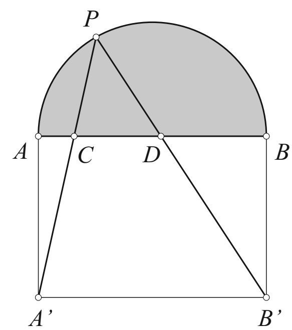
Fermatov problem za konike

Zvonko Čerin[1]

Sažetak. Poznatom francuskom matematičaru Pierre de Fermatu se pripisuje geometrijski problem u kojem se za točke na polukružnici nad stranicom specijalnog pravokutnika kao dijametrom tvrdi da je zbroj kvadrata dviju dužina jednak kvadratu te stranice. Naš zadatak u ovom članku je pokazati da slična tvrdnja vrijedi i za sve točke elipse kojoj je stranica pravokutnika glavni dijametar. Pored toga, vidjet ćemo da u toj konfiguraciji mnogi drugi odnosi i veličine ostaju invarijantne pri kretanju točke po toj elipsi. Dana su i dva primjera rezultata sličnih Fermatovom gdje se umjesto (polu)kružnice i/ ili elipse pojavljaju parabola i/ ili hiperbola.

Uvod

U jednom pismu slavni francuski matematičar Pierre de Fermat (koji je živio od 1601. do 1665.) postavio je sljedeći geometrijski problem koji je privukao pažnju njegovih suvremenika (vidi sliku 1).



Slika 1. Konfiguracija Fermatovog problema.

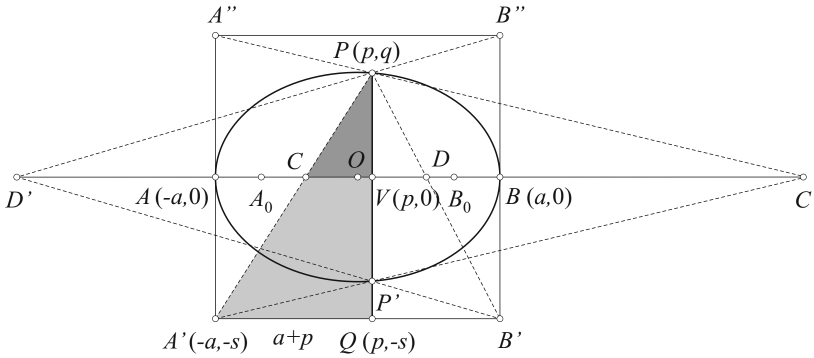
Fermatov problem za polukružnicu. Neka je P točka na polukružnici kojoj je gornja stranica $\overline{AB}$ pravokutnika $ABB'A'$ dijametar. Neka je $\dfrac{|AB|}{|AA'|} = \sqrt{2}$. Ako segmenti $\overline{PA'}$ i $\overline{PB'}$ sijeku stranicu $\overline{AB}$ u točkama C i D, onda je $|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$.

Prema mišljenju mnogih znanstvenika, najveći od svih matematičara, Leonard Euler je u članku [2] gotovo cijelo jedno stoljeće kasnije dao prvi dokaz Fermatovog problema za polukružnicu. On je dugačak, staromodan (za ono vrijeme), čisto geometrijski i izbjegava analitičku geometriju (u kojoj je dokaz jednostavan). Taj jednostavniji dokaz nedavno su nam predstavili Željko Hanjš i Vladimir Volenec u [3]. Oni usput primjećuju da gornja jednakost $|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$ vrijedi za sve točke na kružnici kojoj je stranica $\overline{AB}$ dijametar.

Naš cilj je prošititi Fermatov problem s kružnice na elipsu. Umjesto točke P na polukružnici nad stranicom $\overline{AB}$ kao dijametrom, promatrat ćemo točku P na elipsi kojoj je segment $\overline{AB}$ glavni dijametar. Pokazat će se da kada je $\dfrac{|AB|}{|AA'|} = \sqrt{\dfrac{2}{1-e^2}}$, gdje e označava ekscentricitet elipse, relacija $|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$ vrijedi za sve točke P te elipse. Kako je kružnica specijalan slučaj elipse (kojoj je ekscentricitet e jednak nuli), slijedi da smo na taj način dobili poopćenje (generalizaciju) Fermatovog problema.

