ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2012. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/ 250.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 286.

A) Zadaci iz matematike

3317. Nađi najveći cijeli broj n takav da su $n+496$ i $n+224$ potpuni kvadrati.

3318. Dana su tri realna broja x, y, z takva da je

$$\frac{x-y}{2+xy}+\frac{y-z}{2+yz}+\frac{z-x}{2+zx}=0.$$

Dokaži da su barem dva od ta tri broja međusobno jednaka.

3319. Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ niz realnih brojeva takav da vrijedi

$$a_{n+1}\geq a_n^2+\frac{1}{5},\quad n\geq 0.$$

Dokaži da je $a_{n+5}\geq a_n^2$, za $n\geq 0$.

3320. Neka su a, b, x, y, realni brojevi takvi da vrijedi:

$$\begin{aligned} ax+by&=3,\\ ax^2+by^2&=7,\\ ax^3+by^3&=16,\\ ax^4+by^4&=42. \end{aligned}$$

Odredi vrijednost od ax^5+by^5.

3321. Jednakostranični trokuti ABE i BCF konstruirani su na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ s vanjske strane paralelograma $ABCD$. Dokaži da je trokut DEF jednakostraničan.

3322. U trokutu ADE je $\sphericalangle AED=120^\circ$, B i C su točke na stranici AD tako da je BCE jednakostraničan trokut. Ako je $|AB|=4$ cm i $|CD|=16$ cm, koliko je $|BC|$?

3323. Pokaži da unutrašnjosti konačno mnogo parabola u ravnini ne mogu pokriti cijelu tu ravninu.

3324. Duljine stranica trokuta su a, b, c, a nasuprotni kutovi α, β, γ. Ako je $a^2=b(b+c)$, dokaži da je $\alpha=2\beta$.

3325. Točke E, F su polovišta dijagonala $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$. Ako je G polovište dužine $\overline{EF}$ i P bilo koja točka ravnine tog četverokuta, dokaži jednakost

$$|AP|^2+|BP|^2+|CP|^2+|DP|^2$$
$$=|AG|^2+|BG|^2+|CG|^2+|DG|^2+4|PG|^2.$$

3326. Odredi $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n+1})|$.

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 342. Za kupanje u kadi Manda potroši 150 litara vode temperature $40\,^\circ$C, a za tuširanje 30 litara vode iste temperature. Temperatura vode u vodovodu je 18 stupnjeva i zagrijava se u električnom bojleru. Cijena jednog kilovatsata električne energije je 0.93 kune, a kubnog metra vode 11.9 kuna. Koliko kuna Manda manje potroši kad se tušira?

OŠ – 343. Tsunami koji je prošle godine izazvao havariju nuklearne elektrane Fukushima 1, jedne od 25 najvećih nuklearnih elektrana na svijetu, nastao je u potresu kojem je epicentar bio u moru na udaljenosti 130 kilometara od Japana. Tsunami je putovao prosječnom brzinom od oko 350 kilometara na sat. U potresima nastaju 4 vrste valova od kojih su najbrži longitudinalni koji putuju brzinama od 1 do 14 km/ s. Pretpostavimo da im je brzina u tom potresu bila 5 km/ s. Koliko je vremena prošlo otkad se tlo prvi put zatreslo do dolaska tsunamija?

OŠ – 344. Usporedi prosječnu gustoću Zemlje kojoj je srednji polumjer 6371 km, a masa $5.98\cdot10^{24}$ kg i Saturna kojem je srednji polumjer 58 232 km, a masa $5.68\cdot10^{26}$ kg. Pretpostavi da su ova svemirska tijela oblika kugle.

OŠ – 345. Marija i Iva trče na dionici od 10 kilometara. Marija trči brzinom 10 km/ h, a Iva sporije. Iva je krenula 10 minuta ranije. Izračunaj Ivinu brzinu i udaljenost od cilja na kojoj ju je Marija prestigla ako je Marija u cilj ušla 10 minuta prije nje.

1504. Četiri otpornika od $10\ \Omega$, $20\ \Omega$, $30\ \Omega$ i $40\ \Omega$ spojeni su tako da je ukupan otpor $10\ \Omega$. Ako spoj priključimo na naponski izvor takav da ukupna oslobođena snaga iznosi 96 W, kolika je snaga otpornika od $10\ \Omega$?

