ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2012. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/249.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

A) Zadaci iz matematike

3307. Neka su x, y pozitivni cijeli brojevi, takvi da je $3x+5y=2010$ i da xy poprima maksimalnu vrijednost. Odredi koliko je $x-y$.

3308. Nađi sva rješenja (x,y) sistema jednadžbi

$$x^4+2x^3-y=-\frac{1}{4}+\sqrt{3},$$
$$y^4+2y^3-x=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}.$$

3309. Ako je

$$y^2+yz+z^2=a^2,$$
$$z^2+zx+x^2=b^2,$$
$$x^2+xy+y^2=c^2,$$
$$yz+zx+xy=0,$$

pokaži da vrijedi

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=0.$$

3310. Koliko pozitivnih cijelih brojeva x zadovoljava nejednadžbu

$$\left|2+\log_x\frac{1}{2}\right|<\frac{7}{4}.$$

3311. Neka su p i q kompleksni brojevi, $q\neq 0$. Ako su rješenja kvadratne jednadžbe $x^2+px+q=0$ istog modula, dokaži da je $\frac{p}{q}$ realan broj.

3312. U pravokutniku $ABCD$ točka E je na dijagonali $\overline{BD}$ i $\sphericalangle DAE=15^\circ$. Izračunaj kut $\sphericalangle EAC$ ako je duljina visine $\overline{EF}$ trokuta ABE jednaka polovini duljine stranice $\overline{AB}$.

3313. U konveksnom četverokutu $ABCD$ je $\sphericalangle BAC=\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ACD$. Pravci AD i BC sijeku se u E, a AB i DC u F. Odredi omjer

$$\frac{|AB|\cdot|DE|}{|BC|\cdot|CE|}.$$

3314. Točke D i E su na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC tako da je D bliže vrhu B i E bliže vrhu C, te $\sphericalangle CAE=\sphericalangle DAB$. Dokaži da je

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2}=\frac{|BD|\cdot|BE|}{|CE|\cdot|CD|}.$$

3315. Dani su pozitivni realni brojevi a, b, $a<b$. Ako se slučajno na dužini duljine b izaberu dvije točke, kolika je vjerojatnost da njihova udaljenst bude barem a.

3316. Dva kvadrata stranica duljine 0.9 nalaze se u krugu polumjera 1. Dokaži da se oni sijeku.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 338. Automobil je za 15 sekundi prešao put od 300 metara. Pri tome je prvih deset sekundi jednoliko ubrzavao iz mirovanja, a ostalo vrijeme se gibao brzinom postignutom tijekom ubrzavanja. Kolika je bila ta brzina?

OŠ – 339. Roveri Spirit i Opportunity su 7 godina istraživali površinu Marsa i slali podatke na Zemlju. Zemlja i Mars nisu uvijek jednako udaljeni. Najbliže su kad leže na istom pravcu sa Suncem i nalaze se na istoj strani Sunca. Taj položaj zovemo opozicija. Kada se nalaze na suprotnim stranama od Sunca kažemo da su u položaju konjunkcije i tada su najudaljeniji. Koliko dugo putuje radio signal koji je poslao jedan od rovera do Zemlje kad su Zemlja i Mars u opoziciji, a koliko kad su u konjunkciji? Brzina radio valova je 300 000 km/s. Zemlja je od Sunca udaljena prosječno 150 milijuna kilometara, a Mars 228 milijuna kilometara.

OŠ – 340. Dvije su žice napravljene od istog materijala. Prva je trostruko dulja od druge, a druga je dvostruko deblja. Svaka žica povezuje krajeve dva jednaka izvora struje. Koliki je omjer jakosti struja kroz žice?

OŠ – 341. Drvena kocka brida 10 centimetara je podijeljena na dva jednaka dijela.

Unutar njih su napravljene dvije polukružne rupe koje točno odgovaraju veličini željezne kugle promjera 4 centimetra koja je stavljena u njih. Polovice drvene kocke su nakon toga zalijepljene. Kolike su masa i prosječna gustoća kocke nakon toga? Gustoća drva je 700 kg/ m^3, a željeza 7900 kg/ m^3.

1497. Horizontalni domet kosog hica uz početnu brzinu v_0 i kut izbačaja α iznosi 8000 m. Ako početnu brzinu hica povećamo za 8 m/ s, domet će biti veći za 405 metara. Odredi kut izbačaja. Zanemari otpor zraka.

1498. Radioaktivni uzorak sadrži dva izotopa, oba početne aktivnosti po 50 000 Bq (Bequerel = raspad u sekundi). Rezultati mjerenja ukupne aktivnosti uzorka nakon T minuta prikazani su tablicom:

T	A (Bq)
0	100 000
13 min	80 055
26 min	64 448

Odredi vrijeme poluraspada oba izotopa. Kolika će biti aktivnost 2 sata nakon početne?

1499. Tijelo se nalazi na kosini kojoj možemo mijenjati kut nagiba. Pri kutu 30° tijelo ubrzava niz kosinu, a pri kutu 20° usporava jednakim iznosom. Odredi koeficijent trenja i iznos ubrzanja.

1500. Zidni sat s njihalom ima bakreno njihalo učvršćeno na bakreni štap. Sat je ugođen tako da prati točno vrijeme na temperaturi 20 °C. Koliko će sat dnevno kasniti na 25 °C? Koeficijent linearnog rastezanja bakra je $1.7 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.

1501. Od jantara indeksa loma 1.550 izbrušena je konvergentna leća žarišne daljine 9 cm (u zraku). Kolika je jačina i žarišna daljina iste leće uronjene u vodu indeksa loma 1.333? Indeks loma zraka je 1.003.

