# ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 29. veljače 2012. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/ 248.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

## A) Zadaci iz matematike

**3297.** Dano je $n+1$ pozitivnih cijelih brojeva čiji je zbroj jednak $3n$ i oni su poredani u krug. Dokaži da postoji nekoliko uzastopnih brojeva čiji je zbroj jednak $2n$.

**3298.** Neka su $a$, $b$, $c$, $d$ pozitivni cijeli brojevi takvi da je $cd = 1$. Dokaži da postoji cijeli broj $n$ takav da vrijedi

$$ab \leq n^2 \leq (a+c)(b+d).$$

**3299.** Realni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zadovoljavaju jednakost

$$4(b_1+b_2+\ldots+b_n) = a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_1.$$

Dokaži da barem jedna od sljedećih kvadratnih jednadžbi

$$x^2 + a_kx + b_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

ima realna rješenja.

**3300.** Točke $D$, $E$, $F$ su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ trokuta $ABC$. Ako je $\overline{BG}$ visina trokuta na stranicu $\overline{AC}$ dokaži da je $\sphericalangle EGD = \sphericalangle EFD$.

**3301.** Neka je $P$ površina trapeza $ABCD$, $AB \| CD$, $|AB| = a$, $|CD| = b$, $a > b$. Ako je površina trapeza $BOC$ jednaka $\dfrac{2P}{9}$, koliko je $\dfrac{a}{b}$?

**3302.** Dane su četiri točke $A$, $B$, $C$, $D$. Odredi točku $M$ tako da veličina

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 + |MD|^2$$

bude minimalna.

**3303.** Unutar dužine $\overline{AB}$ dana je točka $C$. Nad dužinama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ konstruirani su jednakostranični trokuti $ABD$, $BCE$, $ACF$ tako da su dva manja i najveći među njima s raznih strana pravca $AB$. Ako su $M$, $N$, $L$ redom središta upisanih kružnica tih trokuta, dokaži da je $|MN| = |ML|$.

**3304.** Kutovi trokuta su $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, a polumjeri opisane i upisane kružnice $R$ i $r$. Dokaži jednakost

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 = \frac{r}{R}.$$

**3305.** Ako su $a$, $b$, $c$ duljine stranica trokuta i $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nasuprotni mu kutovi, dokaži jednakost

$$a(1+2\cos 2\alpha)\cos 3\beta + b(1+2\cos 2\beta)\cos 3\alpha = c(1+2\cos 2\gamma).$$

**3306.** Na koliko se načina mogu izabrati tri vrha pravilnog $n$-terokuta $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 4$, tako da oni budu vrhovi tupokutnog trokuta.

## B) Zadaci iz fizike

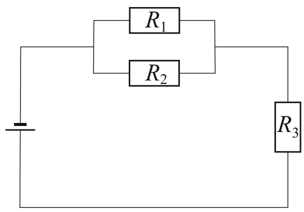
**OŠ – 334.** Vozač je želio izračunati faktor trenja kotrljanja između guma njegovog automobila i ceste. Na ravnom dijelu ceste postigao je brzinu od 18 km/ h i ugasio motor automobila. Zaustavljajući se, automobil je prešao put od 31.25 m. Koliki je faktor trenja izračunao vozač iz ovih podataka? Zašto je za ovakvo mjerenje važno da brzina automobila ne bude prevelika?

**OŠ – 335.** Učenici su posjetili zabavni park u kojem je viseći most duljine 30 m. Prelazili su ga u koloni dugačkoj 15 m brzinom od 1.5 m/ s. Koliko dugo je most bio opterećen?

**OŠ – 336.** Opruga se produlji za 4 cm kad se na nju objesi uteg mase 100 g. Kad je na nju obješena kocka brida 5 cm produljenje opruge iznosi 10 cm. Kolika je gustoća kocke?

**OŠ – 337.** Kako treba spojiti otpore od 30 Ω, 10 Ω, 6 Ω, 5 Ω i 3 Ω da bi vrijednost njihovog ukupnog otpora bila cijeli broj manji od 10 Ω?

**1490.** Kroz otpornik $R_2$ na shemi teče struja 0.4 A. Odredi napon izvora, snagu koju troši svaki od tri otpornika i ukupnu snagu u strujnom krugu. $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$.

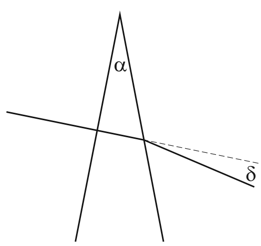



**1491.** Prosječno vrijeme između dviju uzastopnih opozicija Marsa (Zemlja između Marsa i Sunca) iznosi 2.1354 godine. Odredi duljinu velike poluosi Marsove putanje (srednju udaljenost Marsa od Sunca), koristeći podatak da je velika poluos Zemljine putanje duga 1 astronomsku jedinicu, a ophodno vrijeme 1 godinu.

**1492.** Kugla promjera 4 cm pliva na vodi tako da je vrh kugle 3.2 cm iznad površine vode. Odredi gustoću kugle ako je gustoća vode 1000 kg/ m$^3$, a gustoću zraka zanemari.

**1493.** Homogena bakrena kugla rotira kutnom brzinom $6\pi$ rad/ s, uz kinetičku energiju rotacije 0.24 J. Odredi radijus i masu kugle. Gustoća bakra je 8940 kg/ m$^3$.

**1494.** Zraka svjetlosti upada okomito na stranicu plastične prizme indeksa loma 1.3. Smjer lomljene zrake na izlazu iz prizme zatvara kut $\delta = 5^\circ$ u odnosu na smjer upadne zrake. Odredi kut prizme $\alpha$ (na slici).




**1495.** U zadnjoj sekundi slobodnog pada, kamen prevali 16% veći put nego u predzadnjoj. Odredi visinu i trajanje pada. Uzeti $g = 10$ m/ s$^2$, a otpor zraka zanemari.

**1496.** Idealno crno tijelo na temperaturi 300 K prima jednaku snagu od okoline koliko i zrači. Pri temperaturi tijela 320 K, treba ulagati 17 W snage za održavanje temperature tijela. Koliku bi snagu trebalo ulagati za održavanje temperature 340 K istog tog tijela?

