Međunarodno matematičko natjecanje "Klokan bez granica" 2012. g.

Pod pokroviteljstvom Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta i Hrvatskog matematičkog društva, ove godine je natjecanje održano po *četrnaesti put* u Hrvatskoj 15. ožujka u 12 sati i 30 minuta. U isto vrijeme, s približno istim zadacima, natjecalo se više od 6 800 000 učenika u 51 zemlji svijeta: učenici Armenije, Austrije, Belgije, Bugarske, Brazila, Bjelorusije, Kanade, Švicarske, Cipra, Češke, Njemačke, Ekvadora, Estonije, Španjolske, pokrajine Katalonije, Finske, Francuske, Gruzije, Grčke, Hrvatske, Mađarske, Irana, Italije, Kirgistana, Kazahstana, Litve, Moldavije, Makedonije, Meksika, Nizozemske, Norveške, Pakistana, Poljske, Porto Rika, Portugala, Paragvaja, Rumunjske, Srbije, Rusije, Sjedinjenih Američkih Država, Slovenije, Slovačke, Švedske, Ukrajine, Velike Britanije i Venezuele. Kao novi članovi pridružili su se učenici Obale Bjelokosti, Kolumbije, Indonezije, Mongolije i Tunisa, što ovo natjecanje čini najvećim školskim natjecanjem u svijetu.

U Hrvatskoj je natjecanje održano u 287 osnovnih i 69 srednjih škola u svim županijama, a učenici su se natjecali podijeljeni u šest kategorija:

PČELICE	– II. razred osnovne škole – (4091 učenik) – **P**
LEPTIRIĆI	– III. razred osnovne škole – (4123 učenika) – **L**
ECOLIERS	– IV. i V. razred osnovne škole – (6917 učenika) – **E**
BENJAMINS	– VI. i VII. razred osnovne škole – (5426 učenika) – **B**
CADETS	– VIII. razred osnovne i I. razred srednje škole – (3001 učenika) – **C**
JUNIORS	– II. i III. razred srednje škole – (1451 učenika) – **J**
STUDENTS	– IV. razred srednjih škola – (523 učenik) – **S**

Ukupno se natjecalo 25 532 učenika.

Prilikom dolaska na natjecanje svaki je učenik dobio "poklon za svakoga", a 10% najbolje plasiranih učenika dobilo je i nagrade. Podijeljeno je *2588 nagrada i 723 utješne nagrade*.

Učenici srednjih škola rješavaju 24 zadatka 75 minuta pod sljedećim uvjetima:

– Natjecanje je pojedinačno. Računala su zabranjena.

– Svaki zadatak ima pet ponuđenih odgovora od kojih je samo jedan točan.

– Prvih osam pitanja donosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova.

– Ako nijedan odgovor nije zaokružen ili su zaokružena dva ili više odgovora zadatak donosi 0 bodova.

– Ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak.

– U početku svaki učenik dobiva 24 boda tako da nema negativnih bodova.

– Svaki sudionik u natjecanju dobiva simboličan dar, a deset posto najboljih i dodatnu nagradu.

Ove godine bodovni prag najboljih 10% sudionika je: za “Cadet” – 76.25 bodova; “Junior” – 65 bodova; “Junior” – matematički program 82.50 bodova; “Student” 65.25 bodova; “Student” – matematički program 83.75 bodova.

Zainteresirani učenici mogu provjeriti svoje znanje na sljedećim zadacima s ovogodišnjeg natjecanja.

Sljedeće natjecanje će biti održano **21. ožujka 2013. godine**, s početkom u **12 sati i 30 minuta**. Učenici zainteresirani za natjecanje mogu se prijaviti svojim profesorima matematike *najkasnije* do **2. veljače 2013. godine.**

Koordinator natjecanja, Neda Lukač, prof.

Zadaci za učenike 8. razreda osnovne i 1. razreda srednje škole (Cadet)

Pitanja za 3 boda:

1. Četiri čokolade koštaju 6 € više od jedne čokolade. Koliko košta jedna čokolada?

A. 1 € **B.** 2 € **C.** 3 € **D.** 4 € **E.** 5 €

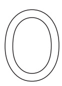
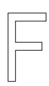
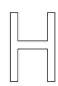
Rješenje: B.

2. Na stolu leži zidni sat. Vidimo da je njegova kazaljka za minute u smjeru sjeveroistoka. Za koliko će minuta ista kazaljka biti u smjeru sjeverozapada?

A. 45 **B.** 40 **C.** 30 **D.** 20 **E.** 15

Rješenje: A. Za sjeveroistok kazaljka pokazuje 7.5 minuta poslije punog sata, sjeverozapad je 7.5 minuta prije sljedećeg punog sata. Na primjer od 12 sati i $7.5'$ do 12 sati $52'$.