1502. Koliko naboja je potrebno da se elektrolizom izluči 1 kg aluminija? Koliko bi elementarnog magnezija dobili elektrolizom uz istu količinu naboja?

1503. Odredi ubrzanje sile teže na površini nebeskog tijela oblika kugle radijusa R i jednolike gustoće ρ. Provjeri izraz na primjeru Zemlje, uz srednju gustoću 5520 kg/ m^3 i radijus 6371 km.

C) Rješenja iz matematike

3287. *Nađi sve cijele brojeve x, y koji zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + 2012 = y^2$?*

Rješenje. Traženi izraz možemo napisati u obliku:

$$(y - x)(y + x) = 2012$$
$$2012 = 2 \cdot 2 \cdot 503$$

Brojevi x i y su iste parnosti pa zbroj i razlika mora biti parna, a to se događa samo kad su faktori ± 2 i ± 1006.

Kad x i y ne bi bili iste parnosti tada bi zbroj i razlika bila neparna, a takvi faktori u ovom rastavu ne postoje!

Zato promatramo 2 slučaja:

a) $(y - x) = \pm 2$, $(y + x) = \pm 1006$, čija su rješenja $y = \pm 504$, $x = \pm 502$;

b) $(y - x) = \pm 1006$, $(y + x) = \pm 2$, čija su rješenja $y = \pm 504$, $x = \mp 502$

Dakle tražena jednadžba ima 4 rješenja i to su uređeni parovi

$$(x, y) \in \{(502, 504), (-502, -504), (-502, 504), (502, -504)\}.$$

Ivan Žagar (4),
SŠ Vladimir Nazor, Čabar

3288. *Dani su realni brojevi x, y takvi da je*

$$(x + y)^4 + (x - y)^4 = 4112,$$
$$x^2 - y^2 = 16.$$

Odredi vrijednost od $x^2 + y^2$.

Prvo rješenje. Uvedimo nove nepoznanice u i v takve da je

$$x + y = u, \qquad x - y = v.$$

Sada dane jednadžbe zapišemo u obliku

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = uv = 16,$$
$$(x + y)^4 + (x - y)^4 = u^4 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - 2(uv)^2 = 4112,$$
$$u^2 + v^2 = 68,$$

tj.

$$(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)=68$$

i iz toga dobivamo

$$x^2+y^2=34.$$

Matea Prenc (3), Gimnazija Pula, Pula

Drugo rješenje. Raspisivanjem izraza

$$(x+y)^4+(x-y)^4=4112$$

dobivamo

$$x^4-6x^2y^2+y^4=2056,$$

$$x^4+y^4=2056-6x^2y^2. \qquad (1)$$

Kvadriranjem izraza

$$x^2-y^2=16$$

dobivamo:

$$x^4+y^4=256+2x^2y^2. \qquad (2)$$

Tada je

$$2056-6x^2y^2=256+2x^2y^2,$$

tj.

$$x^2y^2=225.$$

Uvrštavajući ovo u (2) dobivamo:

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^2&=256+4x^2y^2,\\(x^2+y^2)^2&=1156,\\x^2+y^2&=34.\end{aligned}$$

Dakle traženi izraz je jednak 34.

Ivan Žagar (4), Čabar

3289. *Neka je za* $n=1,2,\ldots$

$$a_n=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}.$$

Dokaži da je $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{20}}$ *pozitivan cijeli broj.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}&=\frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}}\\&=\left(\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}-\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\right)\cdot\frac{n}{4}\\&=\frac{1}{4}\left(\sqrt{n^2+(n+1)^2}-\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right)\end{aligned}$$

Definirajmo niz

$$b_n=\frac{1}{4}\sqrt{n^2+(n+1)^2}.$$

Tada je

$$\frac{1}{4}\left(\sqrt{n^2+(n+1)^2}-\sqrt{(n-1)^2+n^2}\right)=b_n-b_{n-1}.$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{20}}&=b_{20}-b_0\\&=\frac{1}{4}(\sqrt{20^2+21^2}-\sqrt{0+1^2})\\&=\frac{1}{4}(\sqrt{841}-1)=7.\end{aligned}$$

Tvrtko Dorešić (3), XZ. gimnazija, Zagreb

3290. *Pokaži da su sve realne nultočke polinoma*

$$P(x)=x^7-14x+133$$

negativne.

Prvo rješenje. Napomena. U formulaciji zadatka potkrala se greška. Umjesto *nenegativne* treba biti *negativne*.

$$\begin{aligned}P(x)&=x^7-14x+133,\\P'(x)&=7(x^6-2),\\P''(x)&=42x^5.\end{aligned}$$

Polinom je neprekidna funkcija za $\forall x\in\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}x^6-2&=0,\\(x^3)^2-(\sqrt{2})^2&=0,\\(x^3-\sqrt{2})(x^3+\sqrt{2})&=0,\\x_1=\sqrt[6]{2},\qquad x_2&=-\sqrt[6]{2}.\end{aligned}$$

To su realne nultočke prve derivacije.

$P''(\sqrt[6]{2})>0$, pa za $x=\sqrt[6]{2}$ $P(x)$ postiže minimum.

$P''(-\sqrt[6]{2}) < 0$, pa za $x = -\sqrt[6]{2}$ $P(x)$ postiže maksimum.

