

Izvještaj s 52. međunarodne matematičke olimpijade 2011. g.



52. međunarodna matematička olimpijada (MMO) održala se u glavnom gradu Nizozemske, Amsterdamu, od 12. do 24. srpnja 2011. godine. Vođe ekipa pristigli su 12. srpnja kako bi na tajnoj lokaciji u okolici Eindhovena izabrali zadatke za olimpijadu. Učenici zajedno sa svojim voditeljima pristizali su 16. srpnja.

Na olimpijadi je sudjelovalo 564 natjecatelja iz 101 države, a među njima bilo je 57 djevojaka. Još su tri države sudjelovale kao promatrači te će zasigurno dogodine poslati svoje natjecatelje. Osim natjecatelja bilo je prisutno stotinjak članova međunarodnog žirija, stotinjak njihovih pomoćnika te pedesetak promatrača. Svakoj ekipi dodijeljen je jedan vodič. Naš je bio, kao i prije dvije godine u Bremenu, *Fabian Parsch*. Osim vodiča, u organizaciji MMO-a je sudjelovalo još oko 200 ljudi.

Hrvatsku su predstavljali *Matija Bucić* (XV. gimnazija, Zagreb), *Domagoj Čevid* (V. gimnazija, Zagreb), *Ivica Kičić* (V. gimnazija, Zagreb), *Matko Ljulj* (XV. gimnazija, Zagreb), *Matija Milišić* (XV. gimnazija, Zagreb) i *Ognjen Stipetić* (V. gimnazija, Zagreb). Vođa naše ekipe je bila *Mea Bombardelli*, a njezin pomoćnik *Tonči Kokan*. Nažalost, u ekipi je samo šest mjesta, pa s nama nisu bili *Borna Vukorepa* (XV. gimnazija, Zagreb) i *Grgur Valentić* (V. gimnazija, Zagreb), rezerve naše ekipe.

Ekipno je prvo mjesto na Olimpijadi zauzela Kina sa 189 bodova, druga je bila ekipa Sjedinjenih Američkih Država, popularno nazivana "Kina 2" sa 184 boda, dok je treće mjesto zauzela ekipa Singapura sa 179 bodova. Hrvatska ekipa osvojila je 36. mjesto s ukupno 110 bodova. Pojedinačno je svaki od naših članova osvojio medalju i to: *Domagoj Čevid* srebrnu, a svi ostali brončane medalje. Ovo je prvi put u povijesti hrvatskih sudjelovanja na MMO-u da su svi članovi ekipe osvojili medalje.

Naši predstavnici su se relativno uzorno vladali, odnosno nisu previše često posjećivali neke dijelove Amsterdama. Na ceremoniji otvaranja, koja se po prvi put direktno prenosila putem interneta, voditelj ceremonije upitao je Matiju Milišića što bi volio posjetiti u Amsterdamu na što je on odgovorio: "coffee shop". Iako organizatori nisu organizirali izlet po coffee shopovima, organizirali su ukupno četiri izleta od kojih je svaka ekipa birala po dva. Mi smo izabrali jedrenje i bicikliranje. Na prvom izletu smo jedrenjakom iz 1894. godine jedrili po Gowseeju do malog mjesta Volendam i nazad. Nekim timovima je bilo ponuđeno kupanje, no nama nije. Izlet na biciklima bio je očekivan s obzirom da su Nizozemci ljudi za njima. Vozili smo se oko Amsterdama i zaustavljali da pogledamo vjetrenjaču za drobljenje krede, te park prirode sličan našem Kopačkom ritu. Na ovim izletima nažalost nisu nas pratili naši voditelji jer su bili jako zaposleni koordinacijom. Pridružili su nam se tek na posljednjem izletu, tj. na razgledavanju samog Amsterdama. Izlet se sastojao od vožnje brodom kanalima Amsterdama, a imali smo i dosta slobodnog vremena. Bio je organiziran i izlet u Arenu u Amsterdamu gdje je bio organiziran nogometni turnir. Hrvatsko-gvatemalska momčad jedina ni u kojem trenutku nije gubila, ponajviše zahvaljujući, Tonću Kokanu, izvanserijskom golmanu. Nažalost, to nam nije bilo dovoljno za prolaz u polufinale. Treba spomenuti i pomoć predstavnika ostalih balkanskih država koji su nam pomogli svojim navijanjem.

Ova Olimpijada je uvela mnogo novih stvari poput mogućnosti praćenja ceremonija otvaranja i zatvaranja putem direktnog online prijenosa i Facebook profila Olimpijade. Mi smo doista uživali u Olimpijadi i sa sobom smo ponijeli mnogo lijepih uspomena i poznanstava. Još da nije bilo *vegetarian lunch policya* u hotelu (a ni večera nije

bila puno bogatija mesnim proizvodima) doista bi sve bilo savršeno. U svakom slučaju golem korak naprijed u odnosu na Kazahstan prošle godine.

Matija Bucić

Zadaci

Prvi dan, Amsterdam, Nizozemska, ponedjeljak, 18. srpnja 2011.

1. Za skup $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ koji se sastoji od četiri međusobno različita prirodna broja, neka s_A označava sumu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Neka n_A označava broj parova (i, j) , $1 \leq i < j \leq 4$, za koje broj $a_i + a_j$ dijeli sumu s_A .

Odredi sve takve skupove A , koji se sastoje od četiri međusobno različita prirodna broja, za koje n_A postiže maksimalnu vrijednost.

