Međunarodno matematičko natjecanje “Klokan bez granica” 2011. g., drugi dio

Donosimo ostatak zadataka s Međunarodnog matematičkog natjecanja “Klokan bez granica” 2011. g.

(nastavak iz prošlog broja)

Zadaci za učenike 2. i 3. razreda srednje škole (Junior)

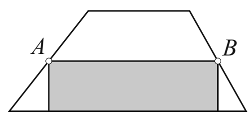
Pitanja za 3 boda:

1. Zebra na pješačkom prijelazu ima crne i bijele pruge širine 50 cm. Prijelaz započinje i završava bijelim prugama i ima ukupno 8 bijelih pruga. Kolika je širina ceste?

A. 7 m **B.** 7.5 m **C.** 8 m **D.** 8.5 m **E.** 9 m

Rješenje: B. 8 bijelih i 7 crnih pruga između njih je ukupno 15 pruga, ukupne širine 750 cm ili 7.5 m.

2. Pravokutnik na slici ima površinu 13 cm^2. Točke A i B su polovišta krakova trapeza. Kolika je površina trapeza?



A. 24 cm^2 **B.** 25 cm^2 **C.** 26 cm^2 **D.** 27 cm^2 **E.** 28 cm^2

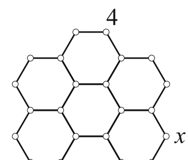
Rješenje: C. Neka je $s = |AB|$, a y duljina druge stranice pravokutnika. Tada vrijedi $s \cdot y = 13 \implies s = \dfrac{13}{y}$. Za visinu trapeza vrijedi $v = 2y$. Dužina $\overline{AB}$ je srednjica trapeza, a površina trapeza računa se po formuli $P = s \cdot v$. Uvrštavanjem s i v u formulu za površinu dobivamo $P = 26$ cm^2.

3. Koja je od sljedećih relacija istinita, ako su izrazi zadani kao $S_1 = 2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5$, $S_2 = 2^2+3^2+4^2$ i $S_3 = 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4$?

A. $S_2 < S_1 < S_3$ **B.** $S_1 < S_2 = S_3$ **C.** $S_1 < S_2 < S_3$ **D.** $S_3 < S_2 < S_1$ **E.** $S_1 = S_2 < S_3$

Rješenje: D. $S_1 = 38$, $S_2 = 29$, $S_3 = 20$.

4. Zbrojevi brojeva pridruženih krajnjim točkama iste dužine su jednaki, za sve dužine na slici. Dva broja su već pridružena dvjema krajnjim točkama. Koji broj treba pridružiti točki označenoj s x?



A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** nedovoljno podataka

Rješenje: A. Da bi zbrojevi brojeva pridruženih krajnjim točkama iste dužine svi bili jednaki, krajnjim točkama svih dužina moraju biti pridruženi brojevi 1 i 4. Prema tome, točki označenoj s x treba pridružiti broj 1.

5. Pri dijeljenju broja 2011 nekim brojem, ostatak je 1011. Koji je od sljedećih brojeva bio djelitelj?

A. 100 **B.** 500 **C.** 1000 **D.** neki drugi broj **E.** nije moguće dobiti taj ostatak

Rješenje: E.

6. Mozaik površine 360 cm^2, oblika pravokutnika, sastavljen je od jednakih dijelova kvadratnog oblika. Mozaik je dug 24 cm, a po širini ima 5 dijelova kvadratnog oblika. Kolika je površina svakog dijela kvadratnog oblika?

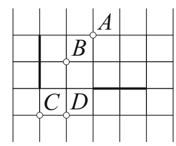
A. 1 cm^2 **B.** 4 cm^2 **C.** 9 cm^2 **D.** 16 cm^2 **E.** 25 cm^2

Rješenje: C. Pravokutnik je širok 15 cm, duž te stranice ima 5 dijelova kvadratnog oblika. Duljina stranice tog kvadratnog dijela je 3 cm, a površina 9 cm^2.