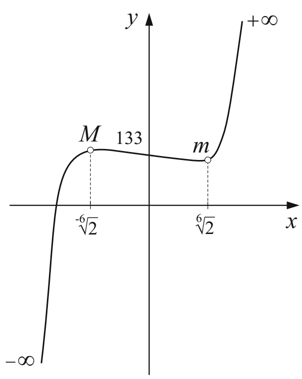
$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty.$$

$$P(0) = 133,$$

$$\begin{aligned} M &= (-\sqrt[6]{2}) - 14(-\sqrt[6]{2}) + 133 \\ &= 133 + 12\sqrt[6]{2} > 0, \\ m &= (\sqrt[6]{2})^7 - 14\sqrt[6]{2} + 133 \\ &= 133 - 12\sqrt[6]{2} > 0 \end{aligned}$$

i $M > m$.

Kvalitativni graf funkcije $P(x)$ je



Dakle, postoji samo jedna realna nultočka polinoma $P(x) = x^7 - 14x + 133$ i ona je negativna.

Tvrtko Dorešić (3), Zagreb

Drugo rješenje. Kako je stupanj polinoma neparan, on ima realnu nultočku r. Ako je $r > 0$ iz A-G nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} P(r) &= r^7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2^7 - 7 \cdot 2 \cdot r \\ &\geqslant 7\sqrt[7]{r^7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2^7} - 7 \cdot 2r \geqslant 0. \end{aligned}$$

Kako je $1 \neq 2$ nejednakost je stroga. Dakle, $r < 0$, što je i trebalo dokazati.

Ur.

3291. *Izračunaj vrijednost izraza*

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$$

bez korištenja računala.

Rješenje.

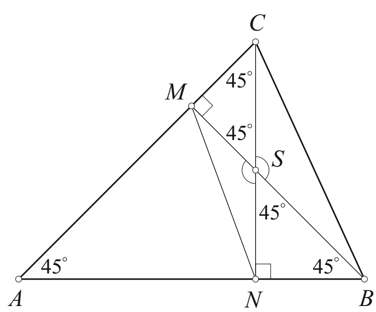
$$\begin{aligned} &\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} \\ &= \log_2 24 \log_2 96 - \log_2 192 \log_2 12 \\ &= \log_2(2^3 \cdot 3) \cdot \log_2(2^5 \cdot 3) \\ &\quad - \log_2(2^6 \cdot 3) \cdot \log_2(2^2 \cdot 3) \\ &= (\log_2 2^3 + \log_2 3)(\log_2 2^5 + \log_2 3) \\ &\quad - (\log_2 2^6 + \log_2 3)(\log_2 2^2 + \log_2 3) \\ &= (3 + \log_2 3)(5 + \log_2 3) \\ &\quad - (6 + \log_2 3)(2 + \log_2 3) \\ &= 15 + 3\log_2 3 + 5\log_2 3 + (\log_2 3)^2 - 12 \\ &\quad - 6\log_2 3 - 2\log_2 3 - (\log_2 3)^2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Danijela Babić (3),
Srednja škola Zlatar, Zlatar

3292. *Kut A trokuta ABC jednak je polovici pravog kuta. Točke M, N su nožišta okomica iz B i C na suprotne stranice. Dokaži da je* $|BC|^2 = 2|MN|^2$.

Prvo rješenje. Kako je trokut ANC pravokutan i $\sphericalangle BAC = 45^\circ$, onda je $\sphericalangle NCA = 45^\circ$. No, i trokut SMC je pravokutan pa je $\sphericalangle MSC = 45^\circ$. Kutovi $\sphericalangle MSC$ i $\sphericalangle NSB$ su vršni kutovi, stoga su jednaki, a iz pravokutnog trokuta NSB jednak im je i $\sphericalangle NBS$, tj.

$$\sphericalangle MSC = \sphericalangle NSB = \sphericalangle NBS = 45^\circ.$$



Sada su trokuti NSB i MSC slični (K-K poučak), vrijedi

$$|BS| : |NS| = |SC| : |MS| = \sqrt{2} \qquad (1)$$

(jer je $|BS| = |NS|\sqrt{2}$ i $|SC| = |MS|\sqrt{2}$).

Kutovi $\sphericalangle MSN$ i $\sphericalangle CSB$ su jednaki (vršni kutovi), a pripadaju im i omjeri stranica, pa su $\triangle MSN$ i $\triangle CBS$ slični. Tada je

$$\frac{|BC|}{|MN|} = \frac{|BS|}{|NS|} = \sqrt{2}$$

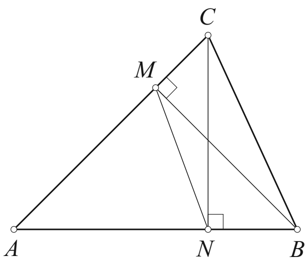
i kvadriranjem dobivamo

$$|BC|^2 = 2|MN|^2.$$

Matea Prenc (3), Pula

Drugo rješenje.

$$|AM| = |BM|, \qquad |AN| = |CN|.$$



Četverokut $MNBC$ je tetivni (jer je $\sphericalangle CMB = 90^\circ = \sphericalangle CNB$) pa je $\sphericalangle NMB = \sphericalangle NCB$. Iz teorema o sinusima imamo

$$\frac{|MN|}{\sin 45^\circ} = \frac{|BN|}{\sin \sphericalangle NMB} = \frac{|BN|}{\sin \sphericalangle NCB} = \frac{|BC|}{\sin 90^\circ}$$

$$|MN|\sqrt{2} = |BC|, \qquad 2|MN|^2 = |BC|^2$$

Hamza Merzić (4),
Prva Bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH

Treće rješenje. Vrijedi $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACN = 45^\circ$ pa je

$$|AM| = |AB| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$|AN| = |AC| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Po kosinusovom poučku je

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cos 45^\circ$$
$$= 2|AM|^2 + 2|AN|^2 - 2|AM|\sqrt{2} \cdot |AN|\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= 2(|AM|^2 + |AN|^2 - 2|AM| \cdot |AN| \cdot \cos \sphericalangle MAN)$$
$$= 2|MN|^2.$$

Ur.

