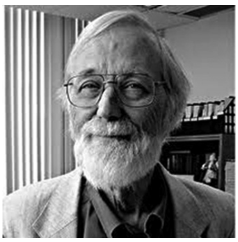
John Milnor – dobitnik Abelove nagrade za 2011. godinu

Darko Veljan[1]

Iz biografije J. W. Milnora



Ove je godine Abelovu nagradu dobio američki matematičar John Willard Milnor, profesor Sveučilišta Stony Brook u saveznoj državi New York, rođen 1931. godine u Orange, N.J. Diplomirao je matematiku na Sveučilištu Princeton 1951., a tri godine kasnije doktorirao. Do 1989. bio je profesor na Princeton University, a kasnije stalni član čuvenog Institute for Advanced Study.

O Abelovoj smo nagradi već pisali otkad ju je 2002. godine ustanovila Norveška akademija znanosti prigodom 200-te obljetnice rođenja velikog norveškog matematičara Nielsa Henryka Abela. Nagradu svake godine dodjeljuje kralj Norveške jednome (ili najviše dvojici) matematičara uz novčani iznos od oko milijun američkih dolara (ili oko 750 000 eura). O dosadašnjim laureatima vidi članke [1]–[4].

U najavi ovogodišnje nagrade povjerenstvo za nagrade između ostalog kaže da Milnor ne samo da je tvorac novih pojmova i idejni začetnik mnogih novih teorija nego i izvanredno darovit tumač, objašnjavač i pisac o suvremenoj i sofisticiranoj matematici. Često je postavljao nove teške probleme o kojima se do tada nije gotovo ništa znalo niti je o njima bilo ikakvih knjiga ili drugih zapisa. Zatim bi te duboke probleme sagledao u potpuno novom svjetlu te ih riješio na samo njemu svojstven britak, jasan, elegantan i lucidan način. Kao što poneki nadahnuti glazbeni skladatelj zna biti i karizmatični izvođač, tako je John Milnor istovremeno i pronalazač i tumač.

Milnor je i ranije dobio mnoga priznanja za svoja matematička postignuća. Tako je još 1962. godine dobio Fieldsovu medalju, te Wolfovu nagradu 1989. i jedini je koji je dobio sve tri Steelove nagrade Američkog matematičkog društva i to 1982. za značajne doprinose u istraživanju, 2004. za matematička tumačenja i prikaze u knjigama i časopisima te 2011. za životno djelo. Glavna su područja njegovih istraživanja topologija, geometrija, algebra i dinamički sustavi. Njegova supruga Dusa McDuff također je topolog i geometar.

Milnorovi članci i knjige odišu legendarnom visokom kvalitetom i profinjenošću izlaganja tako da ih svatko iole upućen u problematiku može razumjeti. Navedimo naslove samo nekih od njegovih knjiga – "klasika" (neke i u koautorstvu): *Morse Theory, Characteristic Classes, Topology from the Differential Viewpoint, Algebraic K-theory, Dynamics in One Complex Variable*.

Tim Gowers koji je na svečanoj dodjeli nagrade govorio o Milnorovom radu kazao je da on (Milnor) ne samo da je dokazao neke čuvene teoreme nego su i područja, u kojima je dao bitne doprinose, vrlo raznolika te da je poznat i po tome da je izuzetno darovit po vrhunskoj jasnoći i ljepoti u objašnjavanju. Stoga se njegov utjecaj osjeća posvuda u suvremenoj matematici.

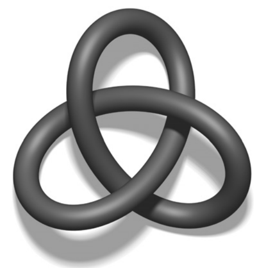
[1] Autor je redoviti profesor u mirovini na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu; e-pošta: darko.veljan@gmail.com

Milnorovi matematički radovi

U opisu Milnorovih radova najviše ćemo se zadržati na njegovim doprinosima geometriji i topologiji.