7. Svi četveroznamenkasti brojevi čija je suma znamenaka 4 napisani su u padajućem nizu. Na kojem mjestu u tom nizu se nalazi broj 2011?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9. **E.** 10.

Rješenje: D. Padajući niz četveroznamenkastih brojeva sa zadanim svojstvom glasi: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002, 1300, 1210, 1201, 1120, 1111, 1102, 1030, 1021, 1012, 1003.

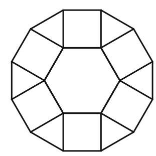


8. Obje jače istaknute dužine na slici su rotacijske slike jedna druge. Koje od istaknutih točaka mogu biti središta takve rotacije?

A. Samo A **B.** A i C **C.** A i D **D.** Samo D **E.** A, B, C i D

Rješenje: C.

Pitanja za 4 boda:



9. Lik na slici sastoji se od pravilnog šesterokuta, šest trokuta i šest kvadrata. Duljina stranice pravilnog šesterokuta je 1 cm. Koliki je opseg tog lika?

A. $6(1+\sqrt{2})$ cm **B.** $6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ cm **C.** 12 cm **D.** $(6+3\sqrt{2})$ cm **E.** 9 cm

Rješenje: C. Lik se sastoji od pravilnog šesterokuta, šest jednakostraničnih trokuta i šest kvadrata. Dužine koje omeđuju taj lik imaju sve duljinu 1 cm. Ima ih 12, pa je opseg lika 12 cm.

10. Tri standardne igraće kocke složene su jedna na drugu tako da je zbroj točkica na stranama po kojima se spajaju uvijek 5. Na jednoj od vidljivih strana donje kocke vidi se jedna točkica. Koliko točkica ima gornja strana kocke na vrhu?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6

Rješenje: E.

11. Jedan od mjeseca u godini ima 5 ponedjeljaka, 5 utoraka i 5 srijeda. Prethodni mjesec ima samo 4 nedjelje. Što ima sljedeći mjesec?

A. točno 4 petka **B.** točno 4 subote **C.** 5 nedjelja **D.** 5 ponedjeljaka **E.** nemoguća situacija

Rješenje: B.

12. Mihael, Fernando i Sebastijan sudjelovali su u utrci. Odmah nakon starta, Mihael je bio prvi, Fernando drugi, a Sebastijan treći. Tijekom utrke Mihael i Fernando prestizali su se međusobno 9 puta, Fernando i Sebastijan 10 puta, a Mihael i Sebastijan 11 puta. U kojem poretku su završili utrku?

A.	**B.**	**C.**	**D.**	**E.**
Mihael	Fernando	Sebastijan	Sebastijan	Fernando
Fernando	Sebastijan	Mihael	Fernando	Mihael
Sebastijan	Mihael	Fernando	Mihael	Sebastijan

Rješenje: B.

13. Ako je $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$, koliki je n?

A. 1005 **B.** 1006 **C.** 2009 **D.** 2010 **E.** 2011

Rješenje: A. $3 \cdot 3^{2n} = 3^{2011}$, odnosno $2n + 1 = 2011$, $n = 1005$.

14. Imamo dvije kocke s bridovima duljina a dm i $a + 1$ dm. Veća kocka puna je vode, a manja je prazna. Prelijevamo vodu iz veće u manju kocku dok je ne napunimo, ostavljajući tako 217 litara vode u većoj kocki. Koliko smo vode prelili u manju kocku?

A. 243 l **B.** 512 l **C.** 125 l **D.** 1331 l **E.** 729 l

Rješenje: B. Vrijedi $(a + 1)^3 - a^3 = 217$, rješenje je $a = 8$. U manju kocku prelili smo 512 l.

