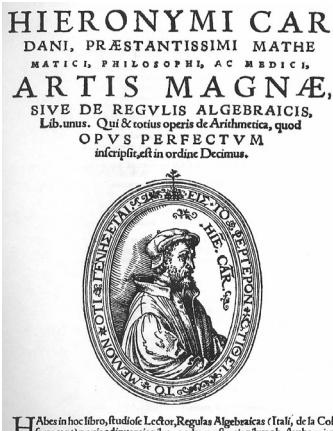


Spletke, dvoboji, samoubojstvo i kubna jednadžba

Ivica Vuković¹



H Ab ea in hoc libro, studiis Lectorum Regulis Algebraicis (Itali, de la Cof
fa vocant) nosiis adiunctionibus ac demonstracionibus ab Auctore ita
locupletata, ut pro paucis annis aucto tritis, iam reputagia euerint. Ne
q; folium, ubi unus numerus alter, aut duo un, uerum etiam, ubi duobus,
aut triu, ut uocari possit, aequaliter explicetur. Hanc librum, aucto feci
finitum placuisse hoc algorismum, quod dicit invenimus omnia. Auctore
ce theatro in lucem eruto, & quia in theatro quodam omnibus ad speciem
dum expolit. Lectores incitare ut reliquo Opere Perfectib; qui per
Tomas edentur, raro audire amplectantur, ac minore falso id perdicant.

astrolog i izumitelj. Knjiga će izazvati jedan od najvećih prijepora u povijesti matematike². O čemu je zapravo riječ i zašto je ta knjiga izazvala nezapamćenu buru? Tko su bili glavni protagonisti tih događaja? O tome ćemo sada govoriti.

Vratimo se još malo dalje u povijest. Dugo je vremena rješavanje kubne jednadžbe bio zamršen problem i tvrd orah mnogim matematičarima. Primjeri zadataka koji se svode na kubne jednadžbe nalaze se još na babilonskim pločicama. Jedan od triju poznatih zadataka starogrčke matematike je i Delski problem, nalaženje brida kocke čiji je obujam dvostruko veći od obujma zadane kocke. Druga dva problema su kvadratura kruga i trisekcija kuta. Rješavanje tih zadaća bilo je ograničeno načelom grčkih matematičara koji te zadatke nisu rješavali algebarski već su ih nastojali, naravno neuspješno, rješiti geometrijskim konstrukcijama pomoću ravnala i šestara. I arapski matematičari, primjerice Bhâskara i Omar Khayyam, rješavali su pojedinačne probleme koji se svode na kubne jednadžbe, ali nisu uspjeli otkriti opći postupak. Stoga ne čudi da je fratar Luca Pacioli u traktatu *Summa de arithmeticā, geometricā, proportioni et proportionalitā*, objavljenom 1494. tvrdio da se kubne jednadžbe ne mogu rješiti algebarski. Zbog ugleda autora i utjecaja koji je ta knjiga imala, zacijelo su se talijanski matematičari tog doba slagali s njegovim mišljenjem. No, bilo je i iznimaka. Tu dolazimo do jednog od junaka naše priče.

Scipione dal Ferro je rođen 1465. u Bologni, gdje je vjerojatno i studirao. Od 1496. pa sve do smrti 1526. predavao je aritmetiku i geometriju na Sveučilištu u Bologni. Potkraj

¹ Autor je predavač matematike na Elektrotehničkom odjelu Tehničkog veleučilišta u Zagrebu; e-pošta: ivica.vukovic@tvz.hr

² O najpoznatijim sukobima u povijesti matematike pročitajte u knjizi Franke Miriam Brückler *Matematički dvoboji*, Školska knjiga, Zagreb, 2011.

života se, osim akademskim radom bavio i komercijalnim poslovima. Negdje oko 1515. (ili čak ranije, 1506.) dal Ferro je prvi otkrio algebarski postupak za rješavanje kubne jednadžbe oblika

$$x^3 + ax = b, \quad \text{gdje su } a, b > 0. \quad (1)$$

Ovdje valja reći da dal Ferro nije objavio svoje okriće. Štoviše, uopće nemamo njegovih sačuvanih djela. Dal Ferrov postupak nije bio neobičan za to doba. Naime, tada su postojala svojevrsna matematička natjecanja, često nazivana matematički dvoboji, i pobjeda na njima donosila je stručni prestiž koji je osiguravao i profesorsku poziciju.