Zakrivljenost uzlova

Prvi doprinos matematici Milnor je dao kao 19-godišnji student na Princetonu kada je razriješio sljedeći problem. Promotrimo u trodimenzionalnom prostoru (ili kraće u 3D-prostoru) bilo kakvu zatvorenu krivulju, tj. koja počinje i završava u istoj točki. Kakvu ona ukupnu zakrivljenost mora imati?



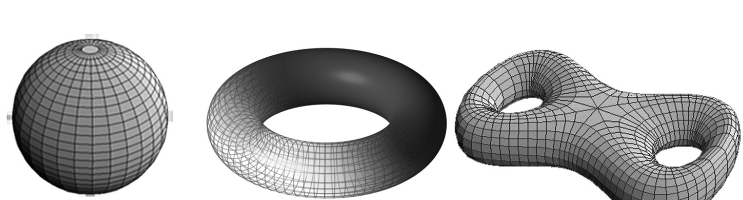
Slika trolisnog uzla

Pokušajmo razjasniti to pitanje. Kad zavežemo neko uže u uzao onda se ono mora negdje zavinuti ili drukčije rečeno mora se zakriviti. U svakoj točki P tog uzla definiramo njegovu zakrivljenost i to tako da gledamo najveću kružnicu koja dira uzao u točki P i ne dira ga nigdje drugdje u blizini od P. Ako je r radijus te kružnice onda je $1/r$ zakrivljenost uzla u toj točki P. Što je veći radijus to je manja zakrivljenost i obrnuto. Ukupna zakrivljenost uzla dobije se tako da se nađe prosječna zakrivljenost, tj. zbroje se (točnije integriraju) sve zakrivljenosti i pomnoži se s duljinom uzla. Ako je uzao kružnica radijusa r, dakle, u stvari nezauzlani ("trivijalni") uzao onda mu je u svakoj točki zakrivljenost $1/r$, pa je ukupna zakrivljenost $2\pi r \cdot 1/r = 2\pi$. Ako se pak radi o nekom netrivijalnom uzlu, npr. o "trolisnom uzlu" kao na slici, onda je intuitivno jasno da bi se krivulja zauzlala treba joj da obiđe kružnicu više od dva puta.

I doista, zamislimo li da smo u "središtu" uzla onda ima smisla reći da krivulja "ide dvaput okolo". Zato joj je zakrivljenost veća od $2 \cdot 2\pi = 4\pi$. To je i osnovna ideja kako je Milnor dokazao da svaki netrivijalan uzao ima zakrivljenost veću od 4π. Priča se da je Milnor taj problem vidio na ploči zakasnivši na predavanje o uzlovima kod profesora R. Foxa i riješio ga misleći da je to bio zadatak za domaću zadaću. Pritom se, navodno, ispričao da nije znao riješiti ostalih šest "zadataka" (otvorenih problema).

Mnogostrukosti

Jedan od najvažnijih pojmova u matematici je mnogostrukost. U dimenziji dva to su naprosto plohe. Primjerice, 2-dimenzionalne mnogostrukosti bez ruba su sfera, torus, dvostruki torus itd.



Slika sfere, torusa i dvostrukog torusa

Osnovno im je svojstvo da svaka točka ima malu okolinu u kojoj izgleda kao komad papira, tj. kao ravnina (doduše ne savršeno ravna) i kažemo da je takva ploha "lokalno euklidska". Dakle, geometrija na plohi u vrlo maloj okolini svake točke ponaša se i ima sva svojstva obične geometrije kakvu znaju (ili bi trebali znati) učenici srednjih škola. Takvu je geometriju zasnovao Euklid prije gotovo 2400 godina. No, ploha kao takva globalno, tj. kao cjelina uopće nije euklidska. Primjerice na sferi, točke su naprosto točke sfere, a "pravac" kroz dvije točke je crta koja na najkraći način spaja te točke, a to je velika kružnica na toj sferi, tj. presjek ravnine određene s te dvije točke i centrom sfere i same sfere. U toj geometriji, za razliku od euklidske nema paralelnih pravaca. Npr. svaka dva meridijana okomita na ekvator sijeku se na sjevernom i južnom polu.

Mnogostrukosti postoje u svakoj dimenziji, pa govorimo o npr. 12-dimenzionalnoj mnogostrukosti (ili kratko 12-mnogostrukosti). One se mogu opisati na unutarnji način bez pozivanja na okolni prostor u kojem ona živi (npr. 2-sfera u 3-prostoru kao skup svih točaka u 3-prostoru jednako udaljenih od središta).

U topologiji se proučavaju neprekidne transformacije (deformacije) jednog objekta ("topološkog prostora") u drugi. I ako takva transformacija postoji, i ako je bijekcija, čiji je inverz također neprekidna, zovemo je *homeomorfizam*, a te objekte *homeomorfnim prostorima*. Tako su kružnica i elipsa homeomorfne, a kocka i kugla također, dok npr. sfera i torus nisu homeomorfni. Kad se radi o n-mnogostrukostima možemo reći da svaka točka ima okolinu homeomorfnu s n-dimenzionalnim euklidskim prostorom. Takve objekte zovemo topološke mnogostrukosti.

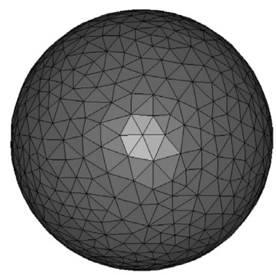
No, ako uzmemo u obzir diferencijalni i integralni račun (ili u engleskom žargonu "calculus"), onda kažemo da su dva objekta difeomorfna ako se mogu transformirati jedan na drugi ne samo neprekidno nego štoviše i "glatko" (tehnički rečeno postoje neprekidne derivacije svakog reda).

Milnor je 1956. godine našao izvanredno zanimljiv objekt-topološki prostor koji je homeomorfan, ali nije difeomorfan 7-dimenzionalnoj sferi. Takve je objekte nazvao "egzotične sfere". Otkriće egzotičnih sfera izazvala je pravu malu senzaciju u matematičkom svijetu. Činjenica da mnogostrukosti mogu biti homeomorfne, ali ne i difeomorfne znači da je diferencijabilna mnogostrukost pojam koji je sam po sebi važan i daje novi pogled na same topološke mnogostrukosti. S tim je Milnorovim otkrićem nastalo i novo područje istraživanja u matematici: *diferencijalna topologija*. Nakon otkrića egzotičnih sfera nađeno je i koliko ih ima na nekim sferama. Na 7-dimenzionalnoj sferi ih ima 28, na 8-sferi dvije, na 12-sferi samo jedna-ona standardna, na 15-sferi ih ima 16 256 itd. Tek je 2009. godine nađena opća formula za sfere bilo koje dimenzije (do 64 osim u dimenziji 4).

Hauptvermutung

"Hauptvermutung" je njemačka riječ i znači "glavna slutnja". Problem je to iz 1908. godine i u njoj se pita imaju li svake dvije triangulacije jedne mnogostrukosti zajedničko profinjenje?

Evo u grubim crtama o čemu se tu radi. Triangulacija neke 2-dimenzionalne mnogostrukosti je naprosto njezin rastav na trokute (i kad ih je jako puno malih, kazat ćemo "trokutići").



Slika triangulirane sfere

Triangulirati neku n-dimezionalnu mnogostrukost znači rastaviti je na simplekse dimenzije n. Za $n = 3$ to su tetraedri (zadatak: može li se kocka triangulirati u pet tetraedara? U šest očito može). Smatralo se da će proučavanje mnogostrukosti biti puno lakše kad se pomnije prouči kako su trokuti (ili općenito simpleksi) posloženi u triangulaciji. Zato bi bilo važno da različite triangulacije daju isti zaključak o mnogostrukosti. Ako svaki trokutić neke triangulacije rastavimo u manje trokutiće tako da opet dobijemo triangulaciju čitave mnogostrukosti, onda kažemo da smo dobili profinjenje prvotne triangulacije (primjerice, ako u svakom trokutiću povučemo sve tri težišnice, dobijemo profinjenje početne triangulacije). Imaju li, dakle, svake dvije triangulacije zajedničko profinjenje pita "hauptvermutung". Milnor je 1961. našao protuprimjer. Godine 1982. nađena je 4-dimenzionalna mnogostrukost (s rubom) koja se uopće ne može triangulirati (M. Freedman).

Algebarska topologija

Milnor je bitno unaprijedio algebarsku topologiju. Geometrija i algebra su odavno vrlo usko povezane matematičke discipline, a napose od doba Descartesa (17. st.) kada se uvidjelo da se geometrijski likovi mogu opisati simbolima u koordinatnom sustavu, kao na primjer jednadžba elipse i slično. Algebarska topologija rabi algebru da se dobije bolji uvid u geometrijsku ili topološku strukturu mnogostrukosti i općenitijih topoloških prostora, ali i obratno, geometrija služi i algebri. Vratimo se, primjerice uzlovima. Nije sasvim lako strogo dokazati da se spomenuti trolisni uzao ne može neprekidno "razvuzlati" tako da postane nezauzlan, tj. kružnica (krivulja koja se može neprekidno deformirati u ravninu). Međutim, svakome se uzlu može pridružiti izvjestan polinom sa svojstvom da se ne mijenja dok god uzao neprekidno (bez trganja i lijepljenja) razvlačimo po prostoru. Polinom trolista je različit od polinoma kružnice, pa tek tako možemo zaključiti da se trolist ne može raspetljati ("razvuzlati") u 3-prostoru (ali može u 4-prostoru).

U algebarskoj topologiji su važne tzv. klase homologije neke čvrste dimenzije, recimo k. (Možemo ih u nekom smislu zamišljati kao podmnogostrukosti dimenzije k.) Sve te klase homologije se na izvjestan način mogu ustrojiti u algebarski objekt koji se zove grupa, a pridruženi objekt topološkom prostoru X zove se *k-ta grupa homologije od X*. Duboke veze topologije i algebre te grane matematike koja se zove algebarska geometrija (u kojoj su objekti rješenja algebarskih jednadžbi) Milnor je pronašao u razvoju algebarske K-teorije.

Kad već spominjemo algebru, kažimo da je upravo na temelju jednog lijepog Milnorovog (i Wolfovog) rezultata iz 1968., dobitnik Abelove nagrade za 2009. godinu Mikhael Gromov dokazao 1981. rezultat poznat pod nazivom teorem o polinomijalnom rastu za grupe.

Sfera se ne može počešljati

Milnor je našao i nove prekrasne dokaze poznatih činjenica i teorema. Jedan takav je u žargonu poznat pod nazivom "sfera se ne može počešljati" ili u engleskom matematičkom žargonu "hairy ball theorem". Naime, je li moguće u svakoj točki 2-sfere u njenoj tangencijalnoj ravnini odabrati koordinatni sustav s ishodištem u toj točki i pozitivne smjerove x-osi i y-osi tako da se te osi i smjerovi neprekidno mijenjaju kad se točka neprekidno giba po sferi? Odgovor je bio negativan i bio je poznat laki dokaz rabeći algebarsku topologiju (Brouwer, 1912). Ali, Milnor je 1978. našao lijepi dokaz rabeći samo "calculus". Ovdje valja istaći da je Milnor još 1958. dokazao da su jedine paralelizabilne sfere dimenzija 1, 3 i 7. Dvodimenzionalna sfera, dakle, nije paralelizabilna.