3. Marija ima škare i 5 slova izrezanih od kartona (vidi sliku). Ako svako od ovih slova prereže jednom ravnom linijom, koje će se raspasti na najviše dijelova?

A.  **B.**  **C.**  **D.**  **E.** 

Rješenje: E.

4. Zmaj ima 5 glava. Svaki put kad mu se odsiječe jedna glava na njenom mjestu izraste pet novih glava. Ako mu sasiječemo šest glava jednu za drugom koliko će glava imati zmaj na kraju?

A. 25 **B.** 28 **C.** 29 **D.** 30 **E.** 35

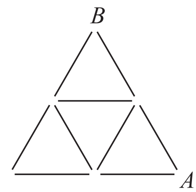
Rješenje: C. Zmaju se broj glava povećava za 4.

5. U kojem od sljedećih izraza sve brojeve 8 možemo zamijeniti istim pozitivnim brojem različitim od 8, tako da vrijednost izraza ostane ista?

A. $(8+8):8+8$ **B.** $8\cdot(8+8):8$ **C.** $8+8-8+8$ **D.** $(8+8-8)\cdot 8$ **E.** $(8+8-8):8$

Rješenje: E. $(8+8-8):8=1$ bez obzira o kojem se broju radi.

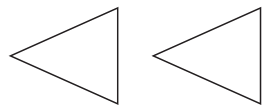
6. U parku je svaka od 9 staza dugačka 100 m. Ana želi stići od točke A do točke B bez da ide istom stazom dva puta. Koliko metara mora prijeći, ako je odabrala najduži put?



A. 900 m **B.** 800 m **C.** 700 m **D.** 600 m **E.** 400 m

Rješenje: C. Ana se kreće: lijevo, pa desno gore, lijevo, desno dolje, lijevo, desno gore, desno gore.

7. Na slici su dva trokuta. Na koliko različitih načina možemo spojiti dužinom vrhove ta dva trokuta, tako da ta dužina ne siječe niti jedan od trokuta?



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** više od 4

Rješenje: D.

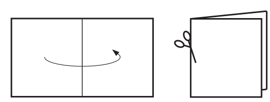
8. 11.11 − 1.111

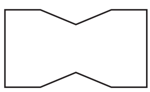
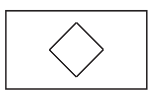
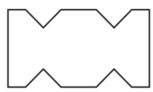
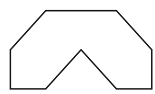
A. 9.009 **B.** 9.0909 **C.** 9.99 **D.** 9.999 **E.** 10

Rješenje: D.

Pitanja za 4 boda:

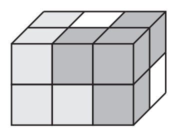
9. Vlado je preklopio list (kao na slici), a zatim ga dvaput ravno zarezao škarama. Kad je rasklopio taj list papira koji od prikazanih likova nije mogao dobiti?

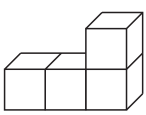
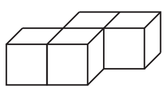
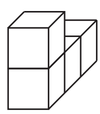
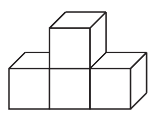
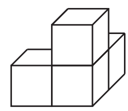


A.  **B.**  **C.**  **D.**  **E.** 

Rješenje: D. Da bi dobio lik D trebao bi rezati 4 puta.

10. Kvadar je sastavljen od tri dijela (vidi crtež). Svaki dio sadrži 4 kocke istih boja. Koji je dio bijele boje?



A.  **B.**  **C.**  **D.**  **E.** 

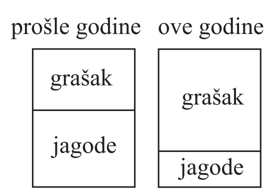
Rješenje: D.

11. Koristeći svaku od znamenaka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 samo jednom, možemo napisati dva četveroznamenkasta prirodna broja. Odredimo brojeve čiji je zbroj najmanji. Kolika je vrijednost tog zbroja?

A. 2468 **B.** 3333 **C.** 3825 **D.** 4734 **E.** 6912

Rješenje: C. $1357 + 2468 = 3825$.

12. Gospođa Vrtović uzgaja grašak i jagode. Ove je godine pravokutno polje graška produžila za 3 metra, čime je ono poprimilo oblik kvadrata, a zbog toga se površina polja s jagodama smanjila za 15 m^2. Kolika je bila početna površina polja graška?



A. 5 m^2 **B.** 9 m^2 **C.** 10 m^2 **D.** 15 m^2 **E.** 18 m^2

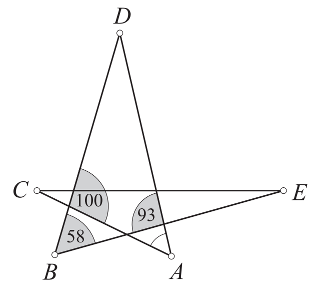
Rješenje: C. Ako je produljila za 3 m, a površina pod jagodama se smanjila 15 m^2, znači da je polje široko 5 m. Da je kvadrat površina bi mu bila 25 m^2, ali budući je bilo kraće površina pod graškom je 10 m^2.