15. Polja ove kvadratne mreže treba obojati crnom ili bijelom bojom. Pored svakog retka, odnosno ispod svakog stupca nalazi se broj crnih polja za odgovarajući redak, odnosno stupac. Na koliko načina to možemo učiniti?

				2
				0
				1
				1
2	0	1	1	

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5 **E.** 9

Rješenje: D.

16. Koji je najveći broj uzastopnih troznamenkastih brojeva koji imaju najmanje jednu neparnu znamenku?

A. 1 **B.** 10 **C.** 110 **D.** 111 **E.** 221

Rješenje: D. Niz 289, 290, 291,..., 398, 399 ili 489, 490, 491,..., 598, 599.

Pitanja za 5 bodova:

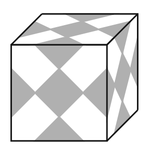
17. Nikola želi upisati brojeve u kvadratiće tako da zbroj u svakom kvadratu 2×2 iznosi 10. Pet brojeva je već upisano, kao na slici. Nađi zbroj preostala četiri broja.

1		0
	2	
4		3

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12 **E.** 13

Rješenje: D. To su brojevi $4 + 3 + 4 + 1 = 12$.

18. Šimun ima staklenu kocku brida duljine 1 dm. Na strane kocke nalijepio je sukladne kvadrate zlatne boje, tako da kocka sa svih strana izgleda jednako, što se može vidjeti na slici. Koliko je površine kocke zlatne boje?



A. 37.5 cm^2 **B.** 150 cm^2 **C.** 225 cm^2 **D.** 300 cm^2 **E.** 375 cm^2

Rješenje: C. Za zlatne kvadrate vrijedi da je duljina njihove dvostruke dijagonale jednaka duljini brida kocke. Duljina dijagonale kvadrata je 0.5 dm, a duljina stranice kvadrata $\frac{\sqrt{2}}{4}$ dm. Površina zlatnog kvadrata je $\frac{1}{8}$ dm^2, a takvih zlatnih kvadrata ima 12, površina kocke zlatne boje je $\frac{9}{4}$ dm^2, odnosno 225 cm^2.

19. Koliko uređenih parova prirodnih brojeva (x, y) zadovoljava jednakost $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** 4

Rješenje: D. $3y+3x=xy \implies x=\frac{3y}{y-3}=\frac{3(y-3)+9}{y-3}=3+\frac{9}{y-3} \implies (6,6)$, $(12,4)$, $(4,12)$.

20. Peteroznamenkasti broj $\overline{abcde}$ naziva se *zanimljivim* ako su mu sve znamenke međusobno različite i ako vrijedi $a=b+c+d+e$. Koliko ima *zanimljivih* brojeva?

A. 72 **B.** 144 **C.** 168 **D.** 216 **E.** 288

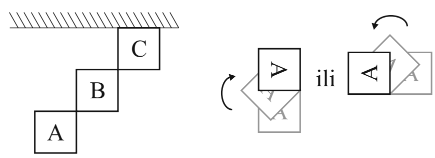
Rješenje: C. Osnovni zanimljivi brojevi su: 90 234, 90 135, 90 126, 80 134, 80 125, 70 124, 60 123, a preostali su permutacije znamenaka b, c, d i e. Ima ih: $7 \cdot 24 = 168$.

21. Strana ABC pravilnog tetraedra $ABCD$ nalazi se u ravnini ϵ. Brid $\overline{BC}$ nalazi se na pravcu s. Drugi pravilni tetraedar $BCDE$ ima zajedničku stranu s tetraedrom $ABCD$. Gdje pravac DE siječe ravninu ϵ?

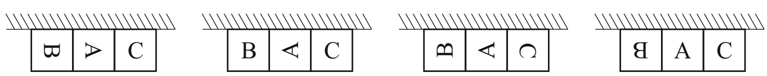
A. u poluravnini određenoj pravcem s u kojoj je i točka A, unutar trokuta ABC
B. u poluravnini određenoj pravcem s u kojoj je i točka A, izvan trokuta ABC
C. u poluravnini određenoj pravcem s u kojoj se ne nalazi točka A
D. pravac DE je usporedan s ravninom ϵ **E.** odgovor ovisi o duljini brida tetraedra

Rješenje: C.

