAE = y$.



Visina je zajednička svim trokutima na slici pa je:

$$\frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle AEC}} = \frac{\frac{|AB| \cdot |AD| \cdot \sin x}{2}}{\frac{|AC| \cdot |AE| \cdot \sin x}{2}} = \frac{\frac{|BD| \cdot v}{2}}{\frac{|CE| \cdot v}{2}},$$

$$\frac{|AB| \cdot |AD|}{|AC| \cdot |AE|} = \frac{|BD|}{|CE|},$$

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AE| \cdot |BD|}{|AD| \cdot |CE|}; \tag{1}$$

$$\frac{P_{\triangle ABE}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{|AB| \cdot |AE| \cdot \sin(x+y)}{2}}{\frac{|AD| \cdot |AC| \cdot \sin(x+y)}{2}} = \frac{\frac{|BE| \cdot v}{2}}{\frac{|CD| \cdot v}{2}},$$

$$\frac{|AB| \cdot |AE|}{|AD| \cdot |AC|} = \frac{|BE|}{|CD|},$$

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD| \cdot |BE|}{|CD| \cdot |AE|}. \tag{2}$$

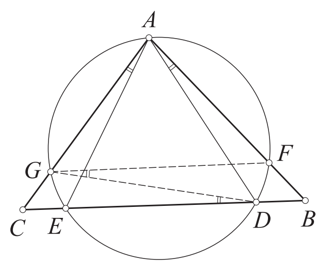
Iz (1) i (2) dobivamo

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BD| \cdot |BE|}{|CE| \cdot |CD|},$$

čime je tvrdnja dokazana

Paško Majcenović (1), Zadar

Drugo rješenje. Nacrtajmo kružnicu opisanu trokutu ADE. Ona siječe $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama F i G. Povucimo dužine $\overline{FG}$ i $\overline{DG}$.



U kružnici ADE vrijedi $\sphericalangle FAD = \sphericalangle FGD$. Također je $\sphericalangle GAE = \sphericalangle GDE$. Kako je po pretpostavci $\sphericalangle FAD = \sphericalangle GAE$ imamo $\sphericalangle FGD = \sphericalangle GDE$. Zato je $FG \| DE \| BC$. U trokutu ABC je

$$\frac{|BF|}{|AB|} = \frac{|CG|}{|AC|} \quad \text{tj.} \quad \frac{|BF|}{|CG|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Množenjem dobivamo

$$\frac{|BF|}{|CG|} \cdot \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

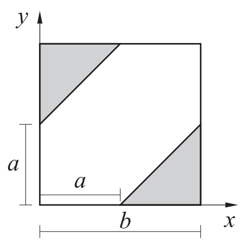
Kako je $|BF| \cdot |AB| = |BD| \cdot |BE|$ i $|CG| \cdot |AC| = |CE| \cdot |CD|$ odakle je

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BD| \cdot |BE|}{|CE| \cdot |CD|}.$$

Ur.

3315. *Dani su pozitivni realni brojevi a, b, $a < b$. Ako se slučajno na dužini duljine b izaberu dvije točke, kolika je vjerojatnost da njihova udaljenst bude barem a.*

Rješenje. Promatrajmo kvadrat stranice b.



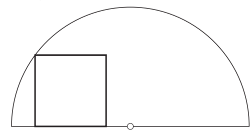
Točka (x, y) iz tog kvadrata mora biti $|x-y| < a$ tj. $-a < x-y < a$, pa se ona nalazi u obojanom području. Tražena vjerojatnost je jednaka

$$\frac{(b-a)^2}{b^2} = \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2$$

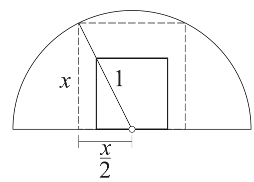
Ur.

3316. *Dva kvadrata stranica duljine* 0.9 *nalaze se u krugu polumjera 1. Dokaži da se oni sijeku.*

Prvo rješenje. Pretpostavimo suprotno tj. da se ta dva kvadrata ne sijeku. Tada najviše jedan od njih može sadržavati središte kruga. Promatrajmo onaj drugi kvadrat tj. onaj koji ne sadrži središte kruga. Pravac koji sadrži jednu od njegovih stranica odvaja ga od središta kruga (slika 1).



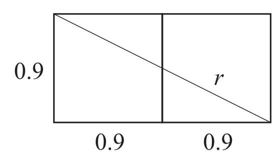
Promatrajmo dijametar koji je paralelan s tim pravcem. Kvadrat je potpuno sadržan u polukrugu tako da je jedna njegova stranica paralelna s dijametrom. Translatirajmo kvadrat tako da jedna njegova stranica bude na dijametru, a zatim ga translatirajmo tako da mu polovište stranice padne u središte kruga.