2. Neka je S konačan skup točaka u ravini koji sadrži barem dvije točke i neka nikoje tri točke skupa S nisu kolinearne. Nazovimo *vjetrenjačom* postupak određen pravcem l na kojem se nalazi točno jedna točka skupa P skupa S na sljedeći način:

Pravac l rotira u smjeru kazaljke na satu oko točke P (*središta rotacije*) do prvog trenutka kada na pravcu bude još jedna točka skupa l . Ta točka, nazovimo je Q , postaje novo središte rotacije i pravac dalje rotira u smjeru kazaljke na satu oko točke Q , do sljedećeg trenutka kada na pravcu bude još neka točka skupa S . Postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta.

Dokaži da je moguće odabrati središte rotacije $P \in S$ i pravac l koji prolazi kroz P , koji određuju vjetrenjaču u kojoj svaka točka skupa S beskonačno mnogo puta postaje središte rotacije.

3. Neka je $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija takva da je za sve $x, y \in \mathbf{R}$ zadovoljena nejednakost

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

Dokaži da je $f(x) = 0$ za sve $x \leq 0$.

Drugi dan, Amsterdam, Nizozemska, utorak, 19. srpnja 2011.

4. Neka je n prirodan broj. Imamo običnu ravnotežnu vagu i n utega čije su težine $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Na vagu trebamo postaviti sve utege, jednog po jednog, tako da desna strana vage ni u kojem trenutku ne bude teža od lijeve strane. U svakom koraku biramo jedan od utega koji još nisu na vagi i stavljamo ga ili na lijevu, ili na desnu stranu vage, poštujući navedeni uvjet. To ponavljamo dok sve utege ne postavimo na vagu. Odredi na koliko načina to možemo napraviti.

5. Neka je $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ funkcija iz skupa cijelih borjeva u skup prirodnih brojeva, takva da je za sve cijele brojeve m, n razlika $f(m) - f(n)$ djeljiva brojem $f(m - n)$. Dokaži da je broj $f(n)$ djeljiv brojem $f(m)$, za sve $m, n \in \mathbf{Z}$ za koje je $f(m) \leq f(n)$.

6. Neka je ABC šiljastokutan trokut i Γ njegova opisana kružnica. Neka je l bilo koja tangenta na kružnicu Γ , i neka su l_a, l_b i l_c pravci simetrični pravcu l s obzirom na pravce BC, CA i AB redom. Dokaži da kružnica opisana trokutu kojeg određuju pravci l_a, l_b i l_c dodiruje kružnicu Γ .

Vrijeme za rad svakog dana: 4 sata i 30 minuta

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Rang-lista

	nagrade			broj poh. bod.		nagrade			broj poh. bod.
	I	II	III			I	II	III	
Kina	6			189	Kolumbija		1	4	73
SAD	6			184	Makao		2	3	71
Singapur	4	1	1	179	Filipini (5)		3		69
Rusija	2	4		161	Mongolija		2	3	69
Tajland	3	2	1	160	Švedska	1		3	76
Turska	3	2	1	159	Latvija	1	1	1	68
Sjeverna Koreja	3	3		157	Finska	1		3	68
Tajvan	2	4		154	Tadžikistan	1		2	68
Rumunjska	1	5		154	Gruzija		2	2	68
Iran	2	4		151	Norveška	1		3	67
Njemačka	1	3	2	150	Maroko	1	1	2	64
Japan	2	2	2	147	Turkmenistan		3	1	64
Južna Koreja	2	3		144	Bosna i Hercegovina		1	4	64
Hong Kong	2	1	3	138	Slovenija		1	3	64
Poljska	2	2	1	136	Uzbekistan (5)		1	2	62
Ukrajina	1	2	3	136	Azerbajdžan	1	1	1	61
Kanada	1	2	3	132	Armenija (5)	1		3	61
Velika Britanija	2	1	2	132	Kostarika (4)	1		3	57
Italija	1	3	1	129	Saudijska Arabija		2		53
Brazil		3	3	121	Cipar		1	1	51
Bugarska		2	3	121	Bangladeš		1	1	50
Meksiko		2	4	120	Šri Lanka		1	2	49
Indija	1	1	2	119	Luksemburg		1	2	48
Izrael	1		4	119	Čile		1	1	48
Srbija	1	2	1	116	Island			3	48
Australija		3	3	116	Tunis		1	1	46
Mađarska		2	3	116	Nigerija		1		40
Nizozemska		2	3	115	Makedonija		1		38
Indonezija		2	4	114	Paragvaj (5)			1	38
Novi Zeland		2	2	114	Pakistan (4)		1	1	35
Bjelorusija		2	3	113	Obala Bjelokosti			2	34
Peru	1		2	3 113	Ekvador		1		32
Vijetnam			6	113	Portoriko (4)			2	32
Slovačka		2	3	1 111	Urugvaj (4)			2	29
Francuska		1	4	1 111	Trinidad i Tobago			1	29
Austrija		2	2	2 110	Irska				26
Hrvatska		1	5	110	Albanija			1	24
Kazahstan		1	3	2 105	Kosovo			1	22
Češka		1	3	2 101	Venezuela (2)			2	21
Grčka	1		3	1 99	Honduras (3)			1	21
Malezija	1	1	1	2 93	Bolivija (4)			1	17
Južnoafrička Republika		1	2	2 93	Kirgistan (5)			1	14
Švicarska		2	1	1 88	Sirija			1	14
Belgija			4	1 88	Crna Gora (4)			1	13
Litva			4	2 87	Salvador (2)				11
Portugal	1		2	1 86	Gvatemala (4)				8
Moldavija		1		4 86	Panama (1)				6
Španjolska			3	1 83	Lihtenštajn (1)				4
Argentina		1		4 77	Kuvajt (5)				1
Danska		1	1	2 76	Ujedinjeni Arapski Emirati (5)				1
Estonija			2	3 76					