22. Tri velike kutije dostavljene su u skladište i smještene na pod. Pogled odozgo na te kutije prikazan je na slici 1. Kutije treba složiti uzduž zida. S obzirom da su jako teške, mogu se pomicati rotiranjem oko donjih vrhova kutova za $90°$ (slika 2). Koja je slika moguća?



A. **B.** **C.** **D.** **E.** sve četiri slike su moguće



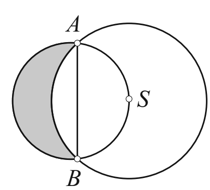
Rješenje: B.

23. Brojevi x i y veći su od 1. Koji od sljedećih razlomaka ima najveću vrijednost?

A. $\frac{x}{y+1}$ **B.** $\frac{x}{y-1}$ **C.** $\frac{2x}{2y+1}$ **D.** $\frac{2x}{2y-1}$ **E.** $\frac{3x}{3y+1}$

Rješenje: B.

24. Dva kruga nacrtana su kao na slici. Dužina $\overline{AB}$ promjer je manjeg kruga. Središte većeg kruga nalazi se na manjoj kružnici, a polumjer većeg kruga ima duljinu r. Kolika je površina osjenčanog dijela?



A. $\frac{\pi}{6} \cdot r^2$ **B.** $\frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12} \cdot r^2$ **C.** $\frac{1}{2} \cdot r^2$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$
E. neki drugi odgovor

Rješenje: C. Površinu osjenčanog dijela možemo dobiti kao razliku površine manjeg polukruga i površine odsječka većeg kruga nad tetivom $\overline{AB}$. Duljina polumjera manjeg kruga je $\frac{r\sqrt{2}}{2}$, a površina manjeg polukruga $\frac{r^2\pi}{4}$. Površina odsječka većeg kruga nad tetivom $\overline{AB}$ može se dobiti kao razlika površine kružnog isječka većeg kruga nad kružnim lukom $\widehat{AB}$ i površine jednakokračnog pravokutnog trokuta ASB. Površina kružnog isječka većeg kruga nad kružnim lukom $\widehat{AB}$ je $\frac{r^2\pi \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{r^2\pi}{4}$, a površina jednakokračnog pravokutnog trokuta ASB je $\frac{r^2}{2}$. Površina odsječka većeg kruga nad tetivom $\overline{AB}$ je $\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2}$. Površina osjenčanog dijela je $\frac{r^2\pi}{4} - \left(\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{r^2}{2}$.

Zadaci za za učenike 4. razreda srednje škole (Student)

Pitanja za 3 boda:

1. Vidi zadatak 4, Junior.

2. Vidi zadatak 7, Junior.

3. Vidi zadatak 9, Junior.

4. Vidi zadatak 12, Junior.

5. Ako je $2^x = 15$ i $15^y = 32$, tada je $x \cdot y$ jednak:

A. 5 **B.** $\log_2 15 + \log_{15} 32$ **C.** $\log_2 47$ **D.** 7 **E.** $\sqrt{47}$

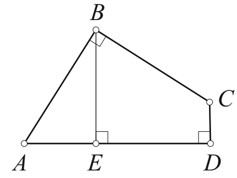
Rješenje: A. Iz $2^x = 15$ slijedi $x = \log_2 15$, a iz $15^y = 32$ slijedi $y = \log_{15} 32$. Prema tome, $x \cdot y = \log_2 15 \cdot \log_{15} 32 = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$.

6. Andrija je napisao na ploči neparne prirodne brojeve manje od 2012, zatim je Boris obrisao među njima sve višekratnike broja 3. Koliko je brojeva ostalo na ploči?