[1] Redoviti profesor na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `cerin@math.hr`

Da bismo to postigli, za elipsu, promatrat ćemo malo općenitiju situaciju kada je omjer $\frac{|AB|}{|AA'|}$ neki pozitivni realan broj m. Zapravo ćemo tražiti za koju vrijednost broja m pojedini odnosi u promatranoj konfiguraciji ne ovise od položaja točke P. Pored toga, trebat ćemo i refleksije (zrcalne slike) A'', B'', P' točaka A', B', P s obzirom na pravac AB kao i presjeke C' i D' pravca AB s pravcima PA'' (i/ ili $P'A'$) i PB'' (i/ ili $P'B'$) (vidi sliku 2.).



Slika 2. Proširena Fermatova konfiguracija za elipsu.

Ovaj uvod završavamo napomenom da većina naših rezultata dolazi u pridruženim parovima. Druga verzija, za koju nije potreban nikakav poseban dokaz, dolazi (npr. u teoremu 1) zamjenom točaka C i D u (b) točkama C' i D' (koje odgovaraju simetričnoj točki P') u (c).

Fermatov problem za elipsu

Za točke P_1, P_2, P_3 i P_4 u ravnini, definirajmo funkciju φ pravilom:

$$\varphi(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{|P_1P_2|^2 + |P_3P_4|^2}{|AB|^2}.$$

S takvim oznakama, gornji Fermatov problem za elipsu je zapravo implikacija $(a) \implies (b)$ u sljedećem teoremu. Neka je $f = \sqrt{1-e^2}$.

Teorem 1. *Sljedeće četiri tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) Omjer m duljina stranica pravokutnika $ABB'A'$ je jednak $\frac{\sqrt{2}}{f}$.

(b) $\varphi(AD, BC) = 1$.

(c) $\varphi(AD', BC') = 1$.

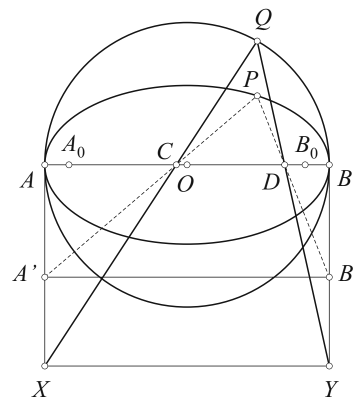
(d) $\varphi(AD, BC) = \varphi(AD', BC')$.

Dokaz. Mi ćemo koristiti analitičku geometriju jer ona omogućava jednostavan dokaz. Neka ishodište pravokutnog koordinatnog sustava bude polovište O stranice $\overline{AB}$ tako da točke A i B imaju koordinate $(-a, 0)$ i $(a, 0)$ za neki pozitivan realan broj a. Fokusi elipse su u točkama $A_0(-a\,e, 0)$ i $B_0(a\,e, 0)$ dok je njena jednadžba standardna

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, gdje je $e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} < 1$ njen ekscentricitet i $b = a\sqrt{1-e^2} = af$ manja poluos. Neka je $s = \dfrac{2a}{m}$.

Koordinate točaka A', B', A'' i B'' su $(-a, -s)$, $(a, -s)$, $(-a, s)$ i (a, s). Za bilo koji realan broj t, uvedimo oznake $u = 1 - t^2$, $v = 1 + t^2$, $w = f\,m$, $z = f\,m\,t = t\,w$, $\eta = v - z$ i $\vartheta = v + z$. Proizvoljna (bilo koja) točka P elipse ima koordinate $(p,\, q)$ gdje je $p = \dfrac{a\,u}{v}$ i $q = \dfrac{2\,a\,z}{m\,v}$. Iz sličnih pravokutnih trokuta PVC i PQA' na slici 2, vidimo da je $p - \dfrac{q(p+a)}{q+s} = \dfrac{p\,s - q\,a}{q+s} = \dfrac{a\,(u-z)}{\vartheta}$ apscisa točke C. Slično je $D = \left(\dfrac{a\,(u+z)}{\vartheta}, 0\right)$, $C' = \left(\dfrac{a\,(u+z)}{\eta}, 0\right)$ i $D' = \left(\dfrac{a\,(u-z)}{\eta}, 0\right)$. Jer je $\varphi(AD,\, BC) - 1 = \dfrac{t^2\left(w^2-2\right)}{\vartheta^2}$, $\varphi(AD',\, BC') - 1 = \dfrac{t^2\left(w^2-2\right)}{\eta^2}$ i $\varphi(AD',\, BC') - \varphi(AD,\, BC) = \dfrac{4t^2vz\left(w^2-2\right)}{\vartheta^2\eta^2}$, tvrdnje (a), (b), (c) i (d) su ekvivalentne. $\square$