13. Barbara želi popuniti sljedeći dijagram tako da napiše tri broja po jedno u svaku praznu ćeliju. Pri tome ona želi da zbroj prva tri broja u dijagramu bude 100, zbroj srednja tri broja 200, a zbroj zadnja tri broja dijagrama 300. Koji broj mora Barbara napisati u sredinu dijagrama?

10				130

A. 50 **B.** 60 **C.** 70 **D.** 75 **E.** 100

Rješenje: B. Označimo brojeve u sredini redom x, y, z. Tada je: $10 + x + y = 100$, $x = 90 - y$; $130 + y + z = 300$, $z = 170 - y$; $x + y + z = 200$, $y = 60$.



14. Slika prikazuje peterokraku zvijezdu. Koliki je kut kod vrha A?

A. 35° **B.** 42° **C.** 51° **D.** 65° **E.** 109°

Rješenje: C. Kut kod vrha D je $180° - (58° + 93°) = 29°$, onda je kut kod vrha A $180° - (100° + 29°) = 51°$.

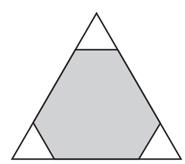
15. Brojevi 2, 5, 7 i 12 napisani su na prednjoj strani karata (jedan broj na samo jednoj karti), a na stražnjoj strani istih karata su tvrdnje: "djeljiv sa 7", "prosti broj", "neparan", "veći od 100" (svaka tvrdnja na samo jednoj karti). Znamo da broj na prednjoj strani karte NE ODGOVARA tvrdnji na stražnjoj. Koji je broj napisan na karti kojoj na stražnjoj strani piše "veći od 100"?

A. 2 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 12 **E.** ne može se odrediti

Rješenje: C.

"djeljiv sa 7",	"prosti broj",	"neparan",	"veći od 100"
5	12	2	7

16. Tri jednakostranična trokuta istih veličina odsječena su u vrhovima velikog jednakostraničnog trokuta stranice 6 cm (vidi sliku). Ako zbrojimo opseg sva tri mala trokuta on je jednak opsegu sivog šesterokuta. Kolika je duljina stranice malog trokuta?



A. 1 cm **B.** 1.2 cm **C.** 1.25 cm **D.** 1.5 cm **E.** 2 cm

Rješenje: D. Opseg tri mala trokuta je $9x$. Opseg šesterokuta je $3(6 - 2x) + 3x$; $9x = 3(6 - 2x) + 3x$, $12x = 18$, $x = 1.5$ cm.

Pitanja za 5 bodova:

17. Miševi cijeli dan kradu sir narezan na komade. Promatra ih lijeni mačak Sivko, koji je uočio sljedeće: svaki je miš ukrao različit broj komada sira, manji od 10, te niti jedan miš nije uzeo točno dvostruko više komada od drugog miša. Koliko je najviše miševa mogao vidjeti mačak Sivko?

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7 **E.** 8

Rješenje: C. Prvi miš je uzeo 1 komad sira, drugi 3 komada, treći 4 komada, četvrti 5 komada, peti 7 komada i šesti 9 komada sira.

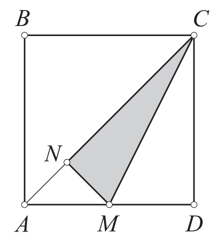
18. Robert ima 5 kocaka. Kada ih je složio jednu do druge od najmanje do najveće uočio je da se svake dvije susjedne kocke razlikuju po visini za 2 cm. Najveća kocka ima visinu kao i toranj koji sagradimo ako najmanje dvije kocke stavimo jednu na drugu. Ako stavimo svih 5 kocaka jednu na drugu koliko je visok tako dobiveni toranj?

A. 6 cm **B.** 14 cm **C.** 22 cm **D.** 44 cm **E.** 50 cm

Rješenje: E. Najmanje kocke imaju visine x i $x+2$, a najveća ima visinu $x+8$. visina najmanje kocke je 6. Zbrojimo li $6+8+10+12+14=50$.

19. Izračunaj omjer između površine sivog trokuta MNC i površine kvadrata $ABCD$, ako je M polovište dužine AD i MN je okomito na AC.

A. 1 : 6 **B.** 1 : 5 **C.** 7 : 36 **D.** 3 : 16 **E.** 7 : 40



Rješenje: D. $|AD|=a$; $|AN|=|MN|=x$, $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$; $y=d-x=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. Površina trokuta je $P=\dfrac{x\cdot y}{2}=\dfrac{3a^2}{16}$ a površina kvadrata $P=a^2$.