Taj kvadrat sada leži unutar većeg kvadrata kojemu su dva ista na dijametru, a dva na kružnici (slika 2). Koristeći Pitagorin poučak odredimo duljinu stranice većeg kvadrata. Ona iznosi $\sqrt{\frac{4}{5}}$. Ta duljina je manja od 0.9, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Zato vrijedi polazna tvrdnja u zadatku.

Ur.

Drugo rješenje. Pretpostavimo da se kvadrati ne sijeku. Zatim uzmimo najpovoljniji slučaj za veličinu kruga – da se kvadrati dodiruju.



Polumjer najmanjeg kruga u koji "stanu" ovi kvadrati je

$$r = \sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{18}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{405}}{20}.$$

Očito je $r = \dfrac{\sqrt{405}}{20} > 1$, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, kvadrati se sijeku.

Paško Majcenović (1), Zadar

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 338. *Automobil je za 15 sekundi prešao put od 300 metara. Pri tome je prvih deset sekundi jednoliko ubrzavao iz mirovanja, a ostalo vrijeme se gibao brzinom postignutom tijekom ubrzavanja. Kolika je bila ta brzina?*

Prvo rješenje.

$$s = 300 \text{ m}$$

$$\underline{t_1 = 10 \text{ s}, \quad t_2 = 5 \text{ s}}$$

$$v = ?$$

$$s = \frac{vt_1}{2} + vt_2 = v\left(\frac{t_1}{2} + t_2\right),$$

$$v = \frac{s}{\frac{t_1}{2} + t_2} = \frac{300 \text{ m}}{5 \text{ s} + 5 \text{ s}} = \frac{300 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 30 \text{ m/ s}.$$

Klaudija Lokas (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

Drugo rješenje.

$$s = 300 \text{ m}$$

$$\underline{t_1 = 10 \text{ s}, \quad t_2 = 5 \text{ s}}$$

$$v = ?$$

$$s = s_1 + s_2 = \frac{at_1^2}{2} + vt_2,$$

$$v = at,$$

$$s = \frac{vt_1}{2} + vt_2 = v \cdot 5 \text{ s} + v \cdot 5 \text{ s} = v \cdot 10 \text{ s},$$

$$v = \frac{s}{10} \text{ s} = \frac{300 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 30 \text{ m/ s}.$$

Andrej Beljan (8),
OŠ Ivana Gorana Kovačića, Delnice

OŠ – 339. *Roveri Spirit i Opportunity su 7 godina istraživali površinu Marsa i slali podatke na Zemlju. Zemlja i Mars nisu uvijek jednako udaljeni. Najbliže su kad leže na istom pravcu sa Suncem i nalaze se na istoj strani Sunca. Taj položaj zovemo opozicija. Kada se nalaze na suprotnim stranama od Sunca kažemo da su u položaju konjunkcije i tada su najudaljeniji. Koliko dugo putuje radio signal koji je poslao jedan od rovera do Zemlje kad su Zemlja i Mars u opoziciji, a koliko kad su u konjunkciji? Brzina radio valova je 300 000 km/s. Zemlja je od Sunca udaljena prosječno 150 milijuna kilometara, a Mars 228 milijuna kilometara.*

Rješenje.

$$v = 300\,000 \text{ km/ s} = 3 \cdot 10^5 \text{ km/ s}$$

$$d_{\text{Z-S}} = 150\,000\,000 \text{ km} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$\underline{d_{\text{M-S}} = 228\,000\,000 \text{ km} = 228 \cdot 10^6 \text{ km}}$$

a) $t_o = ?$ b) $t_k = ?$

a) $$t_o = \frac{s}{v} = \frac{d_{\text{M-S}} - d_{\text{Z-S}}}{v},$$

$$t_o = \frac{228 \cdot 10^6 \text{ km} - 150 \cdot 10^6 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/ s}}$$

$$= \frac{78 \cdot 10^6 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/ s}} = 260 \text{ s};$$

b) $$t_k = \frac{s}{v} = \frac{d_{\text{M-S}} - d_{\text{Z-S}}}{v},$$

$$t_o = \frac{228 \cdot 10^6 \text{ km} + 150 \cdot 10^6 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/ s}}$$

$$= \frac{378 \cdot 10^6 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/ s}} = 1260 \text{ s}.$$

Andrej Beljan (8), Delnice

OŠ – 340. *Dvije su žice napravljene od istog materijala. Prva je trostruko dulja od druge, a druga je dvostruko deblja. Svaka žica povezuje krajeve dva jednaka izvora struje. Koliki je omjer jakosti struja kroz žice?*

Rješenje.

$$l_1 = 3l_2$$

$$d_1 = 2d_2$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

$$\underline{U_1 = U_2 = U}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = ?$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{U}{R_1}}{\frac{U}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{\rho l_2}{s_2}}{\frac{\rho l_1}{s_1}} = \frac{l_2 s_1}{l_1 s_2},$$

$$s_2 = 4s_1,$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{l_2 s_1}{3l_2 4s_1} = \frac{1}{12}.$$

Ur.