1505. Prirodni kalij sadrži 0.0117% radioaktivnog ^{40}K, vremena poluživota 1.25 milijardi godina. Kolika je aktivnost (broj raspada u sekundi) 100 grama kalija? Atomska težina kalija je 39.1 g/ mol.

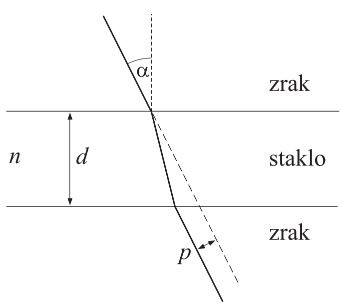
1506. Kolica se spuštaju jednolikom brzinom 2 m/ s niz kosinu nagiba 8°. Na dnu kosine, kolica se nastave gibati vodoravno, po istoj vrsti podloge. Odredi koeficijent trenja i zaustavni put koji kolica prevale po vodoravnoj podlozi.

1507. Saturnovi prsteni kruže oko planete na udaljenosti od 67 000 do 480 000 km od središta. Ako je najbrže ophodno vrijeme materijala prstena 294.5 minuta, odredi masu planeta te najmanju i najveću brzinu kruženja prstenova.

1508. Elektron kruži u homogenom magnetskom polju frekvencijom 100 Mhz. Kolika je jakost polja? Koliki je radijus kruženja, ako je kinetička energija elektrona $8 \cdot 10^{-18}$ J?

1509. Dalekovidna osoba ne vidi jasno predmete bliže oku od 75 cm. Odredi jakost leća naočala koje omogućuju toj osobi jasno čitanje teksta na udaljenosti 23 cm od oka.

1510. Koliki je otklon (p) zraka svjetlosti koje upadaju na ravno staklo debljine $d = 30$ mm indeksa loma $n = 1.55$ pod kutem $\alpha = 25^\circ$ u odnosu na okomicu (vidi sliku)?



C) Rješenja iz matematike

3297. *Dano je $n+1$ pozitivnih cijelih brojeva čiji je zbroj jednak $3n$ i oni su poredani u krug. Dokaži da postoji nekoliko uzastopnih brojeva čiji je zbroj jednak $2n$.*

Rješenje. Zadatak možemo preformulirati na način da je potrebno naći nekoliko uzastopnih brojeva čiji je zbroj jednak n, jer u tom slučaju ostali brojevi su uzastopni i imaju zbroj $3n - n = 2n$.

Označimo brojeve a_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Označimo sume na sljedeći način:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ S_{n+1} &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Očigledno je $S_k > S_t$, za $k > t$.

Budući da imamo $n+1$ suma različitih elemenata, a po modulu n imamo n mogućih ostataka, to prema Dirichletovom principu postoje dvije sume koje daju isti ostatak po modulu n.

Neka su te dvije sume S_k i S_t. Imamo $S_k - S_t \equiv 0 \pmod n$. Pošto je $S_k > S_t$, razlika ne može biti nula i djeljiva je s n, tj. može biti n ili $2n$. Primijetimo da oduzimanjem S_k i S_t ostaju članovi: $a_{t+1} + \ldots + a_{k-1} + a_k$, koji su uzastopni i čiji je zbroj jednak ili n ili $2n$. U oba slučaja imamo traženo rješenje.

Hamza Merzić (4), Prva Bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BiH

3298. *Neka su a, b, c, d pozitivni cijeli brojevi takvi da je $cd = 1$. Dokaži da postoji cijeli broj n takav da vrijedi*

$$ab \le n^2 \le (a+c)(b+d).$$

Rješenje. Dovoljno je pokazati da je

$$\sqrt{ab} + 1 \leqslant \sqrt{(a+c)(b+d)}.$$

Kvadriranjem obiju strana i sređivanjem vidimo da je ova nejednakost ekvivalentna s

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{bc+ad}{2}.$$

Kako je

$$\frac{bc+ad}{2} \geqslant \sqrt{abcd} \geqslant \sqrt{ab},$$

dokaz je završen.

Hamza Merzić (4), Sarajevo, BiH

3299. *Realni brojevi* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *zadovoljavaju jednakost* $4(b_1+b_2+\ldots+b_n) = a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_na_1$. *Dokaži da barem jedna od sljedećih kvadratnih jednadžbi*

$$x^2 + a_kx + b_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

ima realna rješenja.