A. 335 **B.** 336 **C.** 671 **D.** 1005 **E.** 1006

Rješenje: C. Od 1006 neparnih brojeva (manjih od 2012) 335 su djeljivi s 3. Na ploči je ostao 671 broj.

7. Vidi zadatak 14, Junior.

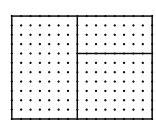


8. Za četverokut $ABCD$ na slici vrijedi: $|AB| = |BC|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 90^\circ$, $BE \perp AD$, $|BE| = 5$. Kolika je površina četverokuta $ABCD$?

A. 20 **B.** 22.5 **C.** 25 **D.** 27.5 **E.** 30

Rješenje: C. Premjestimo li pravokutni trokut AEB nad stranicu $\overline{BC}$, dobiveni četverokut bit će kvadrat sa stranicom duljine 5, a njegova površina 25.

Pitanja za 4 boda:



9. Veći pravokutnik podijeljen je na tri manja. Jedan od manjih ima stranice duljina 7 i 11. Drugi od manjih ima stranice duljina 4 i 8.

Nađi duljine stranica trećeg od manjih pravokutnika s maksimalnom površinom.

A. 1 i 11 **B.** 3 i 4 **C.** 3 i 8 **D.** 7 i 8 **E.** 7 i 11

Rješenje: D.

10. Mihael želi upisati brojeve u kvadratiće tako da zbroj u svakom kvadratu 2×2 iznosi 10. Četiri broja su već upisana, kao na slici. Koji od sljedećih brojeva može biti zbroj preostalih pet brojeva u kvadratu?

	2	
1		3
	4	

A. 9 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 13
E. nijedan od ponuđenih brojeva nije rješenje

Rješenje: E.

11. Na skijaški izlet išlo je 48-ero djece. Šestero od njih bilo je s jednim bratom ili sestrom, devetero je bilo s točno dvoje braće ili sestara i četvero od njih s točno troje braće ili sestara. Ostala djeca nisu imala braće i sestara na izletu. Koliko je obitelji išlo na izlet?

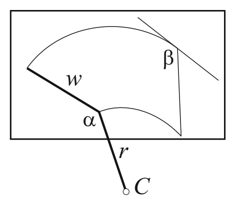
A. 19 **B.** 25 **C.** 31 **D.** 36 **E.** 48

Rješenje: D. Tri su para, tri trojke i jedna četvorka braće i sestara. Ostalih 29-ero su sami na izletu. Ukupno 36 obitelji.

12. Vidi zadatak 18, Junior.

13. Vidi zadatak 20, Junior.

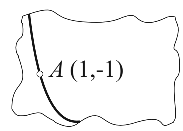
14. Brisač zadnjeg stakla na automobilu konstruiran je tako da se sastoji od dva dijela jednake duljine, metlice w i štapića r koji su spojeni tako da zatvaraju kut α. Brisač rotira oko točke C i briše površinu stakla, kao na slici. Odredi veličinu kuta β između metlice desno i tangente.



A. $\dfrac{3\pi-\alpha}{2}$ **B.** $\pi-\dfrac{\alpha}{2}$ **C.** $\dfrac{3\pi}{2}-\alpha$ **D.** $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ **E.** $\pi+\dfrac{\alpha}{2}$

Rješenje: B. Spojimo točku C s vrhom brisača, dobit ćemo jednakokračan trokut u kojem kut pri vrhu brisača označimo sa x. $x+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{2}=\pi$, $\beta=\dfrac{\pi}{2}+x$, $\beta=\pi-\dfrac{\alpha}{2}$.

15. U pravokutnom koordinatnom sustavu xOy, na paraboli $y=ax^2+bx+c$ bila je označena točka $A(1,-1)$. Nakon toga, koordinatne osi i skoro cijela parabola su izbrisane, kao na slici. Koja je od sljedećih izjava netočna?