20. Na nekoj plesnoj večeri ima manje od 50 osoba. Pleše se tango u parovima (jedan muškarac s jednom ženom). U jednom trenutku $\dfrac{3}{4}$ muškaraca pleše s $\dfrac{4}{5}$ žena. Koliko osoba pleše u tom trenu?

A. 20 **B.** 24 **C.** 30 **D.** 32 **E.** 46

Rješenje: B. Broj muškaraca mora biti djeljiv s 4, a žena s 5. Tražimo isti broj muškaraca i žena koji plešu.

muškarci	4	8	12	16	20	24		žene	5	10	15	20	25
3/ 4 muškaraca	3	6	9	**<u>12</u>**	15	18		4/ 5 žena	4	8	**<u>12</u>**	16	20

21. Neki troznamenkasti brojevi imaju sljedeća svojstva: maknemo li prvu znamenku dvoznamenkasti broj koji ostaje je puni kvadrat, maknemo li zadnju znamenku dvoznamenkasti broj koji ostaje je puni kvadrat. Koliki je zbroj svih takvih brojeva?

A. 1013 **B.** 1177 **C.** 1465 **D.** 1993 **E.** 2016

Rješenje: D. To su brojevi: 164, 364, 649 i 816, njihov zbroj je 1993.

22. Na aerodromu se nalazi pokretna traka duljine 500 m koja se kreće brzinom od 4 km/ h. Ana i Branko istovremeno su zakoračili na traku. Dok je Branko ostao stajati na njoj, Ana je nastavila hodati po traci brzinom od 6 km/ h u odnosu na traku. Koliko je Ana bila ispred Branka u trenutku kad je sišla s trake?

A. 100 m **B.** 160 m **C.** 200 m **D.** 250 m **E.** 300 m

Rješenje: E. Ana se kretala brzinom 10 km/ h u odnosu na tlo i 500 m je prešla za $t=\dfrac{s}{t}=\dfrac{1}{20}h$. Za to vrijeme, Branko se kretao 4 km/ h u odnosu na tlo i prošao je $s=vt=4\cdot\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{5}$ km $=200$ m. Ana je bila $500-200=300$ m ispred Branka.

23. Jednakostraničan trokut rotira oko središta: za 3°, za 9°, pa 27°,...(nakon n koraka kut će biti jednak $(3^n)^\circ$. Koliko različitih položaja (uključujući i početni) može imati taj trokut takvim rotacijama?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 360

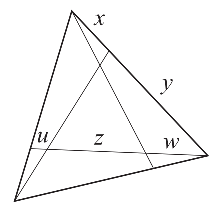
Rješenje: B. $3^\circ + 9^\circ + 27^\circ + 81^\circ = 120^\circ$. Početni vrh se zarotira u susjedni vrh.

24. Veliki jednakostranični trokut razdijeljen je sukladnim dužinama na 4 trokuta i 3 četverokuta. Suma opsega svih četverokuta je 25 cm, a suma opsega svih četiriju nastalih trokuta je 20 cm. Opseg početnog, velikog trokuta je 19 cm. Kolika je suma duljina dužina kojima je trokut razdijeljen?

A. 11 **B.** 12 **C.** 13 **D.** 15 **E.** 16

Rješenje: C.

Uvedimo oznake kao na slici. Vrijedi:

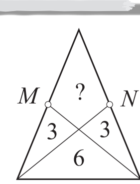


$$3(y+w+z+u) = 25$$
$$3z + 3(x+u+w) = 20$$
$$3(x+y) = 19.$$

Traži se $3(u+z+w)$. Označimo taj izraz s T. Imamo sustav: $3y+T=25$, $3x+T=20$, $3(x+y)=19$. Slijedi, $T = 13$ cm.

Zadaci za učenike 2. i 3. razreda srednje škole (Junior)

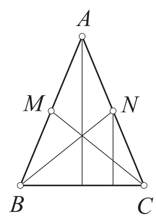
Pitanja za 3 boda:



1. Točke M i N su polovišta krakova jednakokračnog trokuta. Kolika je površina četverokuta označenog s "?"?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 7

Rješenje: D.



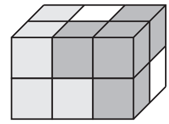
Visina v_1 iz točke N na osnovicu $\overline{BC}$ zadanog jednakokračnog trokuta ima duljinu jednaku polovini visine v na osnovicu $\overline{BC}$. Površina trokuta NBC jednaka je zbroju površina dvaju manjih trokuta i iznosi $6+3=9$. Trokut NBC i trokut ABC imaju zajedničku stranicu $\overline{BC}$, s pripadajućom visinom v, odnosno v_1. Kako je visina v dva puta dulja od visine v_1, to je i površina trokuta ABC dva puta veća od površine trokuta NBC. Znači, površina trokuta ABC iznosi 18. Oduzimanjem poznatih površina sa slike, slijedi da je površina četverokuta označenog s "?" jednaka $18-6-3-3=6$.