3293. *Ako su a, b, c, d duljine stranica tetivnog četverokuta i x, y duljine njegovih dijagonala, dokaži jednakost*

$$xy = ac + bd.$$

Prvo rješenje.

$$\triangle ABC \implies \frac{x}{\sin(\alpha+\delta)} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

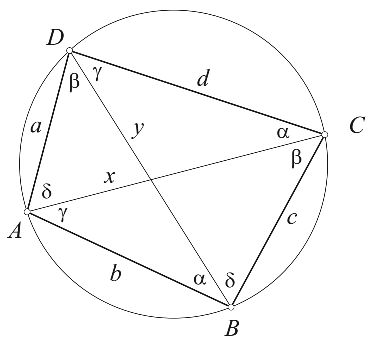
$$\triangle BCD \implies \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{d}{\sin\delta} = \frac{y}{\sin(\alpha+\beta},$$

$$\triangle ACD \implies \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{d}{\sin\delta},$$

$$\triangle ABD \implies \frac{y}{\sin(\gamma+\delta)} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha},$$

$$bd = xy\frac{\sin\beta\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\delta)},$$

$$ac = xy\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\beta)}.$$



Vrijedi

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin(\pi - (\alpha+\delta)) = \sin(\alpha+\delta).$$

Imamo

$$ac + bd = xy \cdot \frac{1}{\sin(\alpha+\delta)\sin(\alpha+\beta)} \cdot [\sin\beta\sin\delta + \sin\alpha\sin\gamma].$$

Tada je

$$\sin(\alpha+\delta)\sin(\alpha+\beta)$$
$$= (\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta) \cdot (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$
$$= \sin^2\alpha\cos\delta\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\delta + \sin\alpha\sin\delta\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\sin\delta\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha(\cos\beta\sin\delta + \sin\beta\cos\delta)$$
$$+ \sin^2\alpha(\cos\delta\cos\beta - \sin\delta\sin\beta)$$
$$+ \sin\delta\sin\beta$$
$$= \sin\alpha[\cos\alpha\sin(\beta+\delta) + \sin\alpha\cos(\beta+\delta)]$$
$$+ \sin\beta\sin\delta$$
$$= \sin\alpha\sin(\beta+\delta+\alpha) + \sin\beta\sin\delta$$

(s obzirom da je $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180^\circ$ imamo $\beta+\gamma+\delta = 180^\circ - \gamma$)

$$= \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\delta.$$

Dakle,

$$ac + bd = xy \cdot \frac{\sin\beta\sin\delta + \sin\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\delta},$$

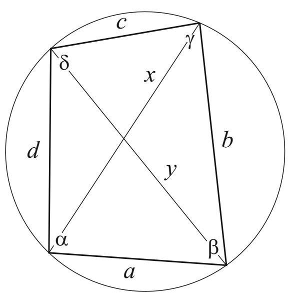
tj.

$$ac + bd = xy.$$

Tvrtko Dorešić (3), Zagreb

Drugo rješenje. Kako je četverokut tetivni imamo

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$



Iz poučka o kosinusu dobivamo

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta, \qquad (1)$$
$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta$$
$$= c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^\circ - \beta)$$
$$= c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) je

$$a^2 + b^2 - 2bc\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta$$

i izrazimo $\cos\beta$:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = (2cd + 2ab)\cos\beta,$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(cd + ab)}.$$

Uvrštavanjem npr. u (1) imamo:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(cd + ab)}$$
$$= \frac{ad(ac + bd) + bc(bd + ac)}{cd + ab}$$
$$= \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{cd + ab}. \qquad (*)$$

Primijenimo li poučak o kosinusu kako bi dobili izraz za y:

$$y^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha \qquad (3)$$
$$y^2 = c^2 + b^2 + 2bc\cos\alpha.$$

Postupak je isti kao i za x:

$$a^2 + d^2 - c^2 - b^2 = (2ad + 2bc)\cos\alpha,$$
$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - c^2 - b^2}{2(ad + bc)}.$$

Iz (3) je:

$$y^2 = a^2 + d^2 - \frac{a^3d + ad^3 - ac^2d - ab^2d}{ad + bc}$$
$$= \frac{(bd + ac)(cd + ab)}{ad + bc}. \qquad (**)$$

Pomnožimo li $(*)$ i $(**)$ dobivamo

$$x^2y^2 = (ac + bd)^2$$

tj.

$$xy = ac + bd.$$

Lucija Šikić (3),
III. gimnazija, Osijek

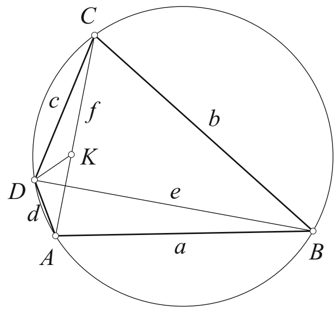
Treće rješenje. Prema Talesovom teoremu imamo:

$$\measuredangle CAB = \measuredangle CDB,$$
$$\measuredangle BCA = \measuredangle BDA,$$
$$\measuredangle DBA = \measuredangle DCA.$$

Neka je na dijagonali f dana točka K, takva da za nju vrijedi

$$\measuredangle BDA = \measuredangle CDK. \qquad (1)$$

Zbog $\measuredangle CDK + \measuredangle KDA = \measuredangle CDA = \measuredangle CDB + \measuredangle BDA$ i uvjeta pod (1) imamo $\measuredangle CDB = \measuredangle KDA$.