A. $a>0$ **B.** $b<0$ **C.** $a+b+c<0$ **D.** $b^2>4ac$ **E.** $c<0$

Rješenje: E.

16. Odredi zbroj svih pozitivnih cijelih brojeva x manjih od 100 za koje je izraz x^2-81 višekratnik broja 100.

A. 200 **B.** 100 **C.** 90 **D.** 81 **E.** 50

Rješenje: A. Izraz x^2-81 je višekratnik broja 100 za pozitivne cijele brojeve 9, 41, 59 i 91. Njihov zbroj je 200.

Pitanja za 5 bodova:

17. Vidi zadatak 19, Junior.

18. Braća Alan i Branimir dali su istinite izjave o broju članova njihovog šahovskog kluba. Alan je rekao: “Svi članovi kluba, osim njih 5, su dječaci”. Branimir je izjavio: “U svakoj grupi od 6 članova najmanje su četiri djevojke”. Koliko članova ima njihov šahovski klub?

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 12 **E.** 18

Rješenje: B.

19. U bubnju se nalaze loptice. Na svakoj od njih napisan je prirodni broj i nema loptica s jednakim brojevima. Brojevi djeljivi sa 6 napisani su na 30, brojevi djeljivi sa 7 na 20, a brojevi djeljivi s 42 na 10 loptica. Koliko najmanje loptica mora biti u bubnju?

A. 30 **B.** 40 **C.** 53 **D.** 54 **E.** 60

Rješenje: B. Brojeva djeljivih s 42 ima 10, ali oni su ujedno djeljivi i sa 6 i sa 7. Brojeva djeljivih samo sa 7 ima 10, a brojeva djeljivih samo sa 6 ima 20. U bubnju ima najmanje 40 loptica.

20. Vidi zadatak 24, Junior.

21. Niz numeričkih funkcija $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,... zadovoljava sljedeće uvjete: $f_1(x) = x$ i $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$. Odredi vrijednost $f_{2011}(2011)$.

A. 2011 **B.** $-\dfrac{1}{2010}$ **C.** $\dfrac{2010}{2011}$ **D.** 1 **E.** 2011

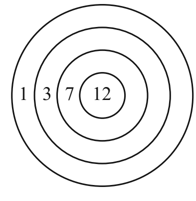
Rješenje: A. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $f_4(x) = x$. Funkcije se ponavljaju ciklički, ostatak pri dijeljenju broja 2011 s 3 je 1. Znači, $f_{2011}(x) = 2011$.

22. Aviokompanija naplaćuje taksu za prtljagu ako masa prtljage po osobi prelazi određeni iznos. Za svaki kilogram viška naplaćuje se taksa. Masa prtljage bračnog para Zetić iznosi 60 kg i naplaćena im je taksa od 3 eura. Prtljaga gđe Čudić ima istu masu kao i prtljaga Zetićevih, ali joj je naplaćena taksa od 10.50 eura. Kolika je maksimalna masa prtljage bez naplate takse?

A. 10 kg **B.** 18 kg **C.** 20 kg **D.** 25 kg **E.** 39 kg

Rješenje: D.

23. Robin Hood pogodio je tri strelice u metu i pri tome osvojio određeni broj bodova, kao što pokazuje slika. Koliko različitih zbrojeva bodova je on mogao postići?



A. 13 **B.** 17 **C.** 19 **D.** 20 **E.** 21

Rješenje: C. Mogući različiti zbrojevi su: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 31 i 36.

24. Dvadeset različitih prirodnih brojeva je upisano u tablicu 4×5. Bilo koja dva susjeda (brojevi u kvadratićima sa zajedničkom stranicom) imaju zajednički djelitelj veći od 1. Ako je n najveći broj u tablici, nađi njegovu najmanju moguću vrijednost.

A. 21 **B.** 24 **C.** 26 **D.** 27 **E.** 40

Rješenje: C.