## C) Rješenja iz matematike

**3273.** *Dano je 90 brojeva* $a_1, a_2, \ldots, a_{90}$ *od kojih je svaki jednak* $-3$ *ili* $-1$. *Ako je*

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{90}^2 = 282,$$

*koliko je*

$$a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_{90}^4?$$

*Rješenje.* Neka je u danom uvjetu $x$-broj jedinica i $y$-broj devetki. Tada je

$$x + 9y = 282,$$

$$x + y = 90.$$

Rješenje ovog sustava linearnih jednadžbi je $x = 66$, $y = 24$. Dakle

$$a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_{90}^4 = 66 \cdot 1 + 81 \cdot 24$$
$$= 66 + 1944 = 2010.$$

*Lucija Drašinac (2), III. gimnazija, Osijek*

**3274.** *Nađi sva rješenja sistema jednadžbi*

$$\frac{x}{6} + \frac{4}{y} = 2,$$

$$\frac{18}{x} + \frac{y}{2} = 5.$$

*Rješenje.* Sređivanjem sustava jednadžbi dobijemo

$$xy - 12y = -24 \qquad (1)$$

i

$$xy - 10x = -36. \qquad (2)$$

Oduzimanjem (2) od (1) dobijemo $10x - 12y = 12$, odnosno

$$x = \frac{6}{5}(y+1).$$

Uvrstimo li vrijednost za $x$ u (1) i dobijemo kvadratnu jednadžbu

$$y^2 - 9y + 20 = 0 \qquad (3)$$

čija su rješenja $y_1 = 5$ i slijedom toga $x_1 = \dfrac{36}{5}$ i $y_2 = 4$, $x_2 = 6$

*Kuzma Pecotić (4), Gimnazija "Čedo Žic", Krk*

**3275.** *Nađi najveći pozitivan cijeli broj* $n$ *takav da je* $\sqrt{n-100} + \sqrt{n+100}$ *racionalan broj.*

*Rješenje.* Da bi izraz dan u zadatku bio racionalan mora vrijediti:

$$n+100=(k_1)^2, \qquad (1)$$

$$n-100=(k_2)^2. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) lako zaključujemo da su $k_1$ i $k_2$ cijeli brojevi takvi da vrijedi $k_1 > k_2$.

Oduzmemo li jednadžbu (2) od (1) dobijemo:

$$200=(k_1-k_2)(k_1+k_2). \qquad (3)$$

Iz čega slijede jedina moguća riješenja u skupu cijelih pozitivnih brojeva:

$$k_1-k_2=1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 10; \qquad (4)$$

$$k_1+k_2=200;\ 100;\ 50;\ 25;\ 20. \qquad (5)$$

Zbrajanjem (4) i (5) dobivamo:

$$2k_1=201;\ 102;\ 54;\ 33;\ 30 \qquad (6)$$

i analogno oduzimanjem (5) i (4)

$$2k_2=199;\ 98;\ 46;\ 17;\ 10. \qquad (7)$$

Da bi $n$ bio cijeli broj, a to je kada je i $k_1$ cijeli broj slijedi: $k_1=\{51;\ 27;\ 15\}$ i $k_2=\{49;\ 23;\ 5\}$.

Iz ovako dobivenih vrijednosti $k_1$ i $k_2$ i jednadžbe (1) ili (2) slijedi:

$$n\in\{2501;\ 629;\ 125\}$$

dakle traženi broj je: $n=2501$.

*Kuzma Pecotić (4), Krk*

**3276.** *Dokaži nejednakost*

$$(a+3b)^n+(3a+b)^n \geqslant 2^{n+1}(a+b)^n,$$

*gdje su $a$ i $b$ pozitivni brojevi, a $n$ je prirodan broj.*

*Rješenje.* Uvedimo supstituciju $x=a+3b$ i $y=3a+b$: tada je $a+b=\frac{1}{4}(x+y)$ i zadana nejednakost postaje:

$$x^n+y^n \geqslant 2^{n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n}}(x+y)^n,$$

$$\frac{x^n+y^n}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^n,$$

što je poznata nejednakost među sredinama koja se lako dokazuje matematičkom indukcijom:

1° *Baza.*

Za $n_0=1$ imamo nejednakost

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \frac{x+y}{2}$$

koja očito vrijedi.

2° *Pretpostavka.*

Pretpostavimo da postoji $k\in\mathbf{N}$ takav da vrijedi

$$\frac{x^k+y^k}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^k.$$

3° *Korak.*

Iz pretpostavke slijedi

$$\frac{x^k+y^k}{2}\cdot\frac{x+y}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1},$$

pa je dovoljno pokazati

$$\frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2} \geqslant \frac{x^k+y^k}{2}\cdot\frac{x+y}{2}$$

$$\Longleftrightarrow 2x^{k+1}+2y^{k+1} \geqslant x^{k+1}+x^k y+xy^k+y^{k+1}$$

$$\Longleftrightarrow x^{k+1}+y^{k+1}-x^k y-xy^k \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow x^k(x-y)-y^k(x-y) \geqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x^k-y^k\right)(x-y) \geqslant 0.$$

Posljednja nejednakost vrijedi: naime, budući da su $x$ i $y$ pozitivni brojevi, oba faktora $x-y$ i $x^k-y^k$ su istog predznaka ovisno o tome je li $x$ veći ili manji od $y$. Time je korak indukcije dokazan pa vrijedi tvrdnja zadatka.

*Kristijan Kvaternik (4), V. gimnazija, Zagreb*

**3277.** *Odredi vrijednost izraza*

$$[\log_{\sqrt{2}}(\cos 20^\circ)+\log_{\sqrt{2}}(\cos 40^\circ) + \log_{\sqrt{2}}(\cos 80^\circ)]^2.$$

*Rješenje.*

$$\Big[\log_{\sqrt{2}}(\cos 20^\circ)+\log_{\sqrt{2}}(\cos 40^\circ) + \log_{\sqrt{2}}(\cos 80^\circ)\Big]^2$$

$$=\Big[\log_{\sqrt{2}}(\cos 20^\circ\cos 80^\circ)+\log_{\sqrt{2}}(\cos 40^\circ)\Big]^2$$

$$=\Big[\log_{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{2}\cos 60^\circ+\frac{1}{2}\cos 100^\circ\Big) + \log_{\sqrt{2}}(\cos 40^\circ)\Big]^2$$

$$=\Big[\log_{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 100^\circ\Big)+\log_{\sqrt{2}}(\cos 40^\circ)\Big]^2$$

$$=\Big[\log_{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{4}\cos 40^\circ+\frac{1}{2}\cos 100^\circ\cos 40^\circ\Big)\Big]^2$$

$$=\left[\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\cos 40^\circ+\frac{1}{4}\cos 140^\circ+\frac{1}{4}\cos 60^\circ\right)\right]^2$$
$$=\left[\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\cos 40^\circ+\frac{1}{4}\cos 140^\circ+\frac{1}{8}\right)\right]^2$$
$$=\left[\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\cos 40^\circ-\frac{1}{4}\cos 40^\circ+\frac{1}{8}\right)\right]^2$$
$$=\left[\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{8}\right)\right]^2$$
$$=\left[\log_{\sqrt{2}}\left(\left(\sqrt{2}\right)^{-6}\right)\right]^2$$
$$=(-6)^2=36.$$