Rješenje. Treba dokazati da postoji $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je

$$a_k^2 - 4b_k \geqslant 0.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$a_k^2 - 4b_k < 0 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Tada je

$$4(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) > a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{2} + \ldots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{2}$$

$$\geqslant a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1,$$

što je u suprotnosti s danom jednakošću.

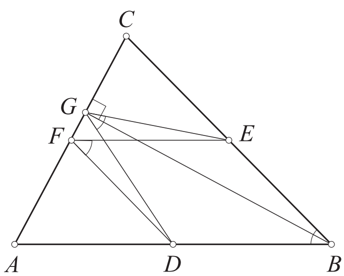
Rijad Muminović (2),
Druga gimnazija, Sarajevo, BiH

3300. *Točke* D, E, F *su polovišta stranica* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ *trokuta* ABC. *Ako je* $\overline{BG}$ *visina trokuta na stranicu* $\overline{AC}$ *dokaži da je* $\measuredangle EGD = \measuredangle EFD$.

Rješenje. Kako su D i F polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ vrijedi:

$$DF \| BC \quad \text{i} \quad |DF| = \frac{1}{2}|BC|, \quad \text{tj.}$$

$$DF \| BE \quad \text{i} \quad |DF| = |BE|.$$



Dakle, $BEFD$ je paralelogram pa je $\measuredangle EFD = \measuredangle DBE$.

Trokut BCG je pravokutan s pravim kutom u vrhu G, a E je polovište hipotenuze $\overline{BC}$. Zato je $|EG| = |BE|$ pa je $\measuredangle EGB = \measuredangle GBE$. Na sličan način se dobije $\measuredangle BGD = \measuredangle DBG$. Dakle, $\measuredangle EGB = \measuredangle DBE = \measuredangle EFD$.

Rijad Muminović (2), Sarajevo, BiH

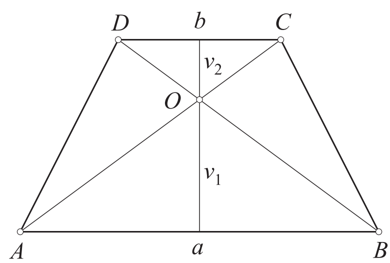
3301. *Neka je* P *površina jednakokračnog trapeza* $ABCD$, $AB \| CD$, $O = AC \cap BD$, $|AB| = a$, $|CD| = b$, $a > b$. *Ako je površina trokuta* BOC *jednaka* $\frac{2P}{9}$, *koliko je* $\frac{a}{b}$*?*

Rješenje. Površina trapeza je

$$P = \frac{a+b}{2}(v_1 + v_2),$$

$$P_{ABO} = \frac{av_1}{2}, \qquad P_{CDO} = \frac{bv_2}{2},$$

$$P_{BOC} = P_{DOA} = \frac{2P}{9}.$$



Imamo

$$P_{ABO} + P_{CDO} = P - 2P_{BOC},$$

$$P_{ABO} + P_{CDO} = \frac{5}{9}P,$$

$$\frac{av_1}{2} + \frac{bv_2}{2} = \frac{5}{9} \cdot \frac{a+b}{2}(v_1 + v_2) \Big/ \cdot \frac{2}{v_2}$$

$$a\frac{v_1}{v_2} + b = \frac{5}{9}(a+b)\left(\frac{v_1}{v_2} + 1\right).$$

Kako su $\triangle ABO$ i $\triangle CDO$ slični dobivamo $\frac{v_1}{v_2} = \frac{a}{b}$ pa je

$$a \cdot \frac{a}{b} + b = \frac{5}{9}(a+b)\left(\frac{a}{b} + 1\right) \ / \ \cdot b$$

$$a^2 + b^2 = \frac{5}{9}(a^2 + b^2 + 2ab)$$

$$2(a^2+b^2)=5ab \ / \ :ab$$
$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=5.$$

Supstitucijom $t=\dfrac{a}{b}>1$ imamo

$$2\left(t+\frac{1}{t}\right)=5,$$
$$2t^2-5t+2=0,$$
$$t_1=2, \qquad t_2=\frac{1}{2}.$$

Kako je $a>b$ tj. $t>1$ dobivamo $\dfrac{a}{b}=t=2$.

