5. srednjoeuropska matematička olimpijada 2011. g.

Domaćin 5. srednjoeuropske matematičke olimpijade bio je hrvatski grad Varaždin. Olimpijada se održala od 1. do 7. rujna 2011. godine, a sudjelovalo je ukupno 10 država: Austrija, Češka, Litva, Mađarska, Njemačka, Poljska, Slovačka, Slovenija, Švicarska i kao domaćin Hrvatska. Svaku državu predstavljalo je šest učenika, a Hrvatsku su predstavljali: *Mislav Balunović* iz Gimnazije Matije Mesića u Slavonskom brodu, *Aleksandar Bulj* i *Verner Vlačić* iz Gimnazije Andrije Mohorovičića u Rijeci te *Luka Filipović*, *Boris Juras* i *Borna Vukorepa* iz XV. gimnazije u Zagrebu. Voditelji hrvatske ekipe bili su *Željko Hanjš* i *Krsitina Ana Škreb*. Individualni dio natjecanja održan je 3. rujna, a ekipni 4. rujna.

Prvog dana u poslijepodnevnim i večernjim satima pristizale su ekipe iz država sudionica. Na put smo krenuli vlakom iz Zagreba s voditeljima naše ekipe. Smjestili smo se u Studentskom domu Varaždin gdje su nas dočekali i naši vodiči. Taj dan na programu nije bilo ništa osim večere pa smo imali priliku malo prošetati gradom.

Drugi dan započeo je natjecateljskim duhom, ujutro nas je dočekala zabavna igra. Svi sudionici natjecanja bili su podijeljeni u 12 grupa, u svakoj po 5 natjecatelja pri čemu niti jedna grupa nije sadržavala dva predstavnika iste države. Cilj je bio pronaći što više građevina i spomenika s danih fotografija. Zabavili smo se, vidjeli grad, a i upoznali neke nove ljude. Slučajno ili ne, pobjedu je odnijela ekipa u kojoj nije bilo natjecatelja iz Hrvatske. Navečer je na Fakultetu organizacije i informatike održano službeno otvorenje natjecanja i predstavljanje ekipa, a nakon večere sve ekipe su se povukle u svoje sobe kako bi čule posljednje savjete od svojih voditelja.

Trećeg dana u Prvoj gimnaziji Varaždin održano je individualno natjecanje, a rješavalo se četiri zadatka, po jedan iz svakog velikog matematičkog područja: algebra, kombinatorika, geometrija, teorija brojeva. Pisanje je započelo u 9 sati, a završilo u 14 sati. Nakon završetka na hodnicima vodile su se brojne rasprave uz zabrinuta lica učenika. Uslijedio je ručak u restoranu Park, a nakon toga dugotrajna i mukotrpna diskusija naših rješenja s voditeljima. Zadaci su bili zanimljivi, nisu bili lagani, ali niti posebno teški, što su posljednjeg dana pokazali i rezultati. Kada smo čuli da će svi Poljaci imati 100% bodova, svi Mađari barem tri zadatka od četiri, a da niti Njemačka ne zaostaje puno, pomislili smo da nam spasa nema. Na kraju se ta predviđanja ipak nisu u potpunosti ostvarila, iako su te tri države u pravilu dominantne na ovom natjecanju.

Četvrtog dana održano je ekipno natjecanje, opet u istom terminu kao i pojedinačno. Rješavalo se osam zadataka, po dva iz svakog od navedena četiri matematička područja. Dok smo mi rješavali zadatke, odvijala se bodovna koordinacija na kojoj su se naši voditelji trudili komisiji što bolje predstaviti naša rješenja kako bismo dobili što više bodova. Nakon ekipnog natjecanja u popodnevnim satima održan je i nogometni turnir na kojem su sudjelovale četiri ekipe, Hrvatska, Slovenija, mix Mađarske i Švicarske te mix vodiča i koordinatora. Prvo mjesto pripalo je Mađarima i Švicarcima, dok je Hrvatska ekipa bila četvrta.