*Kristijan Kvaternik (4), Zagreb*

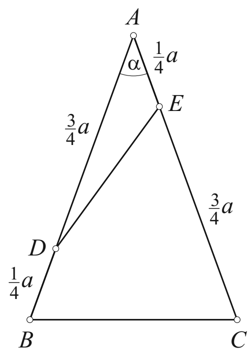
**3278.** *Dan je jednakokračan trokut $ABC$, $|AB|=|AC|$. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ dane su redom točke $D$ i $E$ tako da je $|AB|=4|BD|$ i $|AC|=4|AE|$. Ako je površina četverokuta $BCED$ jednaka $52\ cm^2$, kolika je površina trokuta $ADE$.*

*Rješenje.* Prema uvjetima zadatka imamo:

$$P_{ABC}=P_{BCED}+P_{ADE}$$

i dalje

$$P_{ABC}-P_{ADE}=P_{BCED}. \qquad (1)$$




*Slika 1.*

Iz (1) i slike 1 vrijedi:

$$\frac{a^2}{2}\sin\alpha-\frac{3a^2}{32}\sin\alpha=52,$$

odnosno $a^2\sin\alpha=128$.

Kako je

$$P_{ADE}=\frac{3a^2}{32}\sin\alpha$$

imamo:

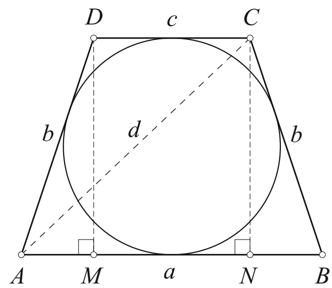
$$P_{ADE}=12\ \text{cm}^2.$$

*Kuzma Pecotić (4), Krk*

**3279.** *U jednakokračan trapez, čije su duljine baza jednake $a$ i $c$, upisana je kružnica. Odredi duljinu dijagonale trapeza.*

*Rješenje.* Uvedimo oznake kao na slici. Budući da je trapez tangencijalan, vrijedi:

$$a+c=b+b \quad \text{tj.} \quad b=\frac{a+c}{2}.$$




S druge strane, ako s $M$ i $N$ redom označimo projekcije vrhova $D$ i $C$ na osnovicu $\overline{AB}$, vrijedi $|AM|=|NB|$ te

$$|AM|+|NB|=a-c$$

tj.

$$|AM|=|NB|=\frac{a-c}{2}.$$

Sada iz pravokutnog trokuta $CNB$ dobivamo:

$$|BC|^2=|NB|^2+|CN|^2$$

odakle je

$$|CN|=\sqrt{|BC|^2-|NB|^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-\left(\frac{a-c}{2}\right)^2}=\sqrt{ac},$$

dok u pravokutnom trokutu $ACN$ imamo:

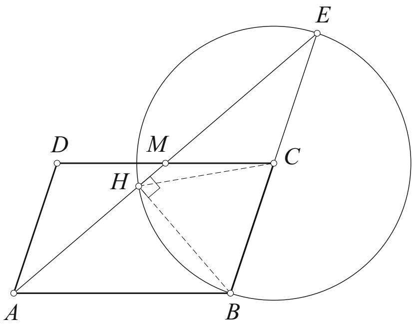
$$d=|AC|=\sqrt{|CN|^2+|AN|^2}$$
$$=\sqrt{ac+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+6ac+c^2}.$$

*Kristijan Kvaternik (4), Zagreb*

**3280.** *U četverokutu $PQRS$ točke $A$, $B$, $C$, $D$ su redom polovišta stranica $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$, a $M$ je polovište od $\overline{CD}$. Neka je $H$ točka na $\overline{AM}$ takva da je $|HC|=|BC|$. Dokaži da je $\sphericalangle BHM=90^\circ$.*

*Rješenje.* Uočimo da će bez obzira na četverokut $PQRS$ četverokut $ABCD$ biti paralelogram: naime, dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ redom su srednjice trokuta $PQR$, $QRS$, $RSP$, $SPQ$ pa vrijedi $DA \parallel BC \parallel QS$, $AB \parallel CD \parallel PR$,

$$|DA| = |BC| = \frac{1}{2}|QS|,$$
$$|AB| = |CD| = \frac{1}{2}|PR|.$$




Označimo sada u paralelogramu $ABCD$ sjecište pravaca $AM$ i $BC$ s $E$; uočimo kako vrijedi $CM \parallel AB$ i $|CM| = \frac{1}{2}|AB|$ pa je dužina $\overline{MC}$ srednjica trokuta $ABE$. Zato je točka $C$ polovište dužine $\overline{BE}$ te vrijedi $|BC| = |CE| = |CH|$. Proizlazi da točke $B$, $H$, $M$ leže na kružnici promjera $\overline{BE}$ pa je kut $BHE$, odnosno $BHM$ prema Talesovom poučku, pravi.

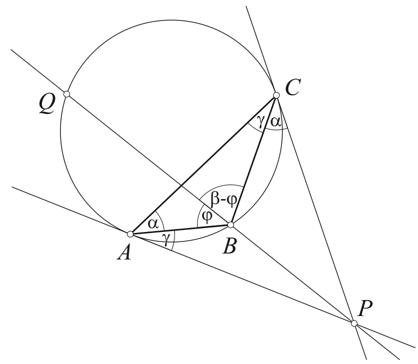
*Kristijan Kvaternik (4), Zagreb*

**3281.** *U trokutu $ABC$ je $|AC| = 2|AB|$. Tangente u točkama $A$ i $C$ na opisanu kružnicu trokuta $ABC$ sijeku se u $P$. Dokaži da pravac $BP$ raspolavlja luk $\overset{\frown}{BAC}$ opisane kružnice.*

*Rješenje.* Neka pravac $PB$ siječe opisanu kružnicu drugi put u točki $Q$; uvedimo standardne oznake kutova i neka je $\measuredangle ABQ = \varphi$. Budući da je kut između tangente i tetive jednak obodnom kutu nad tom tetivom, vrijedi $\measuredangle BAP = \gamma$, $\measuredangle BCP = \alpha$. Sada primijenimo sinusov poučak na trokute $ABP$ i $CBP$:

$$\frac{|BP|}{|AP|} = \frac{\sin \measuredangle BAP}{\sin \measuredangle ABP} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\pi-\varphi)} = \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi},$$

$$\frac{|BP|}{|CP|} = \frac{\sin \measuredangle BCP}{\sin \measuredangle CBP} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-(\beta-\varphi))} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\varphi)}.$$