Na slici 3 se vidi kako se dokaz teorema 1 (za elipsu) može izvesti iz slične tvrdnje za pridruženu kružnicu (tj. iz Fermatovog problema). Jer je elipsa afina slika kružnice, moramo samo rastegnuti y-koordinatu svake točke P na elipsi za $\dfrac{a}{b}$ da dobijemo pridruženu točku Q na kružnici. Točke A' i B' treba istovremeno pomaknuti prema dolje za isti omjer do točaka X i Y. Točke A, B, C i D ostaju na miru pa su tvrdnje teorema 1 podudarne s analognim tvrdnjama za kružnicu.



Slika 3. Elipsa i pridružena kružnica.

Invarijante Fermatove konfiguracije za elipsu

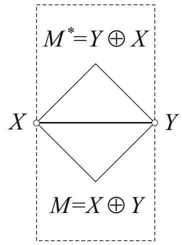
Sada kada je glavni cilj ostvaren, idemo dalje proučiti ovu zanimljivu geometrijsko-dinamičku konfiguraciju. Želimo otkriti čim je moguće više tvrdnji sličnih tvrdnjama (b), (c) i (d) koje bi se mogle ravnopravno pojaviti u teoremu 1. Drugačije kazano, istražujemo koje druge relacije i odnosi u Fermatovoj proširenoj konfiguraciji za elipse ostaju nepromijenjene (invarijantne) kada točka P mijenja položaj na elipsi.

Mnoge od tih tvrdnji mogu se dobiti iz odgovarajućih rezultata za kružnicu iz autorovog članka [1] koristeći gore opisanu vezu elipse s kružnicom. Zato ćemo ovdje samo objasniti naše oznake i iskazati te tvrdnje a dokaze prepuštamo čitateljima za vježbu. Najlakše je to učiniti analitičkim pristupom uz pomoć računala.

Započinjemo s dijagonalama trapeza $A'B'DC$ i stranicama trapeza $A'B'C'D'$ (kad je točka P iznad stranice $\overline{AB}$).

(e) $\varphi(A'D, B'C) = \varphi(A'D', B'C') = 1 + f^2$.

Za različite točke X i Y, neka $X \oplus Y$ označava središte kvadrata podignutog na dužini $\overline{XY}$ tako da trokut $X(X \oplus Y)Y$ ima pozitivnu orijentaciju (suprotnu smjeru kazaljke na satu). Ako je točka $X \oplus Y$ označena kao M, onda je M^* oznaka za točku $Y \oplus X$ (vidi sliku 4).



Slika 4. Dva središta kvadrata na dužini $\overline{XY}$.

Polovišta G, H, G' i H' segmenata $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC'}$ i $\overline{BD'}$ i vrh N polukružnice nad stranicom $\overline{AB}$ koristimo u sljedeće dvije tvrdnje. Drugačije iskazano, $N = B \oplus A = (0, a)$. Središte O elipse (tj., polovište segmenta $\overline{AB}$; ishodište našeg koordinatnog sustava) pojavljuje se u tvrdnji (g).

(f) $\varphi(NG, NH) = \varphi(NG', NH') = \dfrac{3}{4}$.

(g) $\varphi(OG, OH) = \varphi(OG', OH') = \dfrac{1}{4}$.

Neka G_s, H_s, G_s' i H_s' budu točke koje dijele segmente $\overline{NG}$, $\overline{NH}$, $\overline{NG'}$ i $\overline{NH'}$ u istom omjeru $s \neq -1$ (tj. $NG_s : G_sG = s : 1$, itd.).