Opišimo osnovnu ideju dal Ferrovog postupka. Pritom, imajmo na umu da ni dal Ferro ni njegovi suvremenici, koje ćemo kanije spominjati, nisu koristili današnju simboliku. Tek je 1489. češki matematičar Jan Widmann prvi uveo znakove “+” i “-” čime je postavio osnove algebarske simbolike. Ne znamo kako je dal Ferro zapisivao svoje izraze, ali se vjerojatno nisu puno razlikovali od sljedećih, današnjem čitatelju teško razumljivih i ponekad gotovo zastrašujućih primjera. Tako kod već spomenutoga Cardana nalazimo 1. quad. p. 2. pos. aeq. 48., što se suvremenim simbolima zapisuje kao $x^2 + 2x = 48$, jednadžbu $x^5 + 6x^3 = 80$ je zapisao u obliku: $r. p^m \tilde{p}. 6. cub = 80$ (praznina u tekstu znači jednakost).

Vratimo se jednadžbi (1). Pretpostavimo da umjesto x uvrstimo $u-v$. Tada dobivamo

$$(u-v)^3 + a(u-v) = b$$

odnosno,

$$u^3 - v^3 - 3uv(u-v) + a(u-v) = b.$$

Ako je $uv = \frac{a}{3}$, izraz postaje $u^3 - v^3 = b$. Sada imamo $u^3 v^3 = \frac{a^3}{27}$ i $u^3 - v^3 = b$. Zadaća nalaženja dvaju brojeva $p = u^3$ i $q = v^3$ čiji su umnožak i razlika poznati, svodi se na rješavanje kvadratne jednadžbe. Naime, brojevi p i $-q$ za koje je $p - q = p + (-q) = b$ i $p \cdot (-q) = -\frac{a}{27}$ su rješenja kvadratne jednadžbe $y^2 - by - \frac{a}{27} = 0$,

$$p = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}, \quad -q = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}.$$

Odatle je

$$u = \sqrt[3]{p} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Rješenje jednadžbe (1) dano je s

$$x = u - v = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Napomenimo da se u vrijeme o kojem govorimo nije računalo s negativnim brojevima. Tako se jednadžba

$$x^3 = ax + b, \quad \text{gdje su } a, b > 0, \quad (2)$$

smatrala sasvim drugim problemom od jednadžbe (1).

Kasnije je Tartaglia, riješio i jednadžbu (2), tražeći rješenje u obliku $x = u + v$. Uvrštavanjem u jednadžbu (2) dobivamo $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = a(u+v) + b$. Tražimo brojeve u i v takve da $u^3 + v^3 = b$ i $uv = \frac{a}{3}$. Neka je $p = u^3$ i $q = v^3$. Brojevi p i q

su rješenja kvadratne jednadžbe $y^2 - by + \frac{a^3}{27} = 0$. Odатле је

$$u = \sqrt[3]{p} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} \quad \text{i} \quad v = \sqrt[3]{q} = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}.$$

Prema томе, рјешење jednadžbe (2) је

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}.$$

Slično је riješio и трећи tip kubne jednadžbe

$$x^3 + b = ax, \quad \text{gdje su } a, b > 0. \quad (3)$$

Веза међу jednadžama (2) i (3) је у томе да је pozitivan коријен једне од њих jednak apsolutnoj vrijednosti negativног коријена друге.

Detalji opisanог поступка и uvjeti постојanja realnih rješenja izlaze iz okvira овог povijesnog prikaza i zainteresiranom читателју препоручујемо неки од standardnih priručnika³.

Vratimo se našim povijesnim zbivanjima. Dal Ferro je svoje rezultate pohranio u posebnu bilježnicu i otkriće је povjerio тек једном од svoјих ученика, Antoniju Fioru te зету Hannibalu Nave koji ће га наслијediti на кatedри у Bologni.

Antonio Fior bio је математичар осредnjih sposobnosti. Odlučio је искористити повјерену му тајну кубне jednadžbe. Izazvao је, тада већ познатог, Nicolu из Brescije, званог Tartaglia, на математички dvoboј. Овај потонji заслужио је да о њему kažemo коју ријеч više.