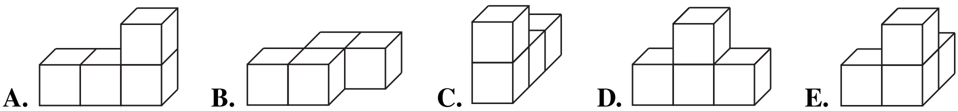
2. $11.11 - 1.111 =$

A. 9.009 **B.** 9.0909 **C.** 9.99 **D.** 9.999 **E.** 10

Rješenje: D.

3. Kvadar je složen od tri dijela različitih boja (slika). Svaki dio sastoji se od 4 kocke istih boja. Kako izgleda dio bijele boje? sadrži 4 kocke istih boja. Koji je dio bijele boje?





Rješenje: D.

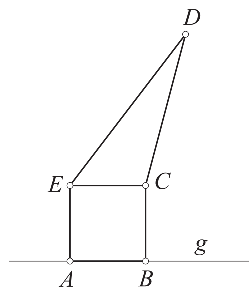
4. Kada Alica želi poslati Borisu poruku, koristi sljedeće njima dobro poznato kodiranje: $A = 01$, $B = 02$, $C = 03$, $D = 04$,..., $Z = 26$. Nakon pretvaranja svakog slova u broj, množi broj brojem 2 i dodaje 9. Tako je poruka pretvorena u niz brojeva. Danas je Boris primio niz $25 - 19 - 45 - 38$ i dešifrirao ga. Koja je bila početna poruka?

A. *HERO* **B.** *HELP* **C.** *HEAR* **D.** *HERS* **E.** Alica je napravila pogrešku

Rješenje: E. $(25 - 9) : 2 = 16 : 2 = 8 \rightarrow H$, $(19 - 9) : 2 = 10 : 2 = 5 \rightarrow E$, $(45 - 9) : 2 = 36 : 2 = 18 \rightarrow R$. Zadnji broj u nizu trebao bi, kao i svi prethodni, biti neparan (zbog dodavanja broja 9 parnom broju). Prema tome, Alica je napravila pogrešku.

5. Kvadrat $ABCE$ ima stranice duljine 4 cm i površinu jednaku površini trokuta ECD. Kolika je udaljenost točke D od pravca g?

A. 8 cm **B.** $(4 + 2\sqrt{3})$ cm **C.** 12 cm **D.** $10\sqrt{2}$ cm **E.** ovisi o položaju točke D



Rješenje: C. Površina kvadrata iznosi 16 cm^2. Trokut ECD ima također površinu 16 cm^2 i zajedničku stranicu s kvadratom. Duljina visine na zajedničku stranicu $\overline{EC}$ iznosi 8 cm. Udaljenost točke D od pravca g jednaka je $8 + 4 = 12$ cm.

6. Zbroj svih znamenaka sedmeroznamenkastog prirodnog broja iznosi 6. Koliki je umnožak svih znamenaka tog broja?

A. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ **B.** 7 **C.** 6 **D.** 5 **E.** 0

Rješenje: E.

7. Trokut ABC je pravokutni trokut s katetama duljina 6 cm i 8 cm, a točke K, L i M su polovišta njegovih stranica. Koliki je opseg trokuta KLM?

A. 10 cm **B.** 12 cm **C.** 15 cm **D.** 20 cm **E.** 24 cm

Rješenje: B. Duljina hipotenuze u trokutu ABC je 10 cm. Dužine $\overline{KL}$, $\overline{LM}$ i $\overline{MK}$ su srednjice trokuta ABC i njihove duljine su polovine duljina stranica trokuta ABC. Opseg trokuta KLM iznosi $3 + 4 + 5 = 12$ cm.

8. U četirima od sljedećih izraza možemo svaki broj 8 zamijeniti nekim drugim prirodnim brojem (koristeći uvijek isti broj za zamjenu) i dobiti iste rezultate. Koji izraz nema to svojstvo?

A. $(8+8-8):8$ **B.** $8+(8:8)-8$ **C.** $8:(8+8+8)$ **D.** $8-(8:8)+8$ **E.** $8\cdot(8:8):8$

Rješenje: D. Zamijenimo li broj 8 brojem a, vidjet ćemo da samo izraz **D.** ovisi o broju a: **A.** $(a+a-a):a=1$, **B.** $a+(a:a)-a=1$, **C.** $a:(a+a+a)=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$, **D.** $a-(a:a)+a=2a-1$, **E.** $a\cdot(a:a):a=1$.