Besim Arnautović (2), Druga gimnazija, Sarajevo, BiH

3302. *Dane su četiri točke* A, B, C, D. *Odredi točku* M *tako da veličina*

$$|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+|MD|^2$$

bude minimalna.

Rješenje. Radijus vektore točaka A, B, C, D označimo s $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$, $\vec{r}_D$. Sada imamo

$$|MA|^2=(\vec{r}_A-\vec{r}_M)^2=\vec{r}_A^{\,2}+\vec{r}_M^{\,2}-2\vec{r}_A\vec{r}_M$$
$$|MB|^2=(\vec{r}_B-\vec{r}_M)^2=\vec{r}_B^{\,2}+\vec{r}_M^{\,2}-2\vec{r}_B\vec{r}_M$$
$$|MC|^2=(\vec{r}_C-\vec{r}_M)^2=\vec{r}_C^{\,2}+\vec{r}_M^{\,2}-2\vec{r}_C\vec{r}_M$$
$$\underline{|MD|^2=(\vec{r}_D-\vec{r}_M)^2=\vec{r}_D^{\,2}+\vec{r}_M^{\,2}-2\vec{r}_D\vec{r}_M}$$
$$\begin{aligned}&|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+|MD|^2\\
&=4\vec{r}_M^{\,2}-2\vec{r}_M(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D)\\
&\quad+\vec{r}_A^{\,2}+\vec{r}_B^{\,2}+\vec{r}_C^{\,2}+\vec{r}_D^{\,2}\\
&=\left(2\vec{r}_M-\frac{1}{2}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D)\right)^2\\
&\quad-\frac{1}{4}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D)^2\\
&\quad+\vec{r}_A^{\,2}+\vec{r}_B^{\,2}+\vec{r}_C^{\,2}+\vec{r}_D^{\,2}\end{aligned}$$

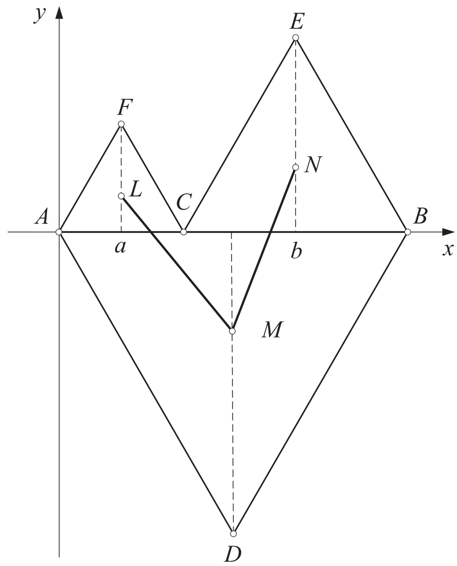
Minimum se postiže za

$$\vec{r}_M=\frac{1}{4}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C+\vec{r}_D).$$

Hamza Merzić (4), Sarajevo, BiH

3303. *Unutar dužine* $\overline{AB}$ *dana je točka* C. *Nad dužinama* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ *konstruirani su jednakostranični trokuti* ABD, BCE, ACF *tako da su dva manja i najveći među njima s raznih strana pravca* AB. *Ako su* M, N, L *redom središta upisanih kružnica tih trokuta, dokaži da je* $|MN|=|ML|$.

Rješenje. Ovo je primjer zadatka koji se rješava i analitičkom geometrijom.



Postavimo dužinu $\overline{AB}$ u koordinatnu ravninu na x-os tako da je A koordinatno ishodište.

Označimo s a, b i $a+b$ duljine stranica trokuta ACF, BCE i ABD, tim redom.

Koordinate središta opisanih kružnica su $N\left(a+\dfrac{b}{2}, \dfrac{b\sqrt{3}}{6}\right)$, $L\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ i $M\left(\dfrac{a+b}{2}, -\dfrac{(a+b)\sqrt{3}}{6}\right)$. Imamo,

$$|MN|^2=\left(a+\frac{b}{2}-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{3}}{6}+\frac{(a+b)\sqrt{3}}{6}\right)^2$$
$$=\frac{a^2}{4}+\frac{(a+2b)^2}{12}=\frac{a^2+b^2+ab}{3},$$
$$|ML|^2=\left(\frac{a}{2}-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}+\frac{(a+b)\sqrt{3}}{6}\right)^2$$
$$=\frac{b^2}{4}+\frac{(2a+b)^2}{12}=\frac{a^2+b^2+ab}{3}.$$

Slijedi, $|MN|=|ML|$.