Oko 1500. године, у Bresciji, у обitelji Fontana, родио се sin Niccolо. Ostao је bez oca, скромног достављача пошиљака (претећа данашње поштанске služбе) у својој шестој години. Majka ga је željela školovati, ali se обiteljska uštедевина brzo istopila i Nicola је napustio redovito školovanje приje nego što je savladao cijelu abecedu, tako да nije naučio napisati ni svoje prezime. Ipak, nastavio је образовање као samouk. U dobi od 12 година, за vrijeme francuske opsade grada Brescije, teško је ranjen. Duboki ožiljak blizu čeljusti, који је nosio čitav живот i skrивao га брадом, otežavaо mu је normalan говор. Odатле му и nadимак Tartaglia ("mucavac"). Čini се да му судбина и иначе nije bila sklona. Jedno je vrijeme pohađao Sveučilište u Padovi, pokazujući posebnu склоност математици. Kasnije је poučавао aritmetiku, као magister abaci, на разним trgovачким učilištima, а од 1534. i u Veneciji. Bavio се и balistikom. Pokazao је да је trajektorija tijela pri kosom hicu uvijek zakrivljena krivulja, а не pravac i да је највећи досег при kutu izbacivanja од 45° . Osim тога, Tartaglia је 1543. objavio latinski prijevod Arhimedovih spisa i talijanski prijevod Euklidovih *Elementa*.

Kako poučavanje математике nije bio dovoljno unosan posao, sudjelovaо је и на javnim matematičkim sučeljavanjima. Nakon што је Tartaglia obznanio да zna rješiti jednadžbe oblika $x^3 + bx^2 = d$, дошло је 1535. do njegovog dvobaја s već spomenутим Antoniom Fiorom. Pred sam istek vremena које су suparnici имали за rješavanje postavljenih problema, 13. veljače 1535. Tartaglia је самостално открио поступак за rješavanje kubne jednadžbe oblika $x^3 + ax = b$, tako да је за два sata riješio sve

³ Boris Pavković, Darko Veljan, *Elementarna matematika I*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

Fiorove zadatke i pobijedio. Vijest o Tartagliinom uspjehu brzo se proširila i do trećeg i najzanimljivijeg junaka ove priče, Girolama Cardana. Ova životopisna ličnost zaslužuje našu pažnju.

Girolamo Cardano je rođen 24. rujna 1501. u Paviji, kamo mu se majka sklonila pred kugom, kao nezakoniti sin milanskog pravnika Fazia Cardana, čovjeka široke naobrazbe, koji je priateljevao i s Leonardom da Vincijem, a bio je izvrsno upućen u matematiku. Prve pouke u matematici Girolamo je dobio baš od svog oca. S početka je Girolamo pomagao ocu, no s vremenom je zaželio ostvariti samostalnu karijeru i upisao je studij medicine na Paviji, te ga nastavio u Padovi, gdje je još kao student izabran za rektora sveučilišta. Nakon što je postigao doktorat medicine, liječničku praksu nastavlja u manjim mjestima jer ga liječnički kolegij u Miljanu nije htio primiti u svoje redove usprkos tome što je bio izvrstan student jer je već tada imao glas osobе teške, čak i agresivne naravi, koja bez okolišanja iznosi svoja, često nekonvencionalna mišljenja. K tome je bio sklon kockanju pa će među 200 njegovih radova iz raznih područja biti i onaj u kojima prvi razmatra pitanja iz područja vjerojatnosti. S vremenom, upornim radom i prirodnim darom, postaje uspješan liječnik velikoga ugleda. Kasnije će biti na čelu liječničkog kolegija, koji ga je u mladosti odbio. Zanimljivo je da ga, kao druge liječnike njegova doba, nisu zanimala anatomska istraživanja, već je prije bio sjajan dijagnostičar. Nimalo skroman, Cardano sebe uspoređuje s najvećim liječnicima u povijesti: Hipokratom, Galenom i Avicenom. I doista, slava mu je bila velika. Pozivi u službu dolazili su sa svih strana. Cardano otklanja papin poziv te i onaj danskoga kralja. Potonji mu nudi bogatu plaću, ali Cardanu se ne dopada sjeverna klima, niti želi živjeti u nekatoličkoj državi. Ipak, 1552. prihvata poziv nadbiskupa Johna Hamiltona i odlazi u Škotsku. Uspješno izlječenje teško oboljelog nadbiskupa, te putovanje Francuskom i Njemačkom gdje susreće znanstvenu elitu, još više povećavaju Cardanovu slavu. Energija i širina interesa su mu bili nevjerojatni. On stiže proučavati matematiku, baviti se astrologijom, tada legitimnom znanstvenom disciplinom, filozofijom i glazbom, hidrodinamikom i mehanikom. Tako je izumio osovinu i zglob, koji se i danas naziva po njemu, kako bi caru Karlu V., za njegova posjeta Miljanu, učinio udobnijim putovanje kolima. I danas suvremena vozila koriste *kardanski zglob*. Potkraj života, Cardano prihvata profesuru medicine u Bologni. Događa se da ljudi s uspješnim vezama i moćnim zaštitnicima, steknu iste takve protivnike. U to je vrijeme za osobne obraćune znala poslužiti i inkvizicija. Cardano je 1570. uhićen zbog heretičkog mišljenja i zabranjeno mu je predavati, ali mu je uskoro dopušten odlazak u Rim. Međutim, tamo Cardano nalazi zaštitu. Papa Grgur XIII., onaj isti koji je proveo reformu kalendara, dodjeljuje mu doživotnu mirovinu i Cardano umire u Vječnom gradu 21. rujna 1576. Možda ništa drugo ne opisuje Cardana tako dobro, kao legenda da je, sklon okultizmu i iskreno uvjeren u svoje posebne sposobnosti, počinio samoubojstvo kako bi potvrdio vlastito predskazanje o danu svoje smrti...