Pitanja za 4 boda:

9. Dvije stranice četverokuta imaju duljine 1 cm i 4 cm. Dijagonala duljine 2 cm dijeli četverokut na dva jednakokračna trokuta. Koliki je opseg četverokuta?

A. 8 cm **B.** 9 cm **C.** 10 cm **D.** 11 cm **E.** 12 cm

Rješenje: D. Stranice četverokuta imaju duljine 4 cm, 4 cm, 2 cm i 1 cm. Opseg četverokuta iznosi 11 cm.

10. Brojevi 144 i 220 pri dijeljenju istim prirodnim brojem x daju ostatak 11. Odredi x.

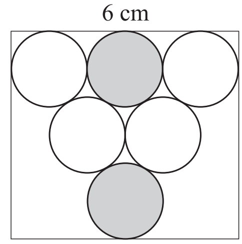
A. 7 **B.** 11 **C.** 15 **D.** 19 **E.** 38

Rješenje: D. Brojevi 144 i 220 umanjeni za ostatak 11 iznose redom 133 i 209. Zajednički djelitelj brojeva 133 i 209, različit od 1, je 19.

11. Ako Antonio stoji na stolu, a Marin na podu, Antonio je za 80 cm viši od Marina. Ako Marin stoji na istom stolu, a Antonio na podu, Marin je za 1 m viši od Antonia. Koliko je visok stol?

A. 20 cm **B.** 80 cm **C.** 90 cm **D.** 100 cm **E.** 120 cm

Rješenje: C. Neka je t visina stola, M Marinova visina, A Antonijeva visina. Tada vrijedi: $M+80=A+t$ i $M+t=A+100$. Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi lako se dobije da je $t=90$, odnosno visina stola iznosi 90 cm.



12. U pravokutnik s jednom stranicom duljine 6 cm upisano je 6 krugova kao na slici. Koja je udaljenost između dva siva kruga?

A. 1 cm **B.** $\sqrt{2}$ cm **C.** $(2\sqrt{3}-2)$ cm **D.** $\frac{\pi}{2}$ cm **E.** 2 cm

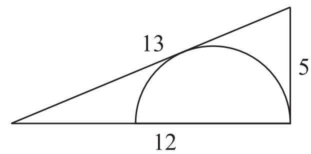
Rješenje: C. Dužine koje spajaju središta lijevog i desnog kruga u gornjem redu pravokutnika i središte donjeg sivog kruga čine stranice jednakostraničnog trokuta. Duljina stranice tog jednakostraničnog trokuta iznosi 4 cm. Visina tog jednakostraničnog trokuta računa se po formuli $v=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ i iznosi $2\sqrt{3}$ cm. Udaljenost između dva siva kruga iznosi $(2\sqrt{3}-2)$ cm.

13. Na svakom zidu Brankove sobe nalazi se po jedan sat i nijedan od njih ne pokazuje točno vrijeme (ili žure ili zaostaju). Prvi sat griješi u točnosti dvije minute, drugi tri minute, treći 4 minute, a četvrti 5 minuta. U jednom trenutku, kada je Branko pogledao na satove, oni su pokazivali: 6 minuta do 3 sata, 3 minute do 3 sata, 3 sata i 2 minute, 3 sata i 3 minute. Točno vrijeme je bilo:

A. 3 : 00 **B.** 2 : 57 **C.** 2 : 58 **D.** 2 : 59 **E.** 3 : 01

Rješenje: D. Ako je točno vrijeme 3 : 00, onda nema netočnosti od 5 minuta. Ako je točno vrijeme 2 : 57, onda bi jedan od satova pokazivao točno vrijeme, što je u kontradikciji s podatkom da nijedan od njih ne pokazuje točno vrijeme. Ako je točno vrijeme 2 : 58, onda jedan sat griješi u točnosti za jednu minutu, a to nije karakteristika nijednog od satova. Isto tako je i ako je točno vrijeme 3 : 01. Prema tome, točno vrijeme je 2 : 59.

14. Na slici je pravokutni trokut sa stranicama duljina 5 cm, 12 cm i 13 cm. Koliki je radijus ucrtane polukružnice?



A. $\frac{7}{3}$ cm **B.** $\frac{10}{3}$ cm **C.** $\frac{12}{3}$ cm **D.** $\frac{13}{3}$ cm **E.** $\frac{17}{3}$ cm

Rješenje: B. Nadopunimo li pravokutni trokut sukladnim trokutom, dobit ćemo jednakokračni trokut s krakovima duljine 13 cm i osnovicom duljine 10 cm. Površina tog jednakokračnog trokuta iznosi 60 cm^2, a radijus ρ njemu upisane kružnice $\rho = \frac{P}{s} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$ cm.