Hamza Merzić (4), Sarajevo, BiH

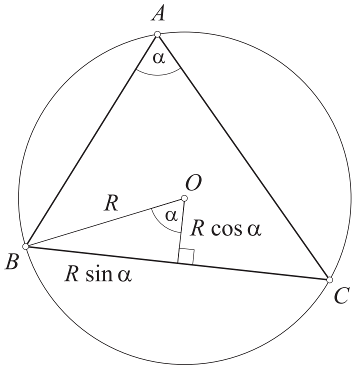
3304. *Kutovi trokuta su* α, β, γ, *a polumjeri opisane i upisane kružnice* R *i* r.

Dokaži jednakost

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=\frac{r}{R}.$$

Rješenje.

$$\frac{r}{R}=\frac{4rP}{4RP}=\frac{4r^2s}{abc}=\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$$



$$\begin{aligned}s-a&=\frac{1}{2}(b+c-a)=R(\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha)\\&=R\left(2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\\&=2R\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\\&=4R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\end{aligned}$$

i analogno

$$s-b=4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$s-c=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Dobivamo

$$\begin{aligned}&(s-a)(s-b)(s-c)\\&=64R^3\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Nadalje

$$a=2R\sin\alpha=4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$b=4R\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

$$c=4R\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

pa je

$$abc=64R^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Sada imamo

$$\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\quad \text{i}$$

$$\frac{r}{R}=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Konačno je

$$\begin{aligned}&\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\\&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}\\&=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\&=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

Rijad Muminović (2), Sarajevo, BiH

3305. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta i α, β, γ nasuprotni mu kutovi, dokaži jednakost*

$$\begin{aligned}&a(1+2\cos2\alpha)\cos3\beta+b(1+2\cos2\beta)\cos3\alpha\\&=c(1+2\cos2\gamma).\end{aligned}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}&a(1+2\cos2\alpha)\cos3\beta+b(1+2\cos2\beta)\cos3\alpha\\&=c(1+2\cos2\gamma)\iff\\&2R\sin\alpha(1+2\cos2\alpha)\cos3\beta\\&\quad+2R\sin\beta(1+2\cos2\beta)\cos3\alpha\\&=2R\sin\gamma(1+2\cos2\gamma).\end{aligned}$$

Nakon skraćivanja izraza s $2R$, rastavljamo svaki izraz pojedinačno:

$$\begin{aligned}&\sin\alpha(1+2\cos2\alpha)\cos3\beta\\&=\sin\alpha\cos3\beta+2\sin\alpha\cos2\alpha\cos3\beta\\&=\sin\alpha\cos3\beta+(\sin(\alpha+2\alpha)\\&\quad+\sin(\alpha-2\alpha))\cos3\beta\\&=\sin\alpha\cos3\beta+\sin3\alpha\cos3\beta-\sin\alpha\cos3\beta\\&=\sin3\alpha\cos3\beta.\end{aligned}$$

Analogno imamo

$$\sin\beta(1+2\cos2\beta)\cos3\alpha=\sin3\beta\cos3\alpha,$$

pa je nakon zbrajanja:

$$\begin{aligned}&\sin\alpha(1+2\cos2\alpha)\cos3\beta\\&\quad+\sin\beta(1+2\cos2\beta)\cos3\alpha\\&=\sin3\alpha\cos3\beta+\sin3\beta\cos3\alpha\\&=\sin(3\alpha+3\beta)=\sin(3\pi-3\gamma)=\sin3\gamma;\end{aligned}$$

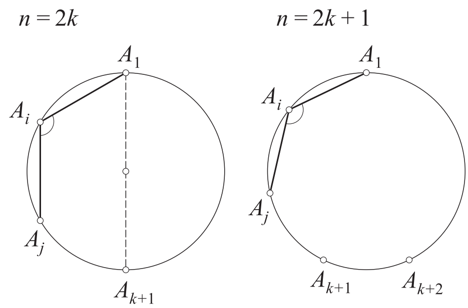
$$\sin\gamma(1+2\cos 2\gamma)=\sin\gamma+2\sin\gamma\cos 3\gamma$$
$$=\sin\gamma-\sin\gamma+\sin 3\gamma=\sin 3\gamma.$$

Dakle, vrijedi dana jednakost.