Uz sav njegov buran život, bogatu liječničku praksu i obiteljske neprilike koje su ga pratile cijelog života, Cardano se stigao strastveno i uporno baviti matematikom. Kad je doznao za Tartagliin uspjeh u duelu s Fiorom, žarko je želio saznati postupak rješavanja kubne jednadžbe. Nakon više neuspješnih pokušaja ipak mu uspije privoljeti Tartagliu da ga posjeti nudeći mu pomoć u pristupu uplivnim krugovima u Miljanu. Već smo spomenuli Tartagliin interes za balistiku i vojne znanosti, tako da mu se ta mogućnost činila korisnom. Sastali su se 25. ožujka 1539. u Cardanovu domu u Miljanu. Cardano je svečano prisegnuo (*kao pravi kršćanin*) da neće objelodaniti metodu za rješavanje kubnih jednadžbi sve dok je sam Tartaglia ne objavi u svojoj knjizi. Tartaglia pristaje.

Svoje otkriće priopćava Cardanu i to u stihovima, kako bi se lakše upamtili. Već smo rekli da o pravoj matematičkoj simbolici još nema ni govora.

No, nekoliko godina kasnije Cardano je, zajedno sa svojim učenikom, Ludovicom Ferrarijem, počeo pripremati svoje kapitalno djelo *Ars magna*. Recimo najprije nešto i o Ferrariju, četvrtom junaku ove naše priče. Rođen je 1522. u Bologni. S četrnaest godina ostao je siroče, bez školske naobrazbe. Igrom slučaja počeo je pomagati Cardanu u kućanskim poslovima. Uvidjevši mladićevu bistrinu, Cardano ga je sam poučavao latinskom i grčkom jeziku te matematici. Tako je Ferrari od sluge postao tajnik i učenik, a s vremenom vrijedan i pouzdan Cardanov suradnik. Kasnije će Ferrari završiti i formalno obrazovanje postignućem doktorata filozofije u Bologni, gdje će od 1564. do smrti 1565. predavati matematiku. Treba li reći da je i Ferrari bio čovjek višestrukih interesa i različitih sposobnosti? Osim matematikom, uspješno se bavio geografijom i astronomijom. O Ferrarijevom ugledu govori i ponuda cara Karla V. da bude učiteljem njegovu sinu.

Između 1540. i 1542. Cardano je zapustio svoj znanstveni rad i vratio se starom poruku, kockao je i igrao šah. U to je vrijeme Ferrari, na osnovi Tartagliine metode, otkrio postupak za rješavanje opće kubne jednadžbe $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ te jednadžbe četvrtog stupnja, svodeći je na rješavanje kubne jednadžbe. Nekako u to vrijeme Cardano i Ferrari upoznali su već spomenutog Hannibala Nave i od njega će saznati za dal Ferrovo otkriće. Obojica putuju 1543. u Bolognu gdje pregledavaju dal Ferrove rukopise. Uvjereni da prvenstvo otkrića postupka za rješavanje kubne jednadžbe ne pripada Tartagliji, drže da nisu više obvezni poštovati zakletvu iz 1539. Tako je metoda za rješavanje kubne jednadžbe te jednadžbe četvrtog stupnja uvrštena u Cardanovu knjigu. *Ars magna* postaje prava *uspješnica* i danas je držimo prvim udžbenikom algebre. Čak i formule nazivamo prema Cardanu... Tartaglia se osjetio prevarenim. Optužio ih je za vjerolomstvo. Objavio je 1546. rad *Quesiti et inventioni diverse*. Sukob se sve više rasplamsava tako da 10. kolovoza 1548. dolazi do javnog sučeljavanja Tartaglie i Ferrarija. Čudno je da Tartaglia prihvaća Ferrarija kao osobu s kojom će javno raspravljati jer u to vrijeme ovaj nema ugled dostojan jednog Tartaglie. Danas je teško zamisliti predstavu koja se tamo odvijala. U prepunoj dvorani, uz mnoštvo građana sjede poznate ličnosti predvodene samim guvernerom Milana. Ferrarijeve pristaše su u većini, a Tartagliju prati samo njegov brat. Ferrari, iako mlad i bez iskustva u sličnim prigodama, odnosi pobedu. Vjerojatno je tome pripomogao Tartagliin žučan nastup i teško izgovaranje riječi. I samom Tartagliji je bilo jasno da gubi pa je prije dovršenja rasprave napustio Milano. Posljedice ovoga svojevrsnog dvoboja osjećat će obojica, iako posve različito. Ferrari je stekao veliki ugled. Sam guverner Milana mu osigurava unosan posao, a ponude dolaze sa svih strana. Tako i ona već spomenuta careva. Sve je to omogućilo Ferrariju da kao mlad čovjek stekne velik imetak. Doduše, neki su govorili da nije umro prirodnom smrću već da ga je otrovala vlastita sestra kako bi naslijedila njegovo bogatstvo.