Zbog međusobno jednakih kutova, slični su sljedeći trokuti:

$$\triangle KDC \sim \triangle ADB, \qquad \triangle KDA \sim \triangle CDB.$$

Sada vrijedi omjer:

$$\frac{|CK|}{|AB|}=\frac{|DC|}{|DB|}, \qquad \frac{|DA|}{|DB|}=\frac{|AK|}{|CB|}$$

tj.

$$|CK|\cdot|DB|=|AB|\cdot|DC|,$$
$$|DA|\cdot|CB|=|DB|\cdot|AK|.$$

Zbrajanjem obiju jednakosti dobivamo:

$$|CK|\cdot|DB|+|DB|\cdot|AK|=|AB|\cdot|DC|+|DA|\cdot|CB|,$$
$$|DB|(|CK|+|AK|)=|AB|\cdot|DC|+|DA|\cdot|CB|.$$

Zbog:

$$|CK|+|AK|=|AC|=f, \qquad |DB|=e$$

dobivamo

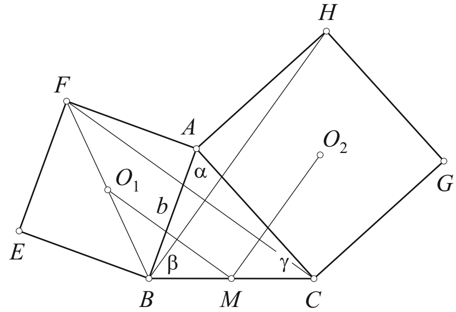
$$e\cdot f=a\cdot c+b\cdot d.$$

Ivan Žagar (4), Čabar

3294. *Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ trokuta ABC s vanjske strane konstruirani su kvadrati $ABEF$, $ACGH$ sa središtima O_1, O_2, tim redom. Ako je M polovište stranice $\overline{BC}$, dokaži da je trokut O_1MO_2 jednakokračan pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu M.*

Prvo rješenje. Označimo kutove trokuta $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle ACB=\gamma$. Trokuti ACF i ABH su sukladni, jer imaju po dvije jednake stranice, $|AB|=|AF|$ i $|AC|=|AH|$ i kut između njih $\alpha+90^\circ$. Stoga je $|BH|=|FC|$, a jer su $\overline{MO_1}$ i $\overline{MO_2}$ srednjice trokuta BCF i CBH, one su jednake duljine:

$$|MO_1|=\frac{1}{2}|CF|=\frac{1}{2}|BH|=|MO_2|.$$



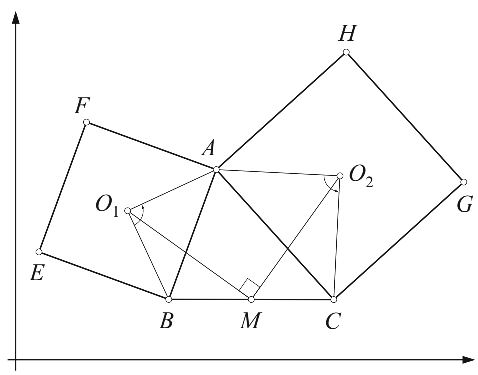
Zato je trokut O_1MO_2 jednakokračan. Nadalje je $\sphericalangle ABH=\sphericalangle AFC=90^\circ-\alpha-\sphericalangle AHB=90^\circ-\alpha-\sphericalangle ACF$. Jer je $FC\|MO_1$ i $BH\|MO_2$ (srednjice trokuta) imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle O_1MO_2&=180^\circ-\sphericalangle BCF-\sphericalangle CBH\\&=180^\circ-(\gamma-\sphericalangle ACF)-(\beta-\sphericalangle ABH)\\&=180^\circ-\beta-\gamma+\sphericalangle ACF+\sphericalangle AFC\\&=180^\circ-\alpha-\beta-\gamma+90^\circ=90^\circ,\end{aligned}$$

pa je $\triangle O_1MO_2$ jednakokračan pravokutni trokut.

Hamza Merzić (4), Sarajevo, BiH

Drugo rješenje. Neka su a, b, c kompleksni brojevi koji pripadaju vrhovima A, B, C, tim redom.



Tada imamo:

$$\frac{a-z_{O_1}}{b-z_{O_1}}=\frac{c-z_{O_2}}{a-z_{O_2}}=i$$

tj.

$$z_{O_1} = \frac{b+a+(a-b)i}{2},$$
$$z_{O_2} = \frac{a+c+(c-a)i}{2}.$$

Koordinate polovišta M stranice $\overline{BC}$ su $z_M = \frac{b+c}{2}$, pa je

$$\frac{z_{O_1}-z_M}{z_{O_2}-z_M} = \frac{a-c+(a-b)i}{a-b+(c-a)i} = i.$$

Slijedi $MO_1 \perp MO_2$ i $|MO_1| = |MO_2|$.

Ur.

3295. *Neka su x_1, x_2, x_3, ... x_{n+1}, ... prirodni brojevi takvi da je*

$$1 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n+1} \leq 2n,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dokaži da se svaki pozitivan cijeli broj k može prikazati u obliku $k = x_i - x_j$ za neke $i > j$.

