Jedno svojstvo Pascalovog trokuta

Neven Jurić[1]

Pascalov trokut

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
\ldots
\end{array}
$$

[1] Autor je dipl. inž. matematike i dizajner, e-pošta: `neven.juric@apis-it.hr`

ima mnoga zanimljiva svojstva. Npr. element $C(6,3)=20$ okružen je elementima 10, 10, 15, 15, 35, 35. Umnožak tih elemenata je kvadratni broj $(10\cdot 15\cdot 35)^2=5250^2$.

Element $C(7,3)=35$ je okružen elementima 15, 20, 21, 35, 56, 70 i njihov umnožak je $15\cdot 20\cdot 21\cdot 35\cdot 56\cdot 70=(29\,400)^2$.

Element $C(8,5)=56$ je okružen elementima 35, 21, 70, 28, 126, 84 i njihov umnožak je $35\cdot 21\cdot 70\cdot 28\cdot 126\cdot 84=(123\,480)^2$.

Postavlja se pitanje da li svaka šestorka binomnih koeficijenata, koji okružuju neki element Pascalovog trokuta, ima svojstvo da je njihov umnožak kvadrat prirodnog broja?

Da bismo odgovorili na to pitanje, za binomni koeficijent $C(n,k)$ promotrimo njegovih šest susjeda.

Lijevo od $C(n,k)$ se nalazi $C(n,k-1)$, a desno od $C(n,k)$ se nalazi $C(n,k+1)$.

Između $C(n,k-1)$ i $C(n,k)$ u nižem redu se prema svojstvu Pascalovog trokuta nalazi binomni koeficijent $C(n,k-1)+C(n,k)=C(n+1,k)$. Analogno se između $C(n,k)$ i $C(n,k+1)$ u nižem redu nalazi binomni koeficijent $C(n,k)+C(n,k+1)=C(n+1,k+1)$.

Također se iz svojstva binomnih koeficijenata zaključuje da su dva gornja elementa spomenute šestorke binomni koeficijenti $C(n-1,k-1)$ i $C(n-1,k)$.

Umnožak ovih šest binomnih koeficijenata jednak je

$$C(n-1,k-1)C(n-1,k)C(n,k-1)C(n,k+1)C(n+1,k)C(n+1,k+1),$$

Ili izražen faktorijelima

$$\frac{(n-1)!(n-1)!n!n!(n+1)!(n+1)!}{(k-1)!(n-k)!k!(n-k-1)!(k-1)!(n-k+1)!(k+1)!(n-k-1)!k!(n-k+1)!(k+1)!(n-k)!}$$

odakle je vidljivo da se i u općenitom slučaju radi o kvadratu prirodnog broja, s obzirom da se svaki element oblika $x!$ u brojniku i nazivniku pojavljuje dva puta. Ovaj broj je kvadrat broja

$$\frac{(n+1)!n!(n-1)!}{k!(n-k+1)!(k+1)!(n-k-1)!(k-1)!(n-k)!}$$

i to je umnožak tri binomna koeficijenta: $C(n+1,k)$, $C(n,k+1)$, $C(n-1,k-1)$.

Provjerimo ovaj rezultat na tri gornja primjera funkcijom definiranom sa

$$\varphi(n,k)=C(n+1,k)C(n,k+1)C(n-1,k-1).$$

Element $C(6,3)=20$ je okružen elementima čiji je umnožak jednak 5250^2. S druge strane vrijedi

$$\begin{aligned}\varphi(6,3)&=C(6+1,3)C(6,3+1)C(6-1,3-1)\\&=C(7,3)C(6,4)C(5,2)\\&=35\cdot 15\cdot 10=5250.\end{aligned}$$

Element $C(7,3)=35$ je okružen elementima čiji je umnožak jednak $29\,400^2$, dok je

$$\begin{aligned}\varphi(7,3)&=C(7+1,3)C(7,3+1)C(7-1,3-1)\\&=C(8,3)C(7,4)C(6,2)\\&=56\cdot 35\cdot 15=29\,400.\end{aligned}$$

Element $C(8,5)=56$ je okružen elementima čiji je umnožak jednak $123\,480^2$, a

$$\begin{aligned}\varphi(8,5)&=C(8+1,5)C(8,5+1)C(8-1,5-1)\\&=C(9,5)C(8,6)C(7,4)\\&=126\cdot 28\cdot 35=123\,480.\end{aligned}$$