15. Znamenka stotica četveroznamenkastog broja je 3, a zbroj preostale tri znamenke također iznosi 3. Koliko takvih brojeva ima?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6

Rješenje: E. To su brojevi: 1302, 1311, 1320, 2301, 2310 i 3300.

16. U 12 polja treba upisati brojeve od 1 do 9 tako da su zbrojevi po retcima jednaki, te zbrojevi po stupcima jednaki (zbrojevi po stupcu i retku ne moraju biti međusobno jednaki). Neki su brojevi već upisani. Koji broj treba upisati u osjenčano polje?

2	4		2
	3	3	
6		1	

A. 1 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8 **E.** 9

Rješenje: B.

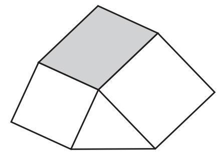
Pitanja za 5 bodova:

17. Tri sportaša Mate, Šime i Ive sudjeluju u maratonu. Prije početka utrke četiri gledatelja raspravljala su o njihovim šansama za pobjedu. Prvi je izjavio: "Pobijedit će Mate ili Šime". Drugi je izjavio: "Ako će Šime biti drugi, Ive će pobijediti". Treći je izjavio: "Ako će Šime biti treći, Mate neće pobijediti". Četvrti je izjavio: "Šime ili Ive bit će drugi". Po završetku utrke ispostavilo se da su sva četiri gledatelja bila u pravu. U kojem su redoslijedu maratonci završili utrku?

A. Mate, Šime, Ive **B.** Mate, Ive, Šime **C.** Ive, Šime, Mate
D. Šime, Ive, Mate **E.** Šime, Mate, Ive

Rješenje: D. Ako je tvrdnja A točna, onda drugi gledatelj nije u pravu. Ako je tvrdnja B točna, onda treći gledatelj nije u pravu. Ako je tvrdnja C točna, onda prvi gledatelj nije u pravu. Ako je tvrdnja E točna, onda četvrti gledatelj nije u pravu. Točna je tvrdnja D i izjave svih četiriju gledatelja su točne.

18. Duljine stranica kvadrata na slici su 4 cm i 5 cm, površina trokuta je $8\ \text{cm}^2$. Kolika je površina osjenčanog paralelograma?



A. $15\ \text{cm}^2$ **B.** $16\ \text{cm}^2$ **C.** $18\ \text{cm}^2$ **D.** $20\ \text{cm}^2$ **E.** $21\ \text{cm}^2$

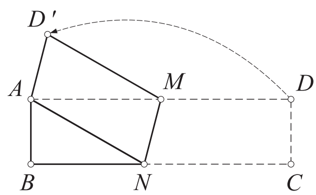
Rješenje: B. Duljine stranica trokuta su 4 cm i 5 cm. Neka je kut između tih dviju stranica α. Tada je kut paralelograma kod zajedničkog vrha s trokutom veličine $360° - 90° - 90° - \alpha = 180° - \alpha$, a susjedni kut paralelograma je α. Dijagonala paralelograma iz zajedničkog vrha s trokutom dijeli paralelogram na dva sukladna trokuta sa stranicama duljina 4 cm i 5 cm i kutom α između tih stranica. Prema tome, površina paralelograma jednaka je $P = 2 \cdot 8 = 16\ \text{cm}^2$.

19. Ana je napisala $2012 = m^m \cdot (m^k - k)$ pri čemu su m i k neki prirodni brojevi. Koja je vrijednost broja k?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 9 **E.** 11

Rješenje: D. Rastavom broja 2012 na proste faktore dobit ćemo $2012 = 2^2 \cdot 503 = 2^2(2^9 - 9)$. Prema tome, $k = 9$.

20. Papir $ABCD$ oblika pravokutnika sa stranicama duljina 4 cm i 16 cm presavijen je preko pravca MN tako da se vrh C poklopio s vrhom A, kao što je prikazano na slici. Kolika je površina peterokuta $ABNMD'$?