(h) $\varphi(OG_s, OH_s) = \varphi(OG_s', OH_s') = \dfrac{s^2+2}{4(s+1)^2}$.

(i) $\varphi(NG_s, NH_s) = \varphi(NG_s', NH_s') = \dfrac{3\,s^2}{4(s+1)^2}$.

Neka su N_1, N_2, N_3 i N_4 najviše točke polukružnica podignutih na segmentima $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC'}$ i $\overline{BD'}$ iznad pravca AB. Drugačije rečeno, neka je $N_1 = C \oplus A$, $N_2 = B \oplus D$, $N_3 = C' \oplus A$, $N_4 = B \oplus D'$.

(j) $\varphi(BN_1, AN_2) = \varphi(BN_3, AN_4) = \dfrac{3}{2}$.

(k) $\varphi(NN_1, NN_2) = \varphi(NN_3, NN_4) = \dfrac{1}{2}$.

Sljedeća grupa tvrdnji isto koristi vrhove N_1, N_2, N_3 i N_4. Ali, u njima nema funkcije φ.

(l) $|N_1N_2| = |N_3N_4| = |AN|$.

(m) $|N_1N_2|^2 + |N_2N_3|^2 + |N_3N_4|^2 + |N_4N_1|^2 = 2\,|AB|^2$.

Primijetimo da je $|N_1N_2^*|^2 + |N_2^*N_3^*|^2 + |N_3^*N_4|^2 + |N_4N_1|^2 = 2\,|AB|^2$ onda i samo onda ako je $m = \dfrac{1}{f}$. Dakle, nije omjer $m = \dfrac{\sqrt{2}}{f}$ jedini koji ima neko geometrijsko značenje već se mogu pojaviti i drugi omjeri.

Neka je $N_5 = A \oplus D$, $N_6 = C \oplus B$, $N_7 = A \oplus D'$ i $N_8 = C' \oplus B$.

(n) $\varphi(AN_5, BN_6) = \varphi(AN_7, BN_8) = \dfrac{1}{2}$.

(o) $\varphi(GN_6, HN_5) = \varphi(G'N_8, H'N_7) = \dfrac{3}{4}$.

(p) $\varphi(NN_5, NN_6) = \varphi(NN_7, NN_8) = \dfrac{3}{2}$.

U sljedeće dvije tvrdnje koristimo središta kvadrata podignutih na segmentima $\overline{CD}$ i $\overline{C'D'}$. Neka je $M_1 = C \oplus D$ i $M_2 = C' \oplus D'$.

(q) $|N\,M_1| = |N\,M_2| = |A\,N|$.

(r) $\varphi(M_1N_1, M_1N_2) = \varphi(M_2N_3, M_2N_4) = \dfrac{1}{2}$.

Ove dvije tvrdnje su među jednostavnijima.

(s) $2\,|AC|\,|BD| = |CD|^2$.

(t) $2\,|AC'|\,|BD'| = |C'D'|^2$.

Za bilo koju točku X u ravnini, neka su G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 i G_6 težišta trokuta ACX, CDX, DBX, $AC'X$, $C'D'X$ i $BD'X$.

(u) $\varphi(G_2G_1, G_2G_3) = \varphi(G_5G_4, G_5G_6) = \dfrac{1}{9}$.

Neka su U i V polovišta segmenata $\overline{CC'}$ i $\overline{DD'}$.

(v) $\varphi(NU, NV) = 1$.

(w) $\varphi(OU, OV) = \varphi(N_6U, N_5V) = \dfrac{1}{2}$.

Neka je $W = U \oplus V$.

(x) Središte W leži na kružnici kojoj je segment $\overline{AB}$ dijametar.

(y) $\varphi(WN_i, WN_j) = \dfrac{1}{2}$, za $i \in \{1, 3\}$ i $j \in \{2, 4\}$.

(z) $\varphi(W^*N, WN) = 1$.

(a1) Pravci WN_1 i WN_2 su okomiti.

(b1) Pravci WN_3 i WN_4 su okomiti.

