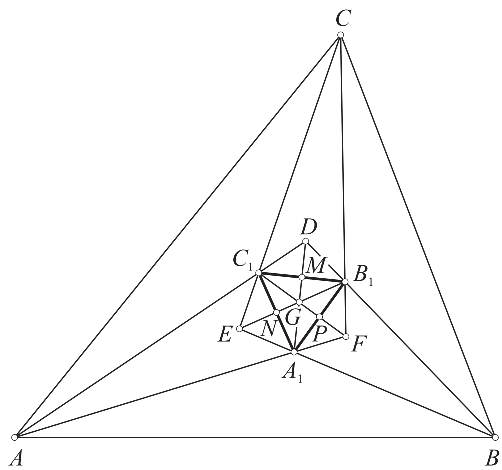
Generalizacija Morleyevog teorema

Dragoljub S. Jović[1]

Francuski matematičar Henri Lebesgues[2] je *n-sektrisom* kuta nazvao $(n-1)$ pravaca, koji prolaze kroz vrh kuta i dijele ga na "n" jednakih dijelova. Specijalno, za $n = 2$ dobijemo bisektrisu (simetralu) kuta, a za $n = 3$, dvije trisektrise kuta. Jednu od značajnih osobina trisektrisa trokuta otkrio je 1899. godine američki profesor Frank Morley[3]. Ovo njegovo otkriće poznato je u matematici kao *Morleyev teorem* ("čudo nad čudima", kako je u vrijeme otkrića nazivan). U geometriji trokuta je posebno zanimljiva, prije svega zbog onoga što ona sadrži, ali i zbog vremena kada je otkrivena, (jer se tada mislilo da je sve o važnim točkama, prvacima i kružnicama kod trokuta već poznato). Do 1914. godine nije bio objavljen nijedan dokaz Morleyevog teorema.

Ona tvrdi da *ako se svaki kut trokuta polupravcima podijeli na tri jednaka dijela, po dva najbliža polupravca svakoj od njegovih stranica sijeku se u vrhovima jednakostraničnog trokuta, takozvanog Morleyevog trokuta*.

Na donjoj slici je trokut $A_1B_1C_1$ jednakostraničan.



Autor ovog članka je u Matematičko-fizičkom listu za učenike srednjih škola, br. 1/ 140, god. XXXV, Zagreb, 1984. – 85., (str. 10–15) prikazao tri dokaza Morleyevog teorema, pa je stoga moj cilj dokazati još jednu njegovu generalizaciju.

Teorem (o generalizaciji Morleyevog teorema). Neka je $A_1B_1C_1$ Morleyev trokut danog trokuta ABC. Tada se, prema oznakama na slici, pravci A_1D, B_1E, C_1F sijeku u istoj točki (tj. pripadaju jednom te istom pramenu konkurentnih pravaca).

Dokaz. Neka je $A_1D \cap B_1C_1 = M$, $B_1E \cap C_1A_1 = N$, $C_1F \cap A_1B_1 = P$ i neka se pravci A_1D i B_1E, kao dva različita neparalelna pravca u ravnini, sijeku u točki G.

[1] Autor je profesor srednje škole u Zaječaru u Srbiji.

[2] Henry Lebesgues (1875. – 1941.)

[3] Frank Morley (1860. – 1937.)

Ako vrhovima A_1, B_1, C_1 Morleyevog trokuta $A_1B_1C_1$ pridružimo, tim redom, skalare (mase) m_1, m_2, m_3, takve da točka G bude njihovo *težište (baricentar)* i da su pri tome točke M, N, P redom *težišta parova točaka* (B_1, C_1), (C_1, A_1), (A_1, B_1), što se *zgodnim izborom* danih skalara m_1, m_2, m_3, *uvijek* može postići, (težište sistema točaka izborom skalara to dopušta). Primjenom zakona o ravnoteži poluge (da su joj kraci obrnuto proporcionalni sa skalarima (masama) na njenim krajevima), smatrajući pri tome svaku stranicu Morleyevog trokutla $A_1B_1C_1$ za polugu, imamo

$$\frac{|B_1M|}{|MC_1|} = \frac{m_3}{m_2}, \qquad \frac{|C_1N|}{|NA_1|} = \frac{m_1}{m_3}, \qquad \frac{|A_1P|}{|PB_1|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Odavde se nakon množenja ovih jednakosti, dobiva

$$\frac{|B_1M|}{|MC_1|} \cdot \frac{|C_1N|}{|NA_1|} \cdot \frac{|A_1P|}{|PB_1|} = \frac{m_3}{m_2} \cdot \frac{m_1}{m_3} \cdot \frac{m_2}{m_1},$$

tj.

$$\frac{|B_1M|}{|MC_1|} \cdot \frac{|C_1N|}{|NA_1|} \cdot \frac{|A_1P|}{|PB_1|} = 1. \tag{1}$$

Neposredno iz relacije (1), a na osnovu Cevinog[4] teorema, dobivamo da pravci A_1M, B_1N, C_1P pripadaju jednom istom pramenu konkurentnih pravaca, tj. da se pravci A_1M, B_1N, C_1P sijeku u jednoj te istoj točki.

S druge strane, pravci A_1M, B_1N, odnosno A_1D, B_1E sijeku se u točki G, pa ostaje još dokazati da i pravac C_1P, odnosno C_1F prolazi kroz točku G.

Pretpostavimo suprotno, tj. da pravac C_1P, odnosno C_1F, ne prolazi točkom G. U tom slučaju pravac C_1G, siječe stranicu A_1B_1 Morleyevog trokuta $A_1B_1C_1$ u nekoj točki P_1, različitoj od točke P. To znači da se pravci A_1M, B_1N, C_1P_1, sijeku u točki G, pa prema Cevinom teoremu imamo

$$\frac{|B_1M|}{|MC_1|} \cdot \frac{|C_1N|}{|NA_1|} \cdot \frac{|A_1P_1|}{|P_1B_1|} = 1. \tag{2}$$

Iz jednakosti (1) i (2), dobivamo

$$\frac{|A_1P|}{|PB_1|} = \frac{|A_1P_1|}{|P_1B_1|},$$

a to je moguće ako i samo ako je $P = P_1$.

Prema tome, točka P_1 je identična s točkom P, pa stoga pravci A_1M, B_1N, C_1P, odnosno A_1D, B_1E, C_1F, prolaze kroz istu točku G, tj. pripadaju jednom te istom pramenu konkurentnih pravaca sa središtem u točki G, što je u teoremu i trebalo dokazati. Time je teorem o generalizaciji Morleyevog teorema u potpunosti dokazan.

Literatura

[1] DRAGOLJUB S. JOVIĆ, *Baricentar sistema točaka u prostoru E^n i neke njegove primjene u geometriji*, Matematika, stručno-metodički časopis, Zagreb, 1983.

[4] Givanni Ceva (7. prosinca 1647. – 15. lipnja 1734.), poznati talijanski matematičar.