Pravci $AP$ i $CP$ su tangente na opisanu kružnicu pa vrijedi $|AP| = |CP|$, odnosno

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\varphi)} = \frac{\sin\gamma}{\sin\varphi} \iff \frac{\sin\varphi}{\sin(\beta-\varphi)} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

S druge strane, ako s $R$ označimo polumjer opisane kružnice, vrijedi

$$\frac{|QA|}{|QC|} = \frac{2R\sin\varphi}{2R\sin(\beta-\varphi)} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\beta-\varphi)},$$

a primjenom sinusovog poučka na trokut $ABC$ slijedi

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Sada imamo

$$\frac{|QA|}{|QC|} = \frac{|AB|}{|BC|},$$
$$|QA|\cdot|BC| = |AB|\cdot|QC|,$$
$$|QA|\cdot|BC| + |AB|\cdot|QC| = 2|AB|\cdot|QC|,$$
$$|QA|\cdot|BC| + |AB|\cdot|QC| = |AC|\cdot|QC|. \quad (1)$$

Nadalje, četverokut $ABCQ$ je tetivan pa na njega možemo primijeniti Ptolemejev poučak:

$$|QA|\cdot|BC| + |AB|\cdot|QC| = |AC|\cdot|BQ|. \quad (2)$$

Uspoređivanjem strana u (1) i (2) slijedi

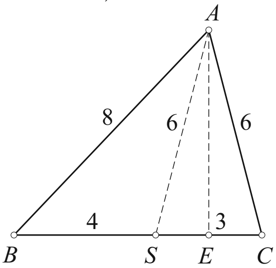
$$|BQ| = |QC|,$$

a kako su tetivama jednakih duljina pridruženi odgovarajući kružni lukovi također jednakih duljina, imamo $l(\overset{\frown}{BAQ}) = l(\overset{\frown}{CQ})$ pa je tvrdnja dokazana.

*Kristijan Kvaternik (4), Zagreb*

**3282.** *Duljine stranice trokuta $ABC$ su $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 7$ cm, $|CA| = 6$ cm. Na stranici $\overline{BC}$ dana je točka $E$ takva da je $\sphericalangle BAE = 3\sphericalangle EAC$. Koliko je $|AE|^2$ ?*

*Prvo rješenje.* Iz navedenih podataka imamo $\sphericalangle EAC = \frac{1}{4}\sphericalangle BAC$. Neka simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki $S$; očito je pravac $AE$ simetrala kuta $\sphericalangle SAC$.




Nadalje, rješavanjem sustava jednadžbi

$$\begin{cases} \dfrac{|BS|}{|SC|} = \dfrac{|BA|}{|CA|} = \dfrac{4}{3} \\ |BS| + |SC| = |BC| = 7 \end{cases}$$

dobivamo duljine $|BS| = 4$ cm, $|SC| = 3$ cm. Primijenimo sada kosinusov poučak na trokute $BAS$ i $CAS$:

$$\cos \sphericalangle BAS = \frac{8^2 + |AS|^2 - 4^2}{16|AS|},$$

$$\cos \sphericalangle CAS = \frac{6^2 + |AS|^2 - 3^2}{12|AS|}.$$

Izjednačavanjem strana dobivamo

$$\frac{8^2 + |AS|^2 - 4^2}{16|AS|} = \frac{6^2 + |AS|^2 - 3^2}{12|AS|},$$

$$3 \cdot 8^2 + 3|AS|^2 - 3 \cdot 4^2 = 4 \cdot 6^2 + 4|AS|^2 - 4 \cdot 3^2,$$

$$|AS|^2 = 36, \quad |AS| = 6.$$

Očito je trokut $ASC$ jednakokračan pa je $AE \perp SC$ i $|SE| = |EC|$. Sada je prema Pitagorinom poučku

$$|AE|^2 = |AC|^2 - |CE|^2 = 33.75 \text{ cm}^2.$$

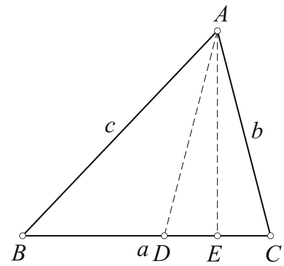
*Kristijan Kvaternik (4), Zagreb*

*Drugo rješenje.* Stavimo $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$. Neka je $AD$ simetrala kuta $\sphericalangle CAB$. Koristeći teorem o simetrali kuta imamo

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{c}{b}.$$

Sada je

$$|BD| = \frac{ac}{b+c} = 4 \text{ cm}, \quad |CD| = \frac{ab}{b+c} = 3 \text{ cm}.$$




Koristeći Stewartov teorem dobivamo

$$|CD| \cdot |AB|^2 + |BD| \cdot |AC|^2$$
$$= |BC|(|AD|^2 + |BD| \cdot |CD|)$$

tj.

$$\frac{ab}{b+c} \cdot c^2 + \frac{ac}{b+c} \cdot b^2 = a\left[|AD|^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right],$$

odakle je

$$|AD|^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right].$$

Uvrštavanjem danih uvjeta dobivamo

$$|AD| = 6 \text{ cm}.$$

Prema tome je $\triangle ACD$ jednakokračan i simetrala $AE$ kuta $\sphericalangle CAD$ je okomita na $\overline{BC}$. Točka $E$ je polovište dužine $\overline{CD}$. Kako je $|CD| = 3$ cm imamo $|EC| = \frac{3}{2}$ cm. Prema Pitagorinom poučku je

$$|AE|^2 = |AC|^2 - |EC|^2 = 6^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{135}{4}.$$

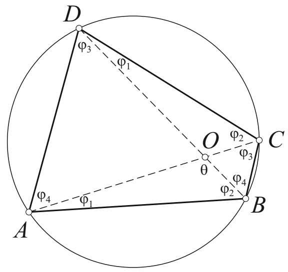
Dakle, $|AE|^2 = \dfrac{135}{4}$.

*Ur.*

**3283.** *Duljine stranica tetivnog četverokuta $ABCD$ su redom $a$, $b$, $c$, $d$, a sjecište njegovih dijagonala je točka $O$. Ako je $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ i $\theta = \sphericalangle BOA$, dokaži jednakost*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(s-b)(s-d)}{(s-a)(s-c)}.$$

*Rješenje.* Označimo kutove kao na slici (pritom vodimo računa o obodnim kutovima nad istim tetivama) te neka je $R$ polumjer opisane kružnice zadanog četverokuta.