Neka je $K_1 = B \oplus N_1$, $K_2 = N_2 \oplus A$, $K_3 = B \oplus N_3$, $K_4 = N_4 \oplus A$. Te se točke mogu opisati jednostavnije. Sve imaju istu visinu kao i točka N a vertikalno su iznad točaka N_6, N_5, N_8, N_7. U sljedeće tri tvrdnje pojavljuju se pomalo neobični brojevi.

(c1) $\varphi(A'K_2, B'K_1) = \varphi(A'K_4, B'K_3) = \dfrac{3}{4} + f\sqrt{2} + f^2$.

(d1) $\varphi(A'K_2^*, B'K_1^*) = \varphi(A'K_4^*, B'K_3^*) = \dfrac{3}{4} - f\sqrt{2} + f^2$.

Neka su S_1 i T_1 oznake za polovišta segmenata $\overline{A'C}$ i $\overline{B'D}$. Slično, neka su S_2 i T_2 polovišta segmenata $\overline{A'C'}$ i $\overline{B'D'}$.

(e1) $\varphi(NS_1, NT_1) = \varphi(NS_2, NT_2) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{f\sqrt{2}}{2} + \dfrac{f^2}{4}$.

(f1) $\varphi(OS_1, OT_1) = \varphi(OS_2, OT_2) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{f^2}{4}$.

Za točke X i Y, neka ϱ_X^Y označava refleksiju točke X u točki Y. Neka je $Q = \varrho_A^D$, $R = \varrho_B^C$, $Q' = \varrho_A^{D'}$, $R' = \varrho_B^{C'}$.

(g1) $\varphi(A'Q, B'R) = \varphi(A'Q', B'R') = 4 + f^2$.

Fokusi A_0 i B_0 elipse se pojavljuju u posljednje dvije tvrdnje. Neka je $n_1 = C \oplus A_0$, $n_2 = B_0 \oplus D$, $n_3 = C' \oplus A_0$, $n_4 = B_0 \oplus D'$. Neka su I i J polovišta dužina $\overline{NM_1^*}$ i $\overline{NM_2^*}$.

(h1) $\varphi(An_2, Bn_1) = \varphi(An_4, Bn_3) = \dfrac{3 + 2\,e + e^2}{4}$.

(i1) $\varphi(A_0I, B_0I) = \varphi(A_0J, B_0J) = \dfrac{3 - 2f^2}{4}$.

Zajednička svojstva

Naravno da postoje mnoga svojstva Fermatove proširene konfiguracije za elipsu koja vrijede za sve omjere m duljina stranica pravokutnika $ABB'A'$. Evo jednog primjera takvih svojstava.

Teorem 2. *Trokuti ADP i BCP imaju zajednički ortocentar (sjecište visina – okomica na stranice kroz nasuprotne vrhove). Taj ortocentar leži na kružnici kojoj je segment $\overline{CD}$ dijametar onda i samo onda ako je $f = 1$ (tj., ako je elipsa kružnica).*

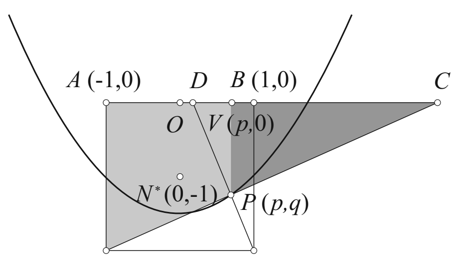
Trokuti $AD'P$ i $BC'P$ imaju zajednički ortocentar koji će ležati na kružnici kojoj je segment $\overline{C'D'}$ dijametar onda i samo onda ako je $f = 1$.

Dokaz. Lagano se provjeri da ortocentri oba trokuta ADP i BCP imaju koordinate $\left(\dfrac{a\,u}{v}, \dfrac{2\,a\,m\,t^2}{\vartheta\,v}\right)$.

Ako je K polovište segmenta $\overline{CD}$ i L je ortocentar trokuta ADP, onda je $|CK|^2 - |KL|^2 = \dfrac{4\,a^2\,m^2\,t^4(f-1)(f+1)}{\vartheta^2\,v^2}$. Dakle, $|CK| = |KL|$ (tj. L je na kružnici kojoj je $\overline{CD}$ dijametar) onda i samo onda ako je $f = 1$. $\square$

Fermatov problem za parabolu

Postoji li tvrdnja slična teoremu 1 u kojoj se umjesto elipse pojavljuje parabola? Odgovor nam daje sljedeći teorem (vidi sliku 5).



