Latinski kvadrati

Sara Ban[1], *Sanja Rukavina*[2]

Latinskim kvadratima bavio se švicarski matematičar *Leonhard Euler* u 18. stoljeću. Pri tome je kao simbole koristio latinična slova pa odatle i potječe njihov naziv. Iako su, poput u to vrijeme vrlo popularnih magičnih kvadrata, u početku bili smatrani dijelom zabavne matematike, s vremenom se uvidjela netrivijalnost kombinatornih problema koji proizlaze iz razmatranja o njima, kao i njihova primjena u drugim granama matematike kao što su algebra i dizajniranje eksperimenata.

Definicija. Kažemo da je kvadratna matrica A reda $n \in \mathbf{N}$ *latinski kvadrat* ako vrijedi:

1. elementi matrice A su elementi nekog n-članog skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;
2. u svakom retku matrice A svaki element a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, nalazi se na točno jednom mjestu;
3. u svakom stupcu matrice A svaki element a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, nalazi se na točno jednom mjestu.

Primjer. Matrica $P = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{bmatrix}$ je latinski kvadrat reda 4, a matrica

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ je latinski kvadrat reda 5.

Možemo bez smanjenja općenitosti uzeti da su elementi latinskog kvadrata elementi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Uočimo da je svaki redak i svaki stupac latinskog kvadrata permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, to jest bijekcija sa skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u taj isti skup.

Kažemo da je latinski kvadrat *standardan* ili *reduciran* ako su u njegovom prvom retku i prvom stupcu elementi prirodno poredani (npr. brojevi po veličini, slova po abecedi). Primijetimo da je latinski kvadrat P iz prethodnog primjera standardan.

Broj latinskih kvadrata reda n

Broj latinskih kvadrata reda n, općenito, nije poznat. Poznata donja međa dana je sljedećim teoremom.

[1] Studentica je na diplomskom studiju Diskretna matematika i primjene na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci; e-pošta: `sban@student.uniri.hr`

[2] Predaje na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci; e-pošta: `sanjar@math.hr`

Teorem. *Broj latinskih kvadrata reda* n *je barem*

$$n!(n-1)!(n-2)!\cdots 1!.$$

(Dokaz vidi u [2].)

U sljedećoj tablici dani su podaci za $n \leq 11$ objavljeni 2007. godine u *Journal of Combinatorial Designs* 2007. godine.

n	broj latinskih kvadrata reda n
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61479419904000
8	108776032459082956800
9	5524751496156892842531225600
10	9982437658213039871725064756920320000
11	776966836171770144107444346734230682311065600000

Tablica 1. Broj latinskih kvadrata reda n *[2, str. 85.]*

Točan broj latinskih kvadrata reda n, za $n \leq 11$, izračunat je opsežnim istraživanjima. Za $n > 11$ ne zna se točna vrijednost. Čak je i razlika između poznate donje i gornje granice vrlo velika.

Ortogonalni latinski kvadrati

Definicija. Kažemo da su dva latinska kvadrata $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ reda n $(i, j = 1, \ldots, n)$ međusobno *ortogonalna* ako zadovoljavaju sljedeće svojstvo: za svaki uređeni par (k, l) elemenata iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ postoji točno jedan uređeni par (i, j) takav da je $a_{ij} = k$ i $b_{ij} = l$.

Također vrijedi: dva latinska kvadrata $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ reda n su ortogonalna ako skup $\{(a_{ij}, b_{ij}) : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ sadržava n^2 različitih uređenih parova.

Zadatak. Zadani su latinski kvadrati

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da su A i B međusobno ortogonalni.

Rješenje. Pokazat ćemo da su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ ortogonalni latinski kvadrati reda 4 provjeravajući svojstvo iz definicije.

uređeni par (k,l) elemenata iz skupa $\{1,2,3,4\}$	uređeni par (i,j) takav da je $a_{ij}=k$ i $b_{ij}=l$
$(1,1)$	$(1,1)$
$(1,2)$	$(3,3)$
$(1,3)$	$(4,4)$
$(1,4)$	$(2,2)$
$(2,1)$	$(3,4)$
$(2,2)$	$(1,2)$
$(2,3)$	$(2,1)$
$(2,4)$	$(4,3)$
$(3,1)$	$(4,2)$
$(3,2)$	$(2,4)$
$(3,3)$	$(1,3)$
$(3,4)$	$(3,1)$
$(4,1)$	$(2,3)$
$(4,2)$	$(4,1)$
$(4,3)$	$(3,2)$
$(4,4)$	$(1,4)$

Ukoliko par ortogonalnih latinskih kvadrata $A=[a_{ij}]$ i $B=[b_{ij}]$ reda n zapišemo u obliku matrice C na način da je $C=[(a_{ij},b_{ij})]$, $i,j=1,\ldots,n$, dobit ćemo *grčko-latinski kvadrat*. Zamijenimo li elemente prvog kvadrata latiničnim, a elemente drugog grčkim slovima, tada uvjet ortogonalnosti kaže da se svaki uređeni par koji se sastoji od latiničnog i grčkog slova pojavljuje točno jednom u matrici čiji elementi su uređeni parovi elemenata polaznih latinskih kvadrata.