Budući da je četverokut $ABCD$ tetivan, vrijedi $\theta = \pi - (\varphi_1 + \varphi_2) = \varphi_3 + \varphi_4$. Sada je

$$\frac{(s-b)(s-d)}{(s-a)(s-c)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(a-b+c+d)(a+b+c-d)}{\frac{1}{4}(-a+b+c+d)(a+b-c+d)}$$

$$=\frac{(a+c)^2-(b-d)^2}{(b+d)^2-(c-a)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{2R}+\frac{c}{2R}\right)^2-\left(\frac{b}{2R}-\frac{d}{2R}\right)^2}{\left(\frac{b}{2R}+\frac{d}{2R}\right)^2-\left(\frac{c}{2R}-\frac{a}{2R}\right)^2}$$

(primjenjujemo sinusov poučak)

$$=\frac{(\sin\varphi_3+\sin\varphi_4)^2-(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)^2}{(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)^2-(\sin\varphi_4-\sin\varphi_3)^2}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\varphi_4+\varphi_3}{2}\cos^2\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}-\sin^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\cos^2\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}-\cos^2\frac{\varphi_4+\varphi_3}{2}\sin^2\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\cos^2\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}-\sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\cos^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}-\sin^2\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\left(1-\sin^2\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}\right)-\left(1-\cos^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)}{\cos^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}-\sin^2\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}-\sin^2\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}}{\cos^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}-\sin^2\frac{\varphi_4-\varphi_3}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2},$$

i tvrdnja zadatka je dokazana.

*Kristijan Kvaternik (4), Zagreb*

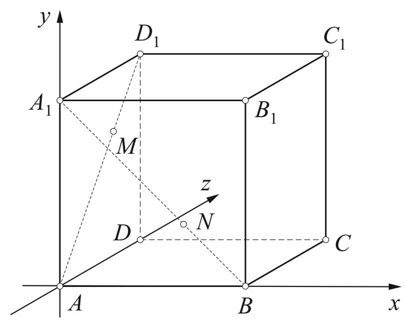
**3284.** *Duljina brida kocke $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jednaka je $a$. Točke $M$ i $N$ su na dijagonalama $\overline{D_1A}$ i $\overline{A_1B}$ tako da vrijedi*

$$\frac{|D_1M|}{|D_1A|}=\frac{|NB|}{|A_1B|}=\frac{1}{3}.$$

*Odredi udaljenost točke $C$ od pravca $MN$.*

*Prvo rješenje.* Postavimo kocku u $Oxyz$ prostor tako da se točka $A$ poklopi s ishodištem, pravac $AB$ s osi apscisa, pravac $AA_1$ s osi ordinata, a pravac $AD$ s osi aplikata. Tada vrhovi kocke imaju sljedeće koordinate:

$$A(0,0,0),\quad A_1(0,a,0),$$
$$B(a,0,0),\quad B_1(a,a,0),$$
$$C(a,0,a),\quad C_1(a,a,a),$$
$$D(0,0,a),\quad D_1(0,a,a).$$




Sada iskoristimo formule za djelište dužine u zadanom omjeru:

$$\frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{NA_1}}=\frac{1}{2}\implies x_N=\frac{x_B+\frac{1}{2}x_{A_1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}a,$$

$$y_N=\frac{y_B+\frac{1}{2}y_{A_1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}a,\quad z_N=\frac{z_B+\frac{1}{2}z_{A_1}}{1+\frac{1}{2}}=0,$$

odnosno $N\left(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a,0\right)$.

Analogno iz $\dfrac{\overrightarrow{D_1M}}{\overrightarrow{MA}}=\dfrac{1}{2}$ dobivamo $M\left(0,\frac{2}{3}a,\frac{2}{3}a\right)$. Zato imamo

$$\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{3}a\vec{\imath}+\frac{1}{3}a\vec{\jmath}-a\vec{k}\implies|CN|=\frac{a\sqrt{11}}{3},$$

$$\overrightarrow{NM} = -\frac{2}{3}a\vec{\imath} + \frac{1}{3}a\vec{\jmath} + \frac{2}{3}a\vec{k} \Longrightarrow |NM| = a,$$

$$\overrightarrow{MC} = a\vec{\imath} - \frac{2}{3}a\vec{\jmath} + \frac{1}{3}a\vec{k} \Longrightarrow |MC| = \frac{a\sqrt{14}}{3}.$$

Izrazimo sada površinu $P$ trokuta $MCN$ koristeći svojstva vektorskog produkta:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CN} \times \overrightarrow{CM}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{1}{3}a\vec{\imath} + \frac{1}{3}a\vec{\jmath} - a\vec{k}\right)\right. \\
&\qquad \left. \times \left(-a\vec{\imath} + \frac{2}{3}a\vec{\jmath} - \frac{1}{3}a\vec{k}\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}a^2\vec{k} + a^2\vec{\jmath} - \frac{2}{9}a^2\vec{k} + \frac{2}{3}a^2\vec{\imath}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{9}a^2\vec{\jmath} - \frac{1}{9}a^2\vec{\imath}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{5}{9}a^2\vec{\imath} + \frac{8}{9}a^2\vec{\jmath} + \frac{1}{9}a^2\vec{k}\right| \\
&= \frac{a^2\sqrt{10}}{6}.
\end{aligned}$$

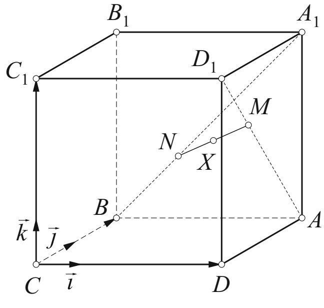
S druge strane, površinu $P$ možemo izraziti i kao polovinu umnoška duljine stranice $\overline{MN}$ i duljine visine na tu stranicu $d$ (to je ujedno i udaljenost točke $C$ od pravca $MN$):

$$P = \frac{1}{2}|MN| \cdot d \iff d = \frac{2P}{|MN|},$$

$$d = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

*Kristijan Kvaternik (4), Zagreb*

*Drugo rješenje.* Neka je $\overrightarrow{CD} = a\vec{\imath}$, $\overrightarrow{CB} = a\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{CC_1} = a\vec{k}$.




Tada je

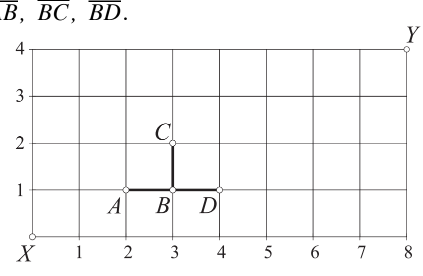
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD_1} \\
&= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) \quad \text{tj.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM} &= a\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + \frac{2}{3}(a\vec{k} - a\vec{\jmath}) \\
&= a\vec{\imath} + \frac{1}{3}a\vec{\jmath} + \frac{2}{3}a\vec{k}, \\
\overrightarrow{CN} &= \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1}) \\
&= a\vec{\jmath} + \frac{1}{3}(a\vec{\imath} + a\vec{k}) = \frac{1}{3}a\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + \frac{1}{3}a\vec{k}, \\
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = -\frac{2}{3}a\vec{\imath} + \frac{2}{3}a\vec{\jmath} - \frac{1}{3}a\vec{k}, \\
\overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{CM} + t\overrightarrow{MN} \\
&= a\vec{\imath} + \frac{1}{3}a\vec{\jmath} + \frac{2}{3}a\vec{k} + t\left(-\frac{2}{3}a\vec{\imath} + \frac{2}{3}a\vec{\jmath} - \frac{1}{3}a\vec{k}\right) \\
&= \left(1 - \frac{2}{3}t\right)a\vec{\imath} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t\right)a\vec{\jmath} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}t\right)a\vec{k}; \\
\frac{|\overrightarrow{CX}|^2}{a^2} &= \left(1 - \frac{2}{3}t\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}t\right)^2 \\
&= 1 - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9}t^2 + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}t + \frac{4}{9}t^2 + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}t + \frac{1}{9}t^2 \\
&= t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{14}{9} = \left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{14}{9} - \frac{4}{9} \\
&= \left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{9}.
\end{aligned}$$

Tražena udaljenost je minimalna udaljenost $|\overrightarrow{CX}|^2$, a to je $\dfrac{\sqrt{10}}{3}a$.

*Ur.*

**3285.** *Odredi koliko ima najkraćih putova od $X$ do $Y$ ako se ne može prolaziti segmentima $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$.*



*Rješenje.* Od ukupnog broja najkraćih putova (to su oni putovi na kojima se krećemo samo "desno" i "gore") od $X$ do $Y$ treba oduzeti ukupan broj najkraćih putova na kojima prelazimo barem jedan od navedenih segmenata. Općenito, od točke s koordinatama $(0,0)$ (to je točka $X$) do točke s koordinatama $(a,b)$ trebamo ukupno preći $a+b$ jediničnih duljina ($a$ horizontalnih i $b$ vertikalnih), a put ćemo odrediti ako odaberemo svih $a$ horizontalnih duljina kojima želimo prijeći (ili svih $b$ vertikalnih). Zato je ukupan broj najkraćih putova

$$\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}.$$

Na sličan način iz točke $(a_1,b_1)$ možemo doći u točku $(a_2,b_2)$ preko ukupno

$$\binom{a_2-a_1+b_2-b_1}{a_2-a_1} = \binom{a_2-a_1+b_2-b_1}{b_2-b_1}$$

najkraćih putova.

Sada treba odrediti ukupan broj najkraćih putova koji prelaze preko navedenih segmenata. Razlikujemo dva slučaja:

- Put vodi preko segmenta $\overline{AB}$. Od točke $X$ do točke $A$ možemo doći na $\binom{3}{2}$ načina, zatim prelazimo segment $\overline{AB}$ i onda možemo nastaviti ili preko $\overline{BC}$, ili preko $\overline{BD}$. Od $C$ do $Y$ možemo doći na ukupno $\binom{7}{2}$, a od $D$ do $Y$ na $\binom{7}{3}$ načina. Zato je ukupan broj načina u ovom slučaju:

$$\binom{3}{2}\binom{7}{2}+\binom{3}{2}\binom{7}{3}$$
$$=\binom{3}{2}\cdot\left[\binom{7}{2}+\binom{7}{3}\right]=\binom{3}{2}\binom{8}{3}.$$

- Put ne vodi preko segmenta $\overline{AB}$. Tada prvo trebamo doći do točke $B$, što možemo na samo jedan način (ne prelazimo preko $\overline{AB}$!) i opet nastavljamo preko $\overline{BC}$ ili $\overline{BD}$ kao u prvom slučaju. Ovdje je ukupan broj slučajeva:

$$\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=\binom{8}{3}.$$

Dakle, ukupan broj najkraćih putova koji vode preko navedenih segmenata jest:

$$\binom{3}{2}\binom{8}{3}+\binom{8}{3}=\binom{8}{3}\cdot\left[\binom{3}{2}+1\right]$$
$$=\binom{8}{3}\cdot\left[\binom{3}{2}+\binom{3}{3}\right]=\binom{8}{3}\binom{4}{3}.$$

Ukupan broj traženih putova je jednak

$$N=\binom{12}{4}-\binom{8}{3}\binom{4}{3}=271.$$

*Kristijan Kvaternik (4), Zagreb*

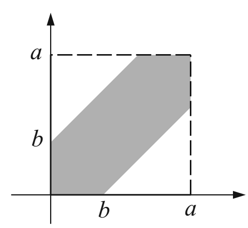
**3286.** *Ivan i Ivana dogovorili su se da će se sresti na određenom mjestu između 12 sati i 12 sati i $a$ minuta. Prema dogovoru, onaj tko prvi dođe čeka drugog $b$ minuta.*

*Odredi vjerojatnost da dođe do susreta ako se pretpostavi da je vrijeme dolaska za svakog od njih podjednako vjerojatno između 12 sati i $a>b$ minuta.*

*Rješenje.* Neka uređeni par $(x,y)$ označava da je Ivana došla u 12 sati i $x$, a Ivan u 12 sati i $y$ minuta. Iz navedenog uvjeta slijedi kako mora biti ispunjena nejednakost

$$|x-y|\leqslant b.$$

Prikažemo li to u koordinatnom sustavu, dobit ćemo sljedeću sliku:



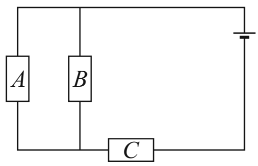

Na slici kvadrat duljine stranice $a$ predstavlja skup svih mogućih ishoda, a zatamnjeni šesterokut skup svih povoljnih ishoda. Zato traženu vjerojatnost $p$ lako dobijemo kao omjer površina šesterokuta i kvadrata, pri čemu površinu šesterokuta dobijemo tako da od površine kvadrata oduzmemo površine oba jednakokračna pravokutna trokuta:

$$P=\frac{a^2-2\cdot\frac{1}{2}(a-b)^2}{a^2}=\frac{2ab-b^2}{a^2}=\frac{b(2a-b)}{a^2}.$$

*Kristijan Kvaternik (4), Zagreb*

## D) Rješenja iz fizike

**OŠ – 326.** *Struja kroz otpornik A je tri puta manja od struje kroz otpornik C. Napon na krajevima otpornika B je dva puta veći od napona na krajevima otpornika C. Koliki su otpornici A i C ako otpornik B iznosi* $10\,\Omega$*?*




*Rješenje.*

$$3I_A = I_C$$
$$U_B = U_A = 2U_C$$
$$\underline{R_B = 10\ \Omega}$$
$$R_A = ?\quad R_C = ?$$
$$I_A + I_B = I_C,\quad I_A + I_B = 3I_A$$
$$I_B = 2I_A = \frac{2}{3}I_C$$
$$R_A = \frac{U_A}{I_A} = \frac{U_B}{\frac{I_B}{2}} = 2R_B = 20\ \Omega$$
$$R_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{\frac{U_B}{2}}{\frac{3}{2}I_B} = \frac{R_B}{3} = \frac{10}{3}\ \Omega.$$

*Domagoj Dorešić (8), Mate Lovraka, Zagreb*

**OŠ – 327.** *Kad Nika ide duljim putem u školu napravi 1000 koraka, a kad ide kraćim treba joj samo 800 koraka. Duljina njenog koraka je 60 centimetara. Kolika je njena prosječna brzina ako joj kraćim putem treba 2 minute manje nego kad ide duljim putem?*

*Rješenje.*

$$n_1 = 1000,\quad n_2 = 800$$
$$l_1 = 60\text{ cm} = 0.6\text{ m}$$
$$\underline{t_1 - t_2 = 2\text{ min} = 120\text{ s}}$$
$$v = ?$$
$$s_1 = n_1 \cdot l_1 = 60\,000\text{ cm} = 600\text{ m}$$
$$s_2 = n_2 \cdot l_1 = 48\,000\text{ cm} = 480\text{ m}$$
$$s_1 - s_2 = v\cdot t_1 - v\cdot t_2 = v\cdot(t_1 - t_2)$$
$$v = \frac{s_1 - s_2}{t_1 - t_2} = \frac{120\text{ m}}{120\text{ s}} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

*Domagoj Dorešić (8), Zagreb*

**OŠ – 328.** *Automobil mase* $1200\,\text{kg}$ *je za deset sekundi jednoliko ubrzavao iz mirovanja do brzine* $90\,\text{km/h}$*. Koliko je iznosila sila motora? Nakon toga je vozač prestao ubrzavati. Koliki put je automobil prešao od početka gibanja za 20 sekundi? Trenje zanemarite.*

*Rješenje.*

$$m = 1200\text{ kg}$$
$$t_1 = 10\text{ s},\quad t_2 = 10\text{ s}$$
$$\underline{v_0 = 0,\quad v = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$
$$F = ?\quad s = ?$$
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25\text{ m/s}}{10\text{ s}} = 2.5\text{ m/s}^2$$
$$F = a\cdot m = 2.5\text{ m/s}^2\cdot 1200\text{ kg} = 3000\text{ N}$$
$$s_1 = \frac{a\cdot t_1^2}{2} = 125\text{ m}$$
$$s_2 = v\cdot t = 250\text{ m}$$
$$s = s_1 + s_2 = 375\text{ m}.$$

*Mateja Terzanović (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik*

**OŠ – 329.** *Vodena turbina proizvodi električnu energiju s korisnošću 75%. Njena korisna snaga je 1.5 MW. Voda pada s visine 20 m. Koliko litara vode svake sekunde pada na turbinu?*

*Rješenje.*

$$\eta = 75\% = 0.75,\quad t = 1\text{ s}$$
$$\underline{P_k = 1.5\text{ MW},\quad h = 20\text{ m}}$$
$$V = ?\ \text{L}$$
$$\eta = \frac{P_k}{P_u}$$
$$P_u = \frac{P_k}{\eta} = 2\text{ MW},\quad P_u = \frac{W}{t}$$
$$P_u = \frac{Gh}{t},\quad P_u = \frac{mgh}{t},\quad P_u = \rho\cdot V\cdot g\cdot\frac{h}{t}$$

$$V = P_u \cdot \frac{t}{\rho \cdot g \cdot h}$$
$$= 2\,000\,000\ \mathrm{W} \cdot \frac{1\ \mathrm{s}}{1000\ \mathrm{kg/\,m^3} \cdot 10\ \mathrm{N/\,kg} \cdot 20\ \mathrm{m}}$$
$$V = 10\ \mathrm{m}^3 = 10\,000\ \mathrm{l}.$$

*Antonia Čular (8),*
*OŠ Fausta Vrančića, Šibenik*

**1476.** *Tijelo mase 12 kg dignuto je s površine Zemlje na visinu 1000 km. Koliko je povećanje gravitacijske potencijalne energije tijela? Na koju bi visinu trebali podići tijelo da se povećanje potencijalne energije udvostruči? Radijus Zemlje je 6371 km, a masa* $5.974 \cdot 10^{24}$ *kg.*

*Rješenje.* Potencijalna energija na površini Zemlje je
$$E_0 = -G \cdot \frac{mm_z}{R},$$
a na visini $h$ ona iznosi
$$E(h) = -G \cdot \frac{mm_z}{R+h}.$$
Povećanje potencijalne energije dizanjem s površine na visinu $h$ tada je:
$$\Delta E = E(h) - E_0 = Gmm_z \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$
$$= G \cdot \frac{mm_z}{R^2} \cdot \left(\frac{Rh}{R+h}\right) = mgh \cdot \frac{R}{R+h}.$$

Uvrštavanjem $R = 6371$ km, $m_z = 5.974 \cdot 10^{24}$ kg dobivamo $g = 9.82$ m/ s$^2$ i za $h = 1000$ km
$$E(1000\ \mathrm{km}) = 101\,853\ \mathrm{kJ}.$$
Visina s dvostrukim uvećanjem potencijalne energije u odnosu na površinu je
$$h(2E) = \frac{R}{1 - 2E/mgR} - R = 2372.37\ \mathrm{km}.$$

*Ur.*

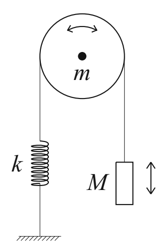
**1477.** *Temperatura u prostoriji iznosi* $20\,^\circ C$. *Na stol stavimo posudu s vodom temperature* $80\,^\circ C$. *Nakon 5 minuta, voda se ohladila na* $68\,^\circ C$.

a) *Kolika će biti temperatura vode nakon pola sata?*
b) *Nakon koliko minuta će temperatura biti 30* $^\circ C$*?*

*Rješenje.* Brzina promjene temperature vode proporcionalna je razlici temperature vode i okoline. Tada je ovisnost razlike temperature o vremenu $T(t)$ eksponencijalna:
$$T(t) = 20 + 60 \cdot e^{-kt}.$$
Iz podatka o temperaturi nakon 5 minuta odredimo $k$:
$$68 = 20 + 60 \cdot e^{-5k} \implies k = 0.044629\ \mathrm{min}^{-1}.$$
Uvrstimo u početni izraz $t = 30$ min, pa dobijemo
$$T(30) = 35.73\,^\circ\mathrm{C}.$$
Ako računamo vrijeme $t$ koje odgovara temperaturi $30\,^\circ$C, dobivamo
$$30 = 20 + 60 \cdot e^{-kt} \quad \text{tj.} \quad t = 40.148\ \mathrm{min}.$$