Rješenje. Među bojevima x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_{n+1}$ postoje sigurno dva koja daju isti ostatak pri dijeljenju brojem n. Brojeve podijelimo u dva skupa tako da u prvi ulaze brojevi od $[1; n]$, a u drugi $[n+1; 2n]$. Dva broja koja imaju isti ostatak pri dijeljenju s n moraju se nalaziti u različitim skupovima (ako bi se nalazili u istom skupu, onda bi oni bili jednaki, što je nemoguće zbog uređenosti niza), pa je njihova razlika jednaka n. Dakle za bilo koji odabir brojeva $1 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n+1} \leqslant 2n$ postoje sigurno dva čija razlika je n, pa je $x_i - x_j = k = n$; $i > j$, a pošto je n bilo koji pozivan cijeli broj, k uvijek možemo prikazati u traženom obliku.

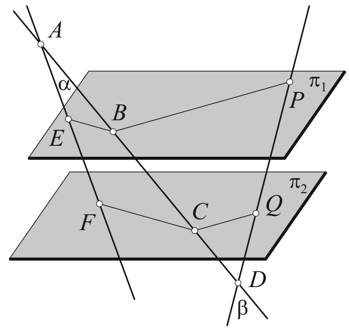
Hamza Merzić (4), Sarajevo, BiH

3296. *Pravac AD siječe dvije paralelne ravnine π_1, π_2 u točkama B, C, tim redom, tako da je $|AB| : |BC| : |CD| = p : q : r$. Iz A i D povučeni su pravci koji sijeku π_1, π_2 u E, F i P, Q, tim redom. Pokaži da je*

$$(rp+pq)|CF| \cdot |CQ| = (rp+rq)|BE| \cdot |BP|.$$

Rješenje. Trokuti AEB i AFC su slični, jer imaju isti kut A i paralelne stranice $BE \| CF$ (tj. imaju sve kutove jednake), pa je

$$\frac{|CF|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{p+q}{p},$$
$$|CF| = |BE| \cdot \frac{p+q}{p}. \qquad (1)$$



S druge strane trokuti DCQ i DBP su slični, jer imaju isti kut D i paralelne stranice $BP \| CQ$ (tj. imaju sve kutove jednake), pa je

$$\frac{|CQ|}{|BP|} = \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{r}{r+q},$$
$$|CQ| = |BP| \cdot \frac{r}{p+q}. \qquad (2)$$

Pomnožimo li (1) i (2) imamo:

$$|CF| \cdot |CQ| = |BE| \cdot \frac{p+q}{p} \cdot |BP| \cdot \frac{r}{r+q}$$
$$(pr+pq)|CF| \cdot |CQ| = (rp+rq)|BE| \cdot |BP|.$$

Hamza Merzić (4), Sarajevo, BiH

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 330. *Izračunaj prosječnu masu, obujam i gustoću zrna papra. Koliko zrna treba za 1 kilogram papra? Ostavite zrna 24 sata u vodi i izračunajte ponovo masu, obujam i gustoću jednog zrna. Koja se od mjerenih veličina najviše promijenila izraženo u postocima?*

Rješenje. Masa suhog 64 zrna iznosila je 3 grama, a njegov obujam 3.8 cm^3.

$$m_{1s} = \frac{3 \text{ g}}{64} = 0.046875 \text{ g},$$
$$V_{1s} = \frac{3.8 \text{ cm}^3}{64} = 0.059375 \text{ cm}^3,$$
$$\rho_s = \frac{m}{V} = \frac{0.046875 \text{ g}}{0.059375 \text{ cm}^3} = 0.789 \text{ g/cm}^3.$$

Nakon namakanja u vodi masa se povećala na 4.3 grama, a obujam na 4.1 cm^3.

$$m_1=\frac{4.3\text{ g}}{64}=0.0671875\text{ g},$$

$$V_1=\frac{4.1\text{ cm}^3}{64}=0.0649625\text{ cm}^3,$$

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{0.0671875\text{ g}}{0.0649625\text{ cm}^3}=1.034\text{ g/cm}^3,$$

$$\frac{m_1}{m_{1s}}=1.43=143\%,$$

$$\frac{V_1}{V_{1s}}=1.08=108\%,$$

$$\frac{\rho}{\rho_s}=1.31=131\%.$$

Izraženo u postocima najviše se promijenila masa.

Domagoj Dorešić (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 331. *Kockica leda ima brid 2 centimetra. Koliko bi ih trebalo uzeti da se njihovim otapanjem dobije litra vode? Gustoća leda je 900 kg/m^3, a gustoća vode 1000 kg/m^3.*

Prvo rješenje.

$a=2$ cm

$\rho_{\text{leda}}=900\text{ kg/m}^3$

$\rho_{\text{vode}}=1000\text{ kg/m}^3$

$\underline{V_{\text{vode}}=1\text{ L}=1\text{ dm}^3=0.001\text{ m}^3}$

$n=?$

$$V_{\text{kockice}}=a\cdot a\cdot a=2\text{ cm}\cdot 2\text{ cm}\cdot 2\text{ cm}=8\text{ cm}^3$$
$$=0.000008\text{ m}^3,$$

$$m_{\text{kockice}}=\rho_{\text{leda}}\cdot V=900\text{ kg/m}^3\cdot 0.000008\text{ m}^3$$
$$=7.2\cdot 10^{-3}\text{ kg},$$

$$m_{\text{vode}}=\rho_{\text{vode}}\cdot V=1000\text{ kg/m}^3\cdot 0.001\text{ m}^3$$
$$=1\text{ kg},$$

$$n=\frac{m_{\text{vode}}}{m_{\text{kockice}}}=\frac{1\text{ kg}}{7.2\cdot 10^{-3}\text{ kg}}=138.9.$$

Treba uzeti približno 139 kockica.