A. $17\ \text{cm}^2$ **B.** $27\ \text{cm}^2$ **C.** $37\ \text{cm}^2$ **D.** $47\ \text{cm}^2$ **E.** $57\ \text{cm}^2$

Rješenje: D. Neka je $|BN| = x$, tada je $|CN| = |NA| = 16 - x$. Za duljine stranica pravokutnog trokuta ABN vrijedi: $4^2 + x^2 = (16 - x)^2$, a odatle je $x = |BN| = 7.5$ cm i $|CN| = 8.5$ cm. Pravac AN je presječnica usporednih pravaca BC i AD pa je $\sphericalangle BNA \cong \sphericalangle NAM$, a pravac AD je presječnica usporednih pravaca AN i MD' pa je $\sphericalangle NAM \cong \sphericalangle AMD'$. U trokutima ABN i $AD'M$ imamo tri para sukladnih kutova ($\sphericalangle BNA \cong \sphericalangle AMD'$, $\sphericalangle NBA \cong \sphericalangle AD'M = 90°$) i jedan par stranica jednake duljine $|AB| = |AD'|$, pa su trokuti ABN i $AD'M$ sukladni (poučak KSK). Sukladni trokuti imaju jednake površine, pa se površina peterokuta ABNMD' može izračunati zbrajanjem površina trokuta ABN, $AD'M$ i ANM. $P(ABN) = P(AD'M) = \dfrac{4 \cdot 7.5}{2} = 15\ \text{cm}^2$. Trokut ANM je trokut u kojem je visina na stranicu $\overline{AM}$ jednake duljine kao i kraća stranica pravokutnika $ABCD$, pa je $P(ANM) = \dfrac{|AM| \cdot |AB|}{2} = \dfrac{8.5 \cdot 4}{2} = 17\ \text{cm}^2$. Dakle, $P(ABNMD') = 15 + 15 + 17 = 47\ \text{cm}^2$.

21. Posljednja znamenka različita od nule, broja $K = 2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$, je:

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6 **E.** 9

Rješenje: C. $K = 2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53} = (2 \cdot 5)^{53} \cdot 2^6 \cdot 3^4 = 10^{53} \cdot 64 \cdot 81 = 10^{53} \cdot 5184$. Posljednja znamenka različita od nule broja K je 4.

22. Svaka od 5 svjetiljki može biti ugašena ili upaljena. Na početku sve su svjetiljke bile ugašene. Nakon 10 paljenja ili gašenja može se reći:

A. nemoguće je da su sve svjetiljke ugašene **B.** sigurno su sve svjetiljke upaljene
C. nemoguće je da su sve svjetiljke upaljene **D.** sigurno su sve svjetiljke ugašene
E. nijedna od prethodnih izjava nije točna

Rješenje: C.

23. Nikola je ispisao sve troznamenkaste brojeve i za svaki od njih odredio umnožak znamenaka. Nakon toga odredio je i zbroj svih tih umnožaka. Koji je zbroj dobio?

A. 45 **B.** 45^2 **C.** 45^3 **D.** 2^{45} **E.** 3^{45}

Rješenje: C. Umnožak znamenaka troznamenkastog broja kojemu je znamenka desetica ili znamenka jedinica jednaka nuli iznosi 0. Takvi brojevi neće utjecati na ukupni zbroj svih umnožaka.

Promatrajući brojeve prve stotice lako se vidi da zbroj umnožaka znamenaka brojeva 111, 112, 113,...,118, 119 iznosi $1+2+3+\ldots+8+9=45$, zbroj umnožaka znamenaka brojeva 121, 122, 123,...,128, 129 iznosi $2\cdot(1+2+3+\ldots+8+9)=2\cdot 45$, analogno, sljedeći zbrojevi umnožaka su $3\cdot 45$, $4\cdot 45$,..., $8\cdot 45$ i $9\cdot 45$.

Ukupan zbroj umnožaka prve stotice iznosi

$$45+2\cdot 45+3\cdot 45+\ldots+8\cdot 45+9\cdot 45=45\cdot(1+2+3+\ldots+8+9)=45^2.$$

Za brojeve druge stotice taj je zbroj umnožaka dvostruko veći (zbog znamenke stotice 2) i iznosi $2\cdot 45^2$.

Analogno, za ostale su troznamenkaste brojeve zbrojevi umnožaka znamenaka jednaki $3\cdot 45^2$, $4\cdot 45^2$,..., $8\cdot 45^2$ i $9\cdot 45^2$. Konačni zbroj svih umnožaka iznosi $45^2+2\cdot 45^2+3\cdot 45^2+\ldots+8\cdot 45^2+9\cdot 45^2=45^2(1+2+3+\ldots+8+9)=45^3$.

24. Brojevi 1 do 120 upisani su u 15 redaka kao što je prikazano na slici. U kojem je stupcu (brojeći slijeva) zbroj brojeva najveći?

1								
2	3							
4	5	6						
7	8	9	10					
11	12	13	14	15				
⋮								
106	107	108	109	110	111	112	...	120

A. 1 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 10 **E.** 13

Rješenje: B. Brojevi u 1. stupcu su: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67, 79, 92 i 106, a njihov zbroj iznosi 575.

Brojevi u 5. stupcu su: 15, 20, 26, 33, 41, 50, 60, 71, 83, 96 i 110, a njihov zbroj iznosi 605.

Brojevi u 7. stupcu su: 28, 35, 43, 52, 62, 73, 85, 98 i 112, a njihov zbroj iznosi 588.

Brojevi u 10. stupcu su: 55, 65, 76, 88, 101 i 115, a njihov zbroj iznosi 500.

Brojevi u 13. stupcu su: 91, 104 i 118, a njihov zbroj iznosi 313.