Hamza Merzić (4), Sarajevo, BiH

3306. *Na koliko se načina mogu izabrati tri vrha pravilnog n-terokuta $A_1A_2\ldots A_n$, $n\geq 4$, tako da oni budu vrhovi tupokutnog trokuta.*

Rješenje. Neka je $P(n)$ traženi broj tupokutnih trokuta i neka je $P_1(n)$ broj tupokutnih trokuta $A_1A_iA_j$, gdje je $\sphericalangle A_1A_iA_j$ tupi $1<i<j\leqslant n$. Jasno je $P(n)=nP_1(n)$.



Svaki od promatranih kutova $A_1A_iA_j$ je tupokutan ako i samo ako je $j\leqslant\dfrac{n+1}{2}$. Dakle, $P_1(n)$ je jednak broju svih dvočlanih podskupova od $\left\{2,3,\ldots,\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right\}$. Prema tome,

$$\begin{aligned}P(n)&=nP_1(n)\\&=n\cdot\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)\cdot\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-2\right)\\&=\frac{n}{2}\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-3}{2}\right].\end{aligned}$$

Ur.

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 334. *Vozač je želio izračunati faktor trenja kotrljanja između guma njegovog automobila i ceste. Na ravnom dijelu ceste postigao je brzinu od 18 km/h i ugasio motor automobila. Zaustavljajući se, automobil je prešao put od 31.25 m. Koliki je faktor trenja izračunao vozač iz ovih podataka? Zašto je za ovakvo mjerenje važno da brzina automobila ne bude prevelika?*

Rješenje.

$$v=18\ \text{km/h}=5\ \text{m/s}$$
$$\underline{s=31.25\ \text{m}}$$
$$\mu=?$$
$$F_{\text{koč}}=F_{\text{tr}},$$
$$m\cdot a=\mu\cdot m\cdot g,$$
$$\mu=\frac{a}{g},$$
$$v^2=2\cdot a\cdot s,$$
$$a=\frac{v^2}{2s}=0.4\ \text{m/s}^2,$$
$$\mu=\frac{0.4\ \text{m/s}^2}{10\ \text{m/s}^2}=0.04.$$

Za ovakvo mjerenje brzina ne smije biti prevelika jer se trenje sa zrakom ne bi moglo zanemariti.

Klaudija Lokas (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

OŠ – 335. *Učenici su posjetili zabavni park u kojem je viseći most duljine 30 m. Prelazili su ga u koloni dugačkoj 15 m brzinom od 1.5 m/s. Koliko dugo je most bio opterećen?*

Rješenje.

$$l_1=30\ \text{m}$$
$$l_2=15\ \text{m}$$
$$\underline{v=1.5\ \text{m/s}}$$
$$t=?$$
$$s=l_1+l_2=30\ \text{m}+15\ \text{m}=45\ \text{m},$$
$$t=\frac{s}{v}=\frac{45\ \text{m}}{1.5\ \text{m/s}}=30\ \text{s}.$$

Karmen Petrić (8),
OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 336. *Opruga se produlji za 4 cm kad se na nju objesi uteg mase 100 g. Kad je na nju obješena kocka brida 5 cm produljenje opruge iznosi 10 cm. Kolika je gustoća kocke?*

Prvo rješenje.

$$\Delta l_1 = 4 \text{ cm}$$
$$m_1 = 100 \text{ g}$$
$$\Delta l_2 = 10 \text{ cm}$$
$$\underline{a = 5 \text{ cm}}$$
$$\rho = ?$$

Produljenje je proporcionalno sa silom, odnosno s masom tijela obješenom na oprugu.

$4 \text{ cm} : 10 \text{ cm} = 100 \text{ g} : m_k$,

$4m_k = 1000$,

$m_k = 250 \text{ g}$;

$V = a \cdot a \cdot a = 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^3$,

$\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{250 \text{ g}}{125 \text{ cm}^3} = 2 \text{ g/cm}^3$.