Klaudija Lokas (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

Drugo rješenje.

$a=2$ cm

$\rho_{\text{leda}}=900\text{ kg/m}^3$

$\underline{\rho_{\text{vode}}=1000\text{ kg/m}^3}$

$n=?$

$$m_{\text{leda}}=m_{\text{vode}}=1\text{ kg},$$

$$V_{\text{kl}}=a\cdot a\cdot a=2\text{ cm}\cdot 2\text{ cm}\cdot 2\text{ cm}=8\text{ cm}^3,$$

$$V_{\text{leda}}=\frac{m}{\rho_{\text{leda}}}=\frac{1\text{ kg}}{900\text{ kg/m}^3}=\frac{1}{900\text{ m}^3}$$
$$=1111.1\text{ cm}^3,$$

$$n=\frac{V_{\text{leda}}}{V_{\text{kl}}}=\frac{111.1\text{ cm}^3}{8\text{ cm}^3}=138.88\text{ kockica.}$$

Anita Pušelja (8), OŠ Ivana Gorana Kovačića, Delnice

OŠ – 332. *Ivan je na oprugu objesio prvo jednu pa zatim drugu kuglicu. S prvom se opruga produljila za 4 cm, a s drugom za 6 cm. Promjer prve kuglice je 6 cm, a druge 8 cm. Koliki je omjer gustoća prve i druge kuglice?*

Rješenje.

$\Delta l_1=4$ cm

$\Delta l_2=6$ cm

$d_1=6$ cm

$\underline{d_2=8\text{ cm}}$

$\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=?$

$$F=G=k\cdot\Delta l,$$

$$m\cdot g=k\cdot\Delta l,$$

$$\rho\cdot V\cdot g=k\cdot\Delta l,$$

$$\rho=k\cdot\frac{\Delta l}{V\cdot g},$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\dfrac{k\cdot\Delta l_1}{V_1\cdot g}}{\dfrac{k\cdot\Delta l_2}{V_2\cdot g}}=\frac{\Delta l_1\cdot V_2}{\Delta l_2\cdot V_1},$$

$$V_1=\frac{4}{3}\cdot r_1^3\cdot\pi=\frac{4}{3}\cdot(3\text{ cm})^3\cdot 3.14$$
$$=113.04\text{ cm}^3,$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \cdot r_2^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot (4 \text{ cm})^3 \cdot 3.14$$
$$= 267.95 \text{ cm}^3,$$
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{4 \text{ cm} \cdot 267.95 \text{ cm}^3}{6 \text{ cm} \cdot 113.04 \text{ cm}^3} = 1.58.$$

Klaudija Lokas (8), Šibenik

OŠ – 333. *Drveni kvadar iz zbirke za fiziku ima masu 300 grama. Faktor trenja između njega i klupe iznosi 0.3. Učenici ga vuku pomoću konca koji puca kad se optereti silom od 12 N (njutna). Kolika je masa tereta koji bi učenici morali staviti na kvadar da konac pukne prilikom povlačenja?*

Rješenje.

$m_{\mathrm{k}} = 300$ g

$\mu = 0.3$

$\underline{F_{\max} = 12 \text{ N}}$

$m_{\mathrm{t}} = ?$

$$F_{\mathrm{tr}} = \mu \cdot F_{\mathrm{p}} = F_{\max},$$
$$F_{\mathrm{p}} = \frac{F_{\max}}{\mu} = \frac{12 \text{ N}}{0.3} = 40 \text{ N} = G,$$
$$m = \frac{G}{g} = 4 \text{ kg},$$
$$m_{\mathrm{t}} = m - m_{\mathrm{k}} = 4 \text{ kg} - 0.3 \text{ kg} = 3.7 \text{ kg}.$$

Domagoj Dorešić (8), Zagreb

1483. *Asteroid se kreće hiperboličnom putanjom oko Sunca. Na velikoj udaljenosti od Sunca imao je brzinu 3500 m/s u odnosu na Sunce, a u perihelu (točki najbližoj Suncu) brzina mu iznosi 55 000 m/s. Kolika je udaljenost asteroida od Sunca u perihelu? Masa Sunca iznosi $2 \cdot 10^{30}$ kg. Rezultat izrazi u astronomskim jedinicama.*

Rješenje. Energija asteroida u svakom je trenutku jednaka zbroju kinetičke i gravitacijske potencijalne energije

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{M_s m}{r}.$$

Izjednačavanjem vrijednosti u perihelu i na velikoj udaljenosti dobijemo

$$\frac{mv_p^2}{2} - G\frac{M_s m}{r_p} = \frac{mv_\infty^2}{2} - 0.$$

Izraz ne ovisi o masi asteroida m, a perihelna udaljenost r_p je

$$r_p = \frac{2GM_s}{v_p^2 - v_\infty^2} = 8.855 \cdot 10^{10} \text{ m} = 0.59 \text{ a.j.}$$

Tvrtko Dorešić (3), Zagreb

1484. *Izvor svjetlosti snage 30 W udaljen je 4 m od papira A4 postavljenog tako da svjetlost pada okomito na njega. Odredi (mjerenjem ili teorijski) površinu papira, a zatim snagu koju papir prima od izvora na spomenutoj udaljenosti.*

Rješenje. Površina A0 papira iznosi 1 m^2, a niz formata A1, A2, A3, A4,... ima redom površine 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625,... m^2. Na udaljenosti 4 m od izvora, svjetlost pokriva površinu $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 16 = 201.1$ m^2. Osvjetljenje na zadanoj udaljenosti je omjer snage i površine i jednako je na papiru i u ostalim smjerovima:

$$\frac{P(A4)}{S(A4)} = \frac{P_{uk}}{S_{uk}} = \frac{30 \text{ W}}{201.1 \text{ m}^2}.$$

Odatle je $P(A4) = 9.33$ mW.