Slika 5. Fermatov problem za parabolu.

Teorem 3. *Neka je P bilo koja točka parabole kojoj je središte N^* kvadrata $ABB'A'$ fokus a pravac $A'B'$ direktrisa. Ako pravci $A'P$ i $B'P$ sijeku pravac AB u točkama C i D onda je $\varphi(AD,\, BC) = 2$.*

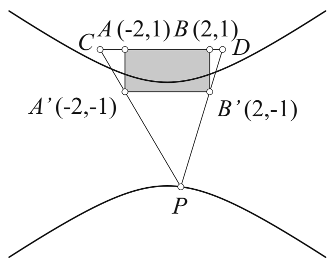
Dokaz. Koordinate točaka A, B, A', B' i N^* su $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, -2)$, $(1, -2)$ i $(0, -1)$. Proizvoljna (bilo koja) točka P parabole ima koordinate $(p,\, q)$. Iz sličnih pravokutnih trokuta PVC i $A'AC$ na slici 5, vidimo da je $\dfrac{2p-q}{q+2}$ apscisa točke C. Slično je $D = \left(\dfrac{2p+q}{q+2}, 0\right)$. Dakle, $2 - \varphi(AD,\, BC) = \dfrac{8(3+2\,q-p^2)}{(q+2)^2}$. S druge strane, po definiciji parabole mora biti $\sqrt{(p-0)^2+(q-(-1))^2} = \sqrt{(q-(-2))^2}$ (tj. udaljenost točke P do fokusa N^* je jednaka njenoj udaljenosti do direktrise). Prema tome jednadžba parabole je $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}$, pa je doista $\varphi(AD, BC) = 2$. $\square$

Možete li pronaći još koju invarijantu ove konfiguracije pored tvrdnji da za sve točke parabole vrijedi $\varphi(AN_2, BN_1) = 2$, $\varphi(A'D, B'C) = 4$, $\varphi(N^*G, N^*H) = 1$, $\varphi(OG, OH) = \dfrac{1}{2}$ i $\varphi(\varrho_O^{N^*}G, \varrho_O^{N^*}H) = \dfrac{5}{2}$?

Fermatov problem za hiperbolu

Članak završavamo problemom za čitatelje koji pokazuje da i hiperbola može imati slično svojstvo kao i kružnice, elipse i parabole u odnosu na neki pravokutnik.

Na slici 6 je prikazan pravokutnik $ABB'A'$ s vrhovima $A(-2,1)$, $B(2,1)$, $A'(-2,-1)$, $B'(2,-1)$ i hiperbola $x^2 - 2(y+3)^2 = 12$. Za bilo koju točku P te hiperbole vrijedi $\varphi(AD, BC) = 3$, gdje su C i D presjeci pravca AB s pravcima $A'P$ i $B'P$.



Slika 6. Fermatov problem za hiperbolu.

Možete li pronaći neku invarijantu ove konfiguracije? Postoji li još neka hiperbola i pravokutnik $ABB'A'$ tako da $\varphi(AD, BC)$ ima vrijednost 4 ili $\dfrac{1}{4}$?

Napomena. Ovaj članak i referenca [1] dostupni su na autorovoj WEB stranici `www.math.hr/~cerin`.

Literatura

[1] ZVONKO ČERIN, *O Fermatovom geometrijskom problemu*, Poučak 49, (2012), 4–15.

[2] LEONARD EULER, *Various Geometric Demonstrations*, New Commentaries of the Petropolitan Academy of Sciences I, (1747/ 48), 1750, pp. 49–66 (Prijevod na engleski Adama Glovera 2005. dostupan na adresi `euler.com`).

[3] ŽELJKO HANJŠ, VLADIMIR VOLENEC, *O jednom (davno riješenom) Fermatovom problemu*, Matematičko-fizički list **LXI** 4 (2010.–2011.), 225.