Mateja Terzanović (8), OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

Drugo rješenje.

$$\Delta l_1 = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}$$
$$m_1 = 100 \text{ g} = 0.1 \text{ kg}$$
$$\Delta l_2 = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$
$$\underline{a = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}}$$
$$\rho = ?$$

Težina utega:

$$G_1 = m_1 \cdot g = 0.1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 1 \text{ N}.$$

Konstanta opruge:

$$k = \frac{F}{\Delta l_1} = \frac{G}{\Delta l_1} = \frac{1 \text{ N}}{0.04 \text{ m}} = 25 \text{ N/m} .$$

Težina kocke:

$$G_2 = F_2 = k \cdot \Delta l_2 = 25 \text{ N/m} \cdot 0.1 \text{ m} = 2.5 \text{ N}.$$

Masa kocke:

$$m_2 = \frac{G_2}{g} = \frac{2.5 \text{ N}}{10 \text{ N/kg}} = 0.25 \text{ kg}.$$

Obujam kocke:

$$V = a^3 = (0.05 \text{ m})^3 = 0.000125 \text{ m}^3.$$

Gustoća kocke:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0.25 \text{ kg}}{0.000125 \text{ m}^3} = 2000 \text{ kg/m}^3.$$

Karmen Petrić (8), Krapina

OŠ – 337. *Kako treba spojiti otpore od* $30\ \Omega$, $10\ \Omega$, $6\ \Omega$, $5\ \Omega$ *i* $3\ \Omega$ *da bi vrijednost njihovog ukupnog otpora bila cijeli broj manji od* $10\ \Omega$*?*

Rješenje.

$$R_1 = 30\ \Omega$$
$$R_2 = 10\ \Omega$$
$$R_3 = 6\ \Omega$$
$$R_4 = 5\ \Omega$$
$$R_5 = 3\ \Omega$$
$$\underline{R < 10 \text{ i } R \in \mathbf{N}}$$

Otpore od $30\ \Omega$ i $10\ \Omega$ moramo spojiti u paralelu. Njihov ukupni otpor kad su spojeni paralelno nije cijeli broj. Jedinu cjelobrojnu kombinaciju dobijemo kad u tu paralelu dodamo i otpor od $5\ \Omega$. Otpor te paralele iznosi:

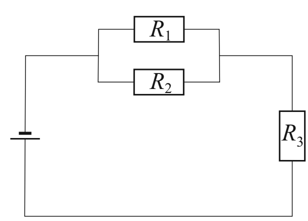
$$\frac{1}{R_{124}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{1+3+6}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},$$
$$R_{124} = 3\ \Omega.$$

Preostala dva otpora moramo spojiti u paralelu da vrijednost ukupnog otpora ne prijeđe 10 oma.

$$\frac{1}{R_{35}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$
$$R_{35} = 2\ \Omega,$$
$$R = R_{124} + R_{35} = 3\ \Omega + 2\ \Omega$$
$$= 5\ \Omega.$$

Mateja Terzanović (8), Šibenik

1490. *Kroz otpornik* R_2 *na shemi teče struja 0.4 A. Odredi napon izvora, snagu koju troši svaki od tri otpornika i ukupnu snagu u strujnom krugu.* $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$.



Rješenje. Napon na otporniku R_2 je $U_2 = I_2 R_2 = 0.8$ V. Isti je napon i na otporniku R_1, što daje $I_1 = U_2/R_1 = 0.8$ A. Tada je ukupna struja i struja kroz R_3 jednaka $I_3 = I_1 + I_2 = 1.2$ A, što daje $U_3 = 3.6$ V. Traženi napon izvora jednak je $U_2 + U_3 = 4.4$ V.

Na svakom otporniku, snaga je umnožak struje i napona na tom otporniku. Tako je

$$P_1 = U_1 I_1 = 0.64 \text{ W},$$

$$P_2 = U_2 I_2 = 0.32 \text{ W},$$

$$P_3 = U_3 I_3 = 4.32 \text{ W}.$$

Ukupna snaga je

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = U_{izvora} I_3 = 4.4 \cdot 1.2$$
$$= 5.28 \text{ W}.$$

Klaudija Lokas (8),
OŠ Fausta Vrančića, Šibenik

1491. *Prosječno vrijeme između dviju uzastopnih opozicija Marsa (Zemlja između Marsa i Sunca) iznosi 2.1354 godine. Odredi duljinu velike poluosi Marsove putanje (srednju udaljenost Marsa od Sunca), