# Machinova formula i izračunavanje broja $\pi$

*Jens Carstensen, Alija Muminagić*

Godine 1706. matematičar *John Machin* izračunao je broj $\pi$ na 100 decimala koristeći jednu, malo neobičnu formulu

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}. \tag{1}$$

Dat ćemo tri dokaza ove formule i pokazati kako se njenom primjenom izračunava broj $\pi$.

*Dokaz 1 (trigonometrijski).* Stavimo $x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}$, tj. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$; $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$, tj. $\operatorname{tg} y = \frac{1}{239}$. Sada imamo

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}^3 x}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x} = \frac{120}{119}.$$

Adicijska formula za tangens daje

$$\operatorname{tg}(4x - y) = \frac{\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} y} = 1.$$

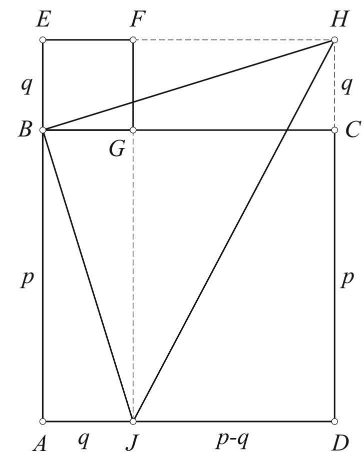
Dakle, $4x - y = \frac{\pi}{4}$ tj. $4 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$. $\square$

*Dokaz 2 (planimetrijski).* Promatrajmo dva kvadrata $ABCD$ i $BEFG$ s duljinama stranica $p$ i $q$, kao na slici 1, tako da je trokut $JBH$ jednakokračan i pravokutan, pri čemu je $\sphericalangle BHJ = 45°$. Sa slike vidimo da je $\operatorname{tg} \sphericalangle BHC = \frac{p}{q}$ i $\operatorname{tg} \sphericalangle JHD = \frac{p-q}{p+q}$ ili

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \sphericalangle BHJ = \sphericalangle BHC - \sphericalangle JHD \\ &= \operatorname{arc\,tg} \frac{p}{q} - \operatorname{arc\,tg} \frac{p-q}{p+q}. \end{aligned}$$

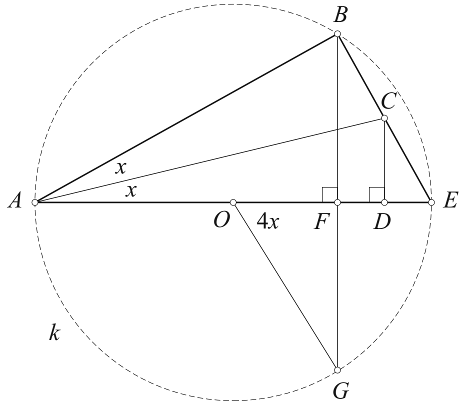
Stavljajući $p = 120$ i $q = 119$ dobivamo $\operatorname{arc\,tg} \frac{120}{119} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

Da bismo dokazali formulu (1) moramo dokazati da je $4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} = \operatorname{arc\,tg} \frac{120}{119}$.




*Slika 1.*

Promotrimo sada na slici 2 kružnicu $k$ sa središtem u točki $O$ i dijametrom $\overline{AE}$. Neka je $B$ točka na kružnici $k$ takva da je $\sphericalangle BAE = 2x$. Simetrala kuta $\sphericalangle BAE$ siječe dužinu $\overline{BE}$ u točki $C$. Projekcije točaka $B$ i $C$ na dijametar $\overline{AE}$ označimo s $F$ i $D$ i neka produžetak dužine $\overline{BF}$, preko točke $F$ siječe kružnicu $k$ u točki $G$. Tada je $\sphericalangle EOG = 4x$ ( $\sphericalangle EOG = 2\sphericalangle BAE$, kao središnji i obodni kut).




*Slika 2.*

U trokutu $ABC$ je $\operatorname{tg} x = \dfrac{|BC|}{|AB|}$, a u trokutu $OFG$ je $\operatorname{tg} 4x = \dfrac{|FG|}{|OF|}$, pa je $x = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{|BC|}{|AB|}$ i $4x = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{|FG|}{|OF|}$. Dobivamo

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{|FG|}{|OF|} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{|BC|}{|AB|}. \qquad (2)$$

Neka je sada $|FG| = |BF| = 120$ i $|OF| = 119$. Iz pravokutnog trokuta $OFG$, primjenom Pitagorinog poučka, imamo

$$|OG| = \sqrt{|FG|^2 + |OF|^2} = 169,$$

pa je $|AE| = 2 \cdot 169 = 338$. Osim toga je $|EF| = |OE| - |OF| = |OG| - |OF| = 169 - 119 = 50$ i $|BE| = \sqrt{|BF|^2 + |EF|^2} = \sqrt{120^2 + 50^2} = 130$.

Iz sukladnih trokuta $ABC$ i $ADC$ slijedi $|AD| = |BA| = \sqrt{|AE|^2 - |BE|^2} = \sqrt{338^2 - 130^2} = 312$ i konačno

$$|FD| = |AD| - |AO| - |OF| = 312 - 169 - 119 = 24.$$

Kako su trokuti $BFE$ i $CDE$ slični, imamo

$$\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{|DE|}{|FE|} \iff \frac{|BE| - |BC|}{|BE|} = \frac{|FE| - |FD|}{|FE|} \iff \frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|FD|}{|FE|},$$

odakle je $|BC| = \dfrac{|BE| \cdot |FD|}{|FE|} = \dfrac{130 \cdot 24}{50} = \dfrac{312}{5}$, pa je zbog $|BA| = 312$, $\dfrac{|BC|}{|BA|} = \dfrac{1}{5}$ i iz (2) konačno dobivamo $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{120}{119} = 4 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{5}$. $\square$

*Dokaz 3 (pomoću kompleksnih brojeva).* Promatrajmo kompleksne brojeve $z = 5 - i$ i $w = 1 + i$. Za njih vrijedi: $\arg z = -\operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{5}$ i $\arg w = \dfrac{\pi}{4}$.

Računamo produkt:

$$z^4 w = (5 - i)^4 (1 + i) = 4(239 - i),$$

odakle dobivamo

$$\arg(z^4 w) = 4 \arg z + \arg w = \arg(239 - i),$$

tj.

$$-4 \arg\operatorname{tg} \frac{1}{5} + \frac{\pi}{4} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239},$$

ili u obliku

$$4 \arg\operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

$\square$

Sada ćemo još pokazati Machinov postupak određivanja broja $\pi$.

Za kompleksan broj $x$, $|x| < 1$, imamo

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Kada $n$ teži u beskonačnost dobivamo

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x}.$$

Supstitucija $x = -t^2$ daje

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Množenjem ovog izraza s $dt$ i integriranjem u granicama od 0 do $x$, dobivamo

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arc\,tg} x = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \ldots \Big|_0^x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots.$$

Iz formule (1) imamo:

$$\begin{aligned}
\pi &= 16 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} \\
&= 16 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \ldots \right) - 4 \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \ldots \right) \\
&= \frac{16}{5} \left( 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^4 - \ldots \right) - \frac{4}{239} \left( 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^4 - \ldots \right).
\end{aligned}$$

Uzmemo li prvih 6 članova iz prvog i zatim iz drugog reda, dobivamo $\pi \approx 3.14159266$. Prvih 7 decimala je točno.

## Literatura


[1] D. MILES, *A Geometrical Proof of Machin's Formula*, Mathematics in School, September 2010.

[2] J. CARSTENSEN, *Machins Formel*, Matematik Magazinet 55, 2010.