Tartagliina sudbina bila je potpuno drugačija. Ponude za profesorsko namještenje, dobivene ranije, sada se otkazuju. Od poraza se nije oporavio i do smrti nije oprostio Cardanu. Umro je u siromaštvu 13. prosinca 1557.

Kliko sve ovo navedeno odgovara povijesnoj istini, danas je teško prosuditi jer se mnoga zbivanja rekonstruiraju prema Ferrarijevim opisima, a njega, poradi bliskosti s Cardanom ne možemo bezuvjetno prihvati kao potpuno objektivna svjedoka.

Kako su se stvari, glede algebarskih jednadžbi višeg stupnja, razvijale poslije? Danas kažemo da je jednadžba rješiva pomoću radikalna ako postoji formula za računanje korijena jednadžbe pomoću konačno mnogo osnovnih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) i korjenovanja na koeficijentima jednadžbe. Norveški matematičar

Niels Henrik Abel (1802.–1829.) dokazao je 1826. (dakle, kao mladić od samo 24 godine) da za svaki $n \geq 5$ postoji algebarska jednadžba n -tog stupnja koja nije rješiva pomoću radikala. Naša priča počinje dvobojima, a na žalost njima i završava. Jedan mladi i iznimno daroviti matematičar, Évariste Galois (1811.–1832.) dao je odgovor na pitanje kad je algebarska jednadžba rješiva pomoću radikala. Ovaj genijalni matematičar umro je smrtno ranjen u dvoboju, ovog puta zaista pravom.

O Cardanu i njegovoj knjizi mogli bismo još govoriti. Zanimljivo je da se u *Ars Magni* prvi put javljaju kompleksni brojevi. Naime, Cardano je pokušao riješiti problem nalaženja dvaju brojeva čiji je zbroj 10, a umnožak 40. Zadaća se svodi na rješavanje kvadratne jednadžbe $x^2 - 10x + 40 = 0$, čija su rješenja $5 \pm \sqrt{-15}$. Kvadratni korijen iz negativnog broja zbirno je Cardana. Dobiveni rezultat mu se činio neobjasnivim i beskorisnim. Međutim, kad je primijenio postupak za rješavanje kubne jednadžbe na primjeru $x^3 = 15x + 4$, za koji je utvrdio da ima tri realna rješenja, dobio je opet izraz s drugim korijenima iz negativnog broja. Sad već ove slučajevе nije mogao zanemariti, ali ih nije znao niti objasniti. Dakle, kompleksni brojevi se prvi put u matematici ne pojavljuju pri rješavanju kvadratne jednadžbe, kako ih obično uvodimo u srednjoj školi, već pri rješavanju kubne jednadžbe. Sistematsko računanje s kompleksnim brojevima su kasnije opisali drugi matematičari.

O Cardanu se pisalo vrlo kritično, ali i s divljenjem. Citirajmo Gottfrieda Wilhelma Leibniza, još jednog svestranog znanstvenika, koji je za Cardana rekao da je bio velik čovjek, usproks svim svojim nedostatcima, a bez njih bio bi savršen.

U vrijeme Cardanovog predavanja u Bologni, tamo je djelovao i Hrvatsko-ugarski kolegij, dom za studente iz Hrvatske i Ugarske koji su se školovali u Bologni. Nepuna dva stoljeća kasnije, pitomac tog kolegija bit će Mihovil Šilobod Bolšić, autor prve hrvatske računice. Bilo bi zanimljivo znati je li netko od hrvatskih studenata pohađao Cardanova predavanja ili na drugi način bio u doticaju s njim. Ali, to bi već bila neka druga priča.