*Ur.*

**1478.** *Nit prebačena preko koloture na desnoj strani ima vezan uteg mase* $M = 0.8$ *kg, a na lijevoj je preko opruge učvršćena na pod. Ako je konstanta opruge* $k = 480$ *N/m, a period titranja utega i koloture oko ravnotežnog položaja 0.9 sekundi, odredi masu koloture* $m$. *Kolotura je valjak, a moment njegove tromosti iznosi* $\frac{1}{2}mr^2$, *gdje je* $m$ *masa, a* $r$ *radijus valjka.*




*Rješenje.* Oscilacije oko ravnotežnog položaja uzrokovane su silom opruge proporcionalnom pomaku iz ravnoteže, $F = -kx$, gdje silu $F$ određuje ubrzanje utega i kutno ubrzanje koloture:
$$F = Ma + \frac{I\alpha}{r}.$$
Kako je $I = \frac{1}{2}mr^2$ i $\alpha = \frac{a}{r}$ slijedi
$$F = Ma + \frac{1}{2}mr^2\frac{a}{r^2} = \left(M + \frac{m}{2}\right)a.$$
frekvencija oscilacija određena je izrazom:
$$\omega^2 = \frac{ka}{F} = \frac{k}{M + m/2},$$
pa je period titranja
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M + m/2}{k}}.$$
Uvrštavanjem slijedi
$$0.9 = 2\pi\sqrt{\frac{0.8 + m/2}{480}} \quad \text{tj.} \quad m = 18.1\ \mathrm{kg}.$$

*Ur.*

**1479.** *Koristeći izraz za moment tromosti homogene kugle,* $I = \frac{2}{5}mr^2$*, odredi moment tromosti homogene sferne ljuske unutarnjeg radijusa* $r_1$*, vanjskog* $r_2$ *i mase* $m$*. Odredi traženi moment za granični slučaj tanke sfere (*$r_1 \to r_2$*).*

*Rješenje.* Sfernu ljusku zamislimo kao kuglu radijusa $r_2$ iz koje je uklonjena koncentrična kugla radijusa $r_1$. S obzirom da je moment tromosti aditivna veličina (kao i masa), vrijedi:

$$I = I_2 - I_1, \quad m = m_2 - m_1 = \rho(V_2 - V_1)$$

$$I_2 = \frac{2}{5}m_2 r_2^2, \quad I_1 = \frac{2}{5}m_1 r_1^2.$$

Slijedi

$$I = \frac{2}{5}(m_2 r_2 - m_1 r_1) = \frac{2}{5}\rho(V_2 r_2^2 - V_1 r_1^2)$$

$$= \frac{2}{5}\frac{m}{V_2 - V_1}(V_2 r_2^2 - V_1 r_1^2) = \frac{2}{5}m\frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3}$$

Uočimo da za $r_1 \to 0$ dobijemo izraz za moment tromosti kugle. U graničnom slučaju $r_1 \to r_2$ vrijedi

$$\frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3} \approx \frac{5}{3}r_2^2,$$

pa je moment tromosti tanke sfere jednak

$$I = \frac{2}{3}mr^2.$$

*Ur.*

**1480.** *Tri Jupiterova mjeseca, Io, Europa i Ganimed nalaze se u tzv. Laplaceovoj rezonanciji. Za vrijeme potrebno Ganimedu da obiđe Jupiter, Europa ga obiđe točno dvaput, a Io četiri puta. Ako s* $r$ *označimo radijus putanje Ganimeda (uzeti da su sve tri putanje kružnice), izrazi pomoću* $r$ *radijuse putanja Ia i Europe.*

*Rješenje.* Koristeći treći Keplerov zakon, omjer $\frac{r^3}{T^2}$ mora biti jednak za sva tri satelita. Tada je

$$r_E = r \cdot \left(\frac{T_E}{T_G}\right)^{2/3} = r \cdot 4^{-1/3} = 0.6300r,$$

$$r_I = r \cdot \left(\frac{T_I}{T_G}\right)^{2/3} = r \cdot 16^{-1/3} = 0.3969r.$$

U astronomskim tablicama je navedeno $r_I = 421\,800$ km, $r_E = 671\,100$ km, $r = 1\,070\,400$ km, što odgovara izračunatim omjerima.

*Ur.*

**1481.** *Mješavina triju plinova sastoji se od 30% helija, 50% dušika i 20% kisika (volumni udjeli). Odredi srednju molekulsku težinu mješavine i gustoću pri tlaku* $10^5$ *Pa i temperaturi 300 K.*

*Rješenje.* Označimo s $m$ masu, $V$ volumen i $n$ množinu zadane mješavine. Vrijedi:

$$\frac{n(He)}{n} = \frac{pV(He)/RT}{pV/RT} = \frac{V(He)}{V} = \varphi(He).$$

Odatle je

$$m(He) = \varphi(He)nM(He),$$

analogno

$$m(N_2) = \varphi(N_2)nM(N_2),$$

$$m(O_2) = \varphi(O_2)nM(O_2).$$

Ukupna masa $m$ je

$$m = n(\varphi(He)M(He) + \varphi(N_2)M(N_2) + \varphi(O_2)M(O_2)) = n\overline{M}.$$

Slijedi

$$\overline{M} = 0.3 \cdot 4 + 0.5 \cdot 28 + 0.2 \cdot 32$$

$$= 21.6 \text{ g/mol} = 0.0216 \text{ kg/mol}.$$

Gustoća je omjer mase i volumena iz jednadžbe stanja plina:

$$pV = \frac{m}{\overline{M}}RT \implies \rho = \frac{m}{V} = \frac{p\overline{M}}{RT}$$

$$\rho = 0.866 \text{ kg/m}^3.$$

*Kristijan Kvaternik (4), Zagreb*

**1482.** *Plankonveksna leća (konvergentna s jednim ravnim dioptrom) ima žarišnu daljinu 75 cm. Radijus zakrivljenosti dioptra (onog koji nije ravan) iznosi 36 cm. Odredi indeks loma stakla od kojeg je napravljena leća.*

*Rješenje.* Žarišna daljina plankonveksne leće određena je izrazom:

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R},$$

gdje je $n$ indeks loma, a $R$ radijus zakrivljenosti sfernog dioptra. Uvrštavanjem dobivamo $n = 1.48$.

*Ur.*