Poincaréova slutnja

Milnor je vjerojatno među prvima od svjetskih eksperata koji je shvatio da je ruski matematičar Grigorij Perelman 2005. dao korektan dokaz čuvene Poincaréove slutnje stare više od 100 godina. Ta slutnja kaže da je jednostavno povezana kompaktna

3-mnogostrukost homeomorfna 3-sferi [5]. Inače, spomenimo ovdje da je Perelman za ta postignuća odbio primiti Fieldsovu medalju kao ni nagradu Clayove fundacije koja daje milijun dolara za rješenje svakog od sedam milenijskih problema koliko ih je preostalo na prijelazu iz 20-og u 21. stoljeće. O toj zanimljivoj i intrigantnoj temi vidi knjigu novinarke New York Timesa Mashe Gessen, *Perfect rigour*, Icon Books, New York, 2011. Već spomenuti Freedman je konstruirao i 4-mnogostrukost (bez ruba) i dokazao da njezina triangulabilnost povlači negativan odgovor na Poincaréovu slutnju. No, iz Perelmanova rezultata slijedi da se ni ova 4-mnogostrukost ne može triangulirati.

Dinamički sustavi

Milnor se posljednjih 20-ak godina bavio i dinamičkim sustavima i tu su njegovi doprinosi izuzetni. Tipično pitanje tu je naizgled vrlo jednostavno. Zadamo neku funkciju, recimo kvadratni polinom $f(x) = x^2 - 1$ i uzmemo jednu točku, x_0 (kompleksni broj) i računamo rekurzivno vrijednosti $f(x_0)$, $f(f(x_0))$, $f(f(f(x_0)))$, itd. Pitanje je kako se ponaša taj niz (kompleksnih) brojeva, teži li on nekoj čvrstoj točki ili titra između dviju točaka ili u nekom području kompleksne ravnine, ostaje li unutar nekog omeđenog područja ili postaje neomeđen itd. Takva su pitanja u vezi s matematičkom teorijom kaosa i sa slikama poznatim kao *fraktali* i *Mandelbrotovi skupovi* koji su već poznati i izvan matematike. S dinamičkim je sustavima u više kompleksnih varijabli puno teže raditi nego s jednom varijablom, ali se i tu Milnor pokazao kao majstor i ključna osoba u razvoju tog područja o kojem se unatoč svemu i dandanas malo zna.

Zaključak

Na pitanje smatra li sebe rješavačem problema ili pak tvorcem teorija, Milnor je rekao da sebe smatra rješavačem ("problem solver") i da nikad nije prvotno imao na umu stvarati velike teorije, nego je pokušavao napraviti male korake i postavljati zanimljiva pitanja ne znajući odmah kuda će ga to odvesti.

U svakom slučaju, John Milnor je jedan od najvećih matematičara u posljednjih 60-ak godina i to ne samo kao znanstvenik nego i kao i izvanredni komunikator dubokih matematičkih ideja. Stoga će se zasigurno svi matematičari složiti da je ovaj istinski znanstveni velikan svojim radom i utjecajem na brojne generacije matematičara nedvojbeno zaslužio Abelovu nagradu, pa mu i mi na tome iskreno čestitamo. I na kraju, mali osobni "štih". Autor ovog članka je magistrirao kod akademika Sibe Mardešića koji mu je dao svoje zapise Milnorovih predavanja na Princetonu iz 1958./ 59. o diferencijalnoj topologiji i karakterističnim klasama. Doktorirao je kod bivšeg Milnorovog doktoranda P. J. Kahna na Cornell University. Stoga mogu reći da mi je Milnor znanstveni "djed".

Literatura

[1] D. Veljan, *Abelova nagrada za matematiku – ekvivalent Nobelove nagrade*, Matematičko-fizički list, LIV, 2, 2003./ 2004., 91–93.

[2] D. Veljan, *Abelova nagrada za matematiku 2004. godine, M. F. Atiyah i I. M. Singer*, Matematičko-fizički list, LV, 2, 2004./ 2005., 85–90.

[3] Sanja Marušić, *Peter D. Lax, dobitnik Abelove nagrade za 2005. g.*, Matematičko-fizički list, LVI, 1, 2005./ 2006., 28–29.

[4] Juraj Šiftar, *Abelova nagrada 2008. g. – John G. Thompson i Jacques Tits*, Matematičko-fizički list, LIX, 1, 2008./ 2009., 18–22.

[5] Šime Ungar, *Slutnja koja je postala teorem*, Matematičko-fizički list, LXI, 1, 2010./ 2011., 20–23.