OŠ – 341. *Drvena kocka brida 10 centimetara je podijeljena na dva jednaka dijela. Unutar njih su napravljene dvije polukružne rupe koje točno odgovaraju veličini željezne kugle promjera 4 centimetra koja je stavljena u njih. Polovice drvene kocke su nakon toga zalijepljene. Kolike su masa i prosječna gustoća kocke nakon toga? Gustoća drva je 700 kg/m^3, a željeza 7900 kg/m^3.*

Rješenje.

$a_{\text{kocke}} = 10$ cm

$d_{\text{kugle}} = 4$ cm

$\rho_{\text{d}} = 700$ kg/ m^3, $\quad \rho_{\check{\text{z}}} = 7900$ kg/ m^3

$$V_{\check{\text{z}}} = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 2 \text{ cm}^3 \pi = 33.5 \text{ cm}^3,$$

$$m_{\check{\text{z}}} = \rho_{\check{\text{z}}} \cdot V_{\check{\text{z}}} = 7.9 \text{ g/ cm}^3 \cdot 33.5 \text{ cm}^3,$$

$$m_{\check{\text{z}}} = 264.6 \text{ g},$$

$$V_{\text{kocke}} = a^3 = (2 \text{ cm})^3 = 1000 \text{ cm}^3,$$

$$V_{\check{\text{s}}\text{uplje kocke}} = 1000 \text{ cm}^3 - 33.5 \text{ cm}^3,$$

$$V_{\check{\text{s}}\text{uplje kocke}} = 996.5 \text{ cm}^3,$$

$$m_{\text{d}} = \rho_{\text{d}} \cdot V_{\check{\text{s}}\text{k}} = 0.7 \text{ kg/ cm}^3 \cdot 996.5 \text{ cm}^3,$$

$$m_{\text{d}} = 676.5 \text{ g},$$

$$m_{\text{ukupna}} = m_{\check{\text{z}}} + m_{\text{d}} = 264.6 \text{ g} + 676.5 \text{ g},$$

$$m_{\text{ukupna}} = 941.1 \text{ g},$$

$$\rho_{\text{prosje}\check{\text{c}}\text{na}} = \frac{m_{\text{ukupna}}}{V_{\text{kocke}}} = \frac{941.1 \text{ g}}{1000 \text{ cm}^3},$$

$$\rho_{\text{prosje}\check{\text{c}}\text{na}} = 0.941 \text{ g/ cm}^3.$$

Marija Dražić Balev (8),
OŠ Tina Ujevića, Šibenik i
Klaudija Lokas (8), Šibenik

1497. *Horizontalni domet kosog hica uz početnu brzinu v_0 i kut izbačaja α iznosi 8000 m. Ako početnu brzinu hica povećamo za 8 m/s, domet će biti veći za 405 metara. Odredi kut izbačaja. Zanemari otpor zraka.*

Rješenje. Za domet D ovisno o kutu izbačaja i početnoj brzini vrijedi:

$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha),$$

Odatle uvrštavanjem oba slučaja vrijedi:

$$8000 = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{9.81},$$

$$8405 = \frac{(v_0 + 8)^2 \sin(2\alpha)}{9.81}.$$

Dijeljenjem jednadžbi dobijemo

$$\frac{v_0 + 8}{v_0} = \sqrt{\frac{8405}{8000}} = 1.025.$$

Odatle je $v_0 = 320$ m/ s i $\alpha = 25.016°$.

Gabrijela Pejkić (3),
Srednja škola Petrinja, Petrinja
Josip Jelić (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1498. *Radioaktivni uzorak sadrži dva izotopa, oba početne aktivnosti po 50 000 Bq (Bequerel = raspad u sekundi). Rezultati mjerenja ukupne aktivnosti uzorka nakon T minuta prikazani su tablicom:*

T	*A (Bq)*
0	*100 000*
13 min	*80 055*
26 min	*64 448*

Odredi vrijeme poluraspada oba izotopa. Kolika će biti aktivnost 2 sata nakon početne?

Rješenje. Zakon radioaktivnog raspada kaže da za početne aktivnosti A_0 i B_0 vrijedi:

$$A(t)/A_0 = 2^{-t/T_1},$$

$$B(t)/B_0 = 2^{-t/T_2}.$$

Uz supstituciju $x = 2^{-13/T_1}$ i $y = 2^{-13/T_2}$ vrijedi:

$$x + y = \frac{80\,055}{50\,000} = 1.6011,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{64\,448}{50\,000} = 1.28896.$$

Odatle slijedi $x = 0.86055 \rightarrow T_1 = 60$ minuta, $y = 0.74055 \rightarrow T_2 = 30$ minuta. Nakon 2 sata, aktivnost je $A(120) + B(120) = 12\,500 + 3125 = 15\,625$ Bq.

Ur.

1499. *Tijelo se nalazi na kosini kojoj možemo mijenjati kut nagiba. Pri kutu 30° tijelo ubrzava niz kosinu, a pri kutu 20° usporava jednakim iznosom. Odredi koeficijent trenja i iznos ubrzanja.*

Rješenje. Jednadžbe gibanja za oba slučaja glase:

$$ma = mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha,$$

$$-ma = mg \sin\beta - \mu mg \cos\beta.$$

Eliminacijom a nalazimo koeficijent trenja

$$\mu = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg} 25^\circ = 0.4663.$$

Akceleracija je tada $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 0.962\ \text{m/s}^2$.

Gabrijela Pejkić (3), Petrinja
Josip Jelić (3), Zagreb
Petar Jukić (2),
Gimnazija Dinka Šimunovića, Sinj

1500. *Zidni sat s njihalom ima bakreno njihalo učvršćeno na bakreni štap. Sat je ugođen tako da prati točno vrijeme na temperaturi* $20\,^\circ C$. *Koliko će sat dnevno kasniti na* $25\,^\circ C$? *Koeficijent linearnog rastezanja bakra je* $1.7\cdot 10^{-5}\ K^{-1}$.

Rješenje. Pri $20\,^\circ$C duljina njihala neka je l_0 i vrijedi

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$

Pri $25\,^\circ$C duljina njihala neka je l i vrijedi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Iz ovisnosti duljine o temperaturi

$$l = l_0(1+\beta\Delta t),$$

dijeljenjem druge jednadžbe prvom slijedi

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{l}{l_0}} = \sqrt{1+\beta\Delta t}.$$

Razlika u hodu satova je

$$\Delta T = T - T_0 = T_0(\sqrt{1+\beta\Delta t} - 1),$$

što uvrštavanjem $T_0 = 24$ sata, $\beta = 1.7\cdot 10^{-5}\ \text{K}^{-1}$ i $\Delta t = 5$ K daje dnevno odstupanje

$$\Delta T = 3.672\ \text{s}.$$

Josip Jelić (3), Zagreb

1501. *Od jantara indeksa loma 1.550 izbrušena je konvergentna leća žarišne daljine 9 cm (u zraku). Kolika je jačina i žarišna daljina iste leće uronjene u vodu indeksa loma 1.333? Indeks loma zraka je 1.003.*

Rješenje. Jačina i žarišna daljina leće određeni su izrazom:

$$J = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Odatle u zraku vrijedi

$$\frac{1}{0.09} = \frac{1.550 - 1.003}{1.003}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

a u vodi

$$\frac{1}{f'} = \frac{1.550 - 1.333}{1.333}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Eliminacijom zagrade s geometrijskim svojstvima leće slijedi

$$f' = 0.09\cdot\frac{1.550 - 1.333}{1.333}\cdot\frac{1.003}{1.550 - 1.003}$$
$$= 0.2985\ \text{m}.$$

Jačina je $J = \dfrac{1}{f'} = 3.35$ dpt.

Gabrijela Pejkić (3), Petrinja

1502. *Koliko naboja je potrebno da se elektrolizom izluči 1 kg aluminija? Koliko bi elementarnog magnezija dobili elektrolizom uz istu količinu naboja?*

Rješenje. Elementarni aluminij dobijemo redukcijom $\text{Al}^{3+} + 3e^- \to \text{Al}$, što znači da je potreban naboj

$$Q = \frac{mZF}{M} = \frac{1\ \text{kg}\cdot 3\cdot 96\,500\ \text{C/mol}}{0.027\ \text{kg/mol}}$$
$$= 10\,730\,000\ \text{C}.$$

Magnezij je dvovalentni metal, pa uz $\text{Mg}^{2+} + 2e^- \to \text{Mg}$ imamo ($Z = 2$, $M(\text{Mg}) = 0.0243$ kg/mol):

$$m(\text{Mg}) = \frac{M(\text{Mg})\cdot Q}{Z\cdot F} = 1.352\ kg.$$

Gabrijela Pejkić (3), Petrinja

1503. *Odredi ubrzanje sile teže na površini nebeskog tijela oblika kugle radijusa* R *i jednolike gustoće* ρ. *Provjeri izraz na primjeru Zemlje, uz srednju gustoću* $5520\ kg/m^3$ *i radijus 6371 km.*

Rješenje. Na površini vrijedi:

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \implies g = G\frac{M}{R^2}.$$

Uz $M = \rho V = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$, vrijedi

$$g = \frac{4}{3}\rho\pi RG = 9.8256\ \text{m/s}^2.$$

Josip Jelić (3), Zagreb