Tvrtko Dorešić (3), Zagreb

1485. *Pri utovaru tereta u brod, vodena linija se pomakne za 9 cm. Ako je površina broda 18 m^2, a gustoća morske vode 1030 kg/m^3, odredi kolika je masa tereta utovarena u brod.*

Rješenje. Utovareni teret uravnotežen je dodatnom silom uzgona:

$$U = mg = S\Delta x\rho g.$$

odatle je masa

$$m = S\Delta x\rho = 18 \cdot 0.09 \cdot 1030 = 1668.6 \text{ kg}.$$

Josip Jelić (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1486. *Molekula klora sastoji se od dva atoma klora (Cl_2) i može imati tri različite molekulske težine, ovisno o tome koji od dva stabilna izotopa klora ju čine (težine 35 i 37 m_u). Težine dvoatomnih molekula i njihove* *učestalosti u prirodnom kloru su:*

m	p
$70m_u$	57.411%
$72m_u$	36.718%
$74m_u$	5.871%

Odredi učestalost izotopa klora.

Rješenje. Pretpostavimo da imamo N molekula Cl_2. Uz zadane učestalosti to znači

- $2N \cdot 0.57411\ {}^{35}Cl$
- $N \cdot 0.36718\ {}^{35}Cl + N \cdot 0.36718\ {}^{37}Cl$
- $2N \cdot 0.05871\ {}^{37}Cl$

Učestalosti izotopa su tada

$$\begin{aligned} p({}^{35}\mathrm{Cl}) &= \frac{2 \cdot 0.57411\ N + 0.36718\ N}{2N} \\ &= 0.7577 = 75.77\%, \\ p({}^{37}\mathrm{Cl}) &= \frac{2 \cdot 0.05871\ N + 0.36718\ N}{2N} \\ &= 0.2423 = 24.23\%. \end{aligned}$$

Tvrtko Dorešić (3), Zagreb

1487. *Izvor zvučnih valova vlastite frekvencije $f_0 = 1500$ Hz giba se prema nepomičnom opažaču brzinom 20 m/s. Koju frekvenciju čuje opažač? Kolika je razlika u frekvenciji koju opažač čuje u odnosu na slučaj kad bi izvor mirovao, a opažač se približavao istom brzinom? (razlika je u odnosu na koga miruje medij-zrak). Za brzinu zvuka uzeti 340 m/s.*

Rješenje. Uz v za brzinu zvuka, izraz za Dopplerov efekt u prvom slučaju (izvor se približava) glasi

$$\begin{aligned} f' &= f_0 \frac{v}{v - v_i} = 1500\ \mathrm{Hz} \cdot \frac{340}{320} \\ &= 1593.75\ \mathrm{Hz}. \end{aligned}$$

U drugom slučaju (izvor miruje, opažač se približava) izraz je

$$\begin{aligned} f'' &= f_0 \frac{v + v_o}{v} = 1500\ \mathrm{Hz} \cdot \frac{360}{340} \\ &= 1588.24\ \mathrm{Hz}. \end{aligned}$$

Razlika je $\Delta f = 5.51$ Hz manje u drugom slučaju.

Tvrtko Dorešić (3), Zagreb

1488. *Homogena kugla kotrlja se po vodoravnoj podlozi. Impuls translatornog gibanja iznosi 1.14 kg m/s, a zamah (moment vrtnje) 0.01824 kg m^2/s. Ako je kinetička energija kotrljanja (zbroj translacijske i rotacijske kinetičke energije) 0.4788 J, odredi radijus, masu i gustoću kugle.*

Rješenje. Impuls označimo s p, zamah s L, masu s m, moment tromosti s $I = 2/5mR^2$, brzinu s v i kutnu brzinu $\omega = v/R$. Vrijedi

$$L = I\omega = \frac{2}{5}mR^2\omega = \frac{2}{5}mvR = \frac{2}{5}pR.$$

Dakle $R = 5L/2p = 0.04$ m. Masa je određena kinetičkom energijom:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \\ &= \frac{m}{2}\left(v^2 + \frac{2}{5}R^2\omega^2\right) \\ &= \frac{m}{2} \cdot \frac{7}{5}v^2 = \frac{7}{10}\frac{p^2}{m}. \end{aligned}$$

Masa je odatle

$$m = \frac{7p^2}{10E_{kin}} = 1.9\ \mathrm{kg}.$$

Gustoća je po definiciji

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4R^3\pi} = 7087.4\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Josip Jelić (3), Zagreb

1489. *Nabijena metalna kugla radijusa 6 cm stvara elektrostatsko polje koje u neposrednoj blizini kugle iznosi 1200 V/m. Odredi ukupan naboj na kugli i površinsku gustoću naboja.*

Rješenje. Električno polje na površini kugle radijusa R je

$$E = k\frac{Q}{R^2} \implies Q = \frac{ER^2}{k} = 4.8 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{C}.$$

S obzirom da je naboj jednoliko raspoređen po površini kugle, površinska gustoća naboja je

$$\sigma = \frac{Q}{S} = E\varepsilon = 10.62\ \mathrm{nC/m^2}.$$

Josip Jelić (3), Zagreb