Petog dana išli smo na izlet u Varaždinske Toplice i Zagreb. U toplicama su se svi dobro zabavljali, spuštali smo se niz tobogane, a nakon ručka krenuli smo u Zagreb. Kako razgledavanje Zagreba nama nije bilo posebno zanimljivo jer smo tu domaći, vrijeme smo proveli pričajući u jednom od mnogobrojnih kafića u centru grada.

Šestog dana bili su organizirani izleti u Trakošćan i Krapinu. Iako je razgledavanje dvorca i proučavanje pračovjeka i biološke evolucije bilo zanimljivo, glavni trenutak dana je bila podjela medalja. Podijeljeno je ukupno 6 zlatnih, 10 srebrnih i 14 brončanih medalja, pa je točno polovica učenika dobila medalje.

Od naših predstavnika *Luka Filipović* i *Borna Vukorepa* osvojili su srebrne medalje, a *Aleksandar Bulj* i *Boris Juras* brončane. U ekipnoj konkurenciji pobjedu su odnijeli Poljaci s maksimalnim brojem bodova, drugo mjesto osvojili su Mađari, a treće Nijemci. Hrvatska je na ekipnom natjecanju zauzela četvrto mjesto.

Pojedinačno natjecanje

	ime i prezime	**država**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	$\sum$	**medalja**
1.	Wojciech Nadara	Poljska	8	8	8	8	**32**	zlatna
2.	Attila Szabó	Mađarska	8	8	7	8	**31**	zlatna
3.	Dominik Duda	Njemačka	8	8	6	8	**30**	zlatna
3.	Tamás Ágoston	Mađarska	8	8	6	8	**30**	zlatna
5.	Michał Zając	Poljska	8	8	5	8	**29**	zlatna
6.	Karol Kaszuba	Poljska	6	6	8	8	**28**	zlatna
	⋮							
8.	Borna Vukorepa	Hrvatska	8	0	7	8	**23**	srebrna
14.	Luka Filipović	Hrvatska	4	8	0	8	**20**	srebrna
23.	Aleksandar Bulj	Hrvatska	2	3	2	8	**15**	brončana
23.	Boris Juras	Hrvatska	0	0	7	8	**15**	brončana
34.	Mislav Balunović	Hrvatska	2	3	0	6	**11**	
34.	Verner Vlačić	Hrvatska	1	3	7	0	**11**	

Ekipno natjecanje

	država	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**zbroj**
1.	Poljska	8	8	8	8	8	8	8	8	**64**
2.	Mađarska	8	0	8	3	8	8	8	8	**51**
3.	Njemačka	8	0	8	0	8	8	8	8	**48**
4.	Hrvatska	2	8	8	0	3	8	8	0	**37**
5.	Slovačka	1	0	8	0	8	6	8	0	**31**
6.	Litva	6	0	8	0	8	0	8	0	**30**
7.	Slovenija	2	0	8	0	4	3	8	0	**25**
8.	Republika Češka	2	1	4	0	0	5	8	3	**23**
9.	Austrija	1	0	6	0	5	2	8	0	**22**
10.	Švicarska	2	0	6	0	0	0	8	0	**16**

Ovo natjecanje je pokazalo da je Hrvatska sposobna organizirati ozbiljno međunarodno natjecanje. Zahvaljujemo se svim sponzorima, a to su bili: Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, Zagorje-Tehnobeton, Ericsson Nikola Tesla, Vindija, Ledo i

Varaždinska županija. Sljedeća srednjoeuropska matematička olimpijada održat će se u Solothurnu u Švicarskoj, a za desetak godina ponovo u Hrvatskoj.

Borna Vukorepa

Zadaci s pojedinačnog natjecanja, 3. rujna 2011.

1. Na početku je samo broj 44 napisan na ploči. Cijeli broj a na ploči može se zamijeniti s četiri međusobno različita cijela broja a_1, a_2, a_3, a_4 čija je aritmetička sredina, $\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)$, jednaka a. U jednom koraku istodobno mijenjamo sve cijele brojeve na ploči na prethodno opisani način. Nakon 30 koraka ostane $n=4^{30}$ cijelih brojeva $b_1,\ b_2,\ldots,b_n$. Dokaži da je

$$\frac{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{n}\geq 2011.$$

2. Neka je $n\geq 3$ prirodan broj. Ivan i Marija igraju sljedeću igru: najprije Ivan označi stranice pravilnog n-terokuta brojevima $1,2,\ldots,n$ na koji god način želi, koristeći svaki broj točno jednom. Tada Marija dijeli n-terokut na trokute s $n-3$ dijagonale koje se ne sijeku u njegovoj unutrašnjosti. Sve te dijagonale označene su s brojem 1. U svaki od trokuta upisan je umnožak brojeva na njegovim stranicama. Neka je S zbroj tih $n-2$ umnožaka.

Odredi vrijednost od S ako Marija želi da je S najmanji mogući, a Ivan želi da je S najveći mogući i oboje postupaju optimalno.

3. U ravnini su dane kružnice $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ sa središtima I_1 i I_2, redom, koje se sijeku u točkama A i B. Pretpostavimo da je kut $\sphericalangle I_1AI_2$ tup. Tangenta na $\mathcal{K}_1$ u točki A siječe $\mathcal{K}_2$ i u točki C, a tangenta na $\mathcal{K}_2$ u točki A siječe $\mathcal{K}_1$ i u točki D. Neka je $\mathcal{K}_3$ opisana kružnica trokuta BCD. Neka je E polovište luka $\overset{\frown}{CD}$ kružnice $\mathcal{K}_3$ koji sadrži B. Pravci AC i AD sijeku $\mathcal{K}_3$ i u točkama K i L, redom. Dokaži da je pravac AE okomit na KL.

4. Neka su k i m, $k>m$, prirodni brojevi takvi da je $km(k^2-m^2)$ djeljiv s k^3-m^3. Dokaži da je $(k-m)^3>3km$.

Zadaci s ekipnog natjecanja

1. Nađite sve funkcije $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ takve da jednakost

$$y^2f(x)+x^2f(y)+xy=xyf(x+y)+x^2+y^2$$

vrijedi za sve $x,y\in\mathbf{R}$, gdje je $\mathbf{R}$ skup realnih brojeva.

2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=2.$$

Dokažite nejednakost

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

3. Za prirodan broj $n\geq 3$ neka je $\mathcal{M}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{Z},\ 1\leq x\leq n, 1\leq y\leq n\}$ skup točaka ravnine. ($\mathbf{Z}$ je skup cijelih brojeva.)

Koji je najveći mogući broj elemenata podskupa $S \subseteq \mathcal{M}$ koji ne sadrži nikoje tri različite točke koje su vrhovi pravokutnog trokuta?

4. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Na natjecanju nalik MEMO-u sudjeluje $3n$ učenika koji govore ukupno n jezika, a svaki od njih govori točno tri različita jezika.

Dokažite da se može izabrati barem $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ jezika koji se govore, tako da nijedan učenik ne govori više od dva izabrana jezika.

($\lceil x \rceil$ je najmanji cijeli broj veći ili jednak od x.)

5. Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut kojemu su sve stranice jednake duljine. Dijagonale $\overline{AD}$ i $\overline{EC}$ sijeku se u točki S pri čemu je $\sphericalangle ASE = 60°$. Dokažite da u $ABCDE$ postoje dvije paralelne stranice.

6. Neka je ABC šiljastokutan trokut. Označimo s B_0 i C_0 nožišta visina iz vrhova B i C, redom. Neka je X točka unutar trokuta ABC takva da je pravac BX tangenta na opisanu kružnicu trokuta AXC_0 i pravac CX tangenta na opisanu kružnicu trokuta AXB_0. Pokažite da je pravac AX okomit na BC.

7. Neka su A i B disjunktni neprazni skupovi takvi da je $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Pokažite da postoje elementi $a \in A$ i $b \in B$ takvi da je $a^3 + ab^2 + b^3$ djeljivo s 11.

8. Kažemo da je prirodan broj n *nevjerojatan* ako postoje prirodni brojevi a, b, c takvi da vrijedi jednakost

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab).$$

Dokažite da postoji 2011 uzastopnih prirodnih brojeva koji su nevjerojatni.

(Sa (m, n) označavamo najveći zajednički djeljitelj brojeva m i n.)