Grčka i latinična slova na ovaj je način prvi koristio Euler pa se ponekad grčko-latinski kvadrat naziva i Eulerov kvadrat.

Učinimo li opisano za par ortogonalnih latinskih kvadrata A i B iz prethodnog zadatka, dobit ćemo grčko-latinski kvadrat

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) & (4,4) \\ (2,3) & (1,4) & (4,1) & (3,2) \\ (3,4) & (4,3) & (1,2) & (2,1) \\ (4,2) & (3,1) & (2,4) & (1,3) \end{bmatrix}, \quad \text{odnosno} \quad \begin{bmatrix} (A,\alpha) & (B,\beta) & (C,\gamma) & (D,\delta) \\ (B,\gamma) & (A,\delta) & (D,\alpha) & (C,\beta) \\ (C,\delta) & (D,\gamma) & (A,\beta) & (B,\alpha) \\ (D,\beta) & (C,\alpha) & (B,\delta) & (A,\gamma) \end{bmatrix}.$$

Magični kvadrati

Magični kvadrat je kvadratna matrica reda n čiji su elementi brojevi iz skupa $\{1,\ldots,n^2\}$, tako da se svaki broj pojavljuje u matrici točno jednom, a suma brojeva S u svakom retku, stupcu i na dijagonalama je jednaka i iznosi

$$S=\frac{(1+n^2)n}{2}.$$

Euler je uočio da je moguće konstruirati magični kvadrat reda n iz dvaju međusobno ortogonalnih latinskih kvadrata reda n na sljedeći način:

1. Konstruiramo matricu čiji su elementi uređeni parovi elemenata zadanih latinskih kvadrata pri čemu zamijenimo elemente u oba ortogonalna latinska kvadrata brojevima $0, 1, \ldots, n-1$.
2. Uređeni par (i, j) u dobivenoj matrici zamijenimo brojem $in + j$.
3. Sada su elementi dobivene matrice brojevi $0, 1, \ldots, n^2 - 1$. Svakom od tih brojeva pribrojimo 1 i dobivamo brojeve $1, 2, \ldots, n^2$ kao elemente matrice.

Zadatak. Promatrajmo dva ortogonalna latinska kvadrata

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pomoću latinskih kvadrata L i G reda 3 konstruiramo magični kvadrat reda 3.

Rješenje. Primjenjujemo gore opisani postupak za dobivanje magičnog kvadrata:

1.
$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; M_{GL} = \begin{bmatrix} (2,1) & (0,0) & (1,2) \\ (0,2) & (1,1) & (2,0) \\ (1,0) & (2,2) & (0,1) \end{bmatrix},$$

2.
$$M_{GL} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix},$$

3.
$$M_{GL} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

U današnje vrijeme najpoznatiji latinski kvadrati su *Sudoku*. Svaki sudoku je latinski kvadrat, ali obrat ne vrijedi. Sudoku je latinski kvadrat reda 9 za koji vrijedi uvjet: u svakom od dodatno istaknutih kvadratnih polja reda 3 unutar tog latinskog kvadrata svaki od brojeva 1, 2, ..., 9 pojavljuje se točno jednom. Samo 0.00012% latinskih kvadrata su moguće sudoku slagalice (izračunali B. Felgenhauer i F. Jarvis 2005. godine). Brojne sudoku slagalice mogu se naći na `http://www.websudoku.com/`, a donosimo jednu od njih.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Slika 1. Sudoku.

Literatura

[1] PETER J. CAMERON, *Mathematical properties of Latin squares*, Encyclopaedia of DesignTheory: Latin squares, URL: `http://designtheory.org/library/encyc/latinsq/m/`

[2] PETER J. CAMERON, *Notes on Combinatorics*, URL: `http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/notes/comb.pdf`

[3] RAFAEL MRĐEN, *Ortogonalni latinski kvadrati i konačne projektivne ravnine*, e.math, br. 16, URL: `http://e.math.hr/sites/default/files/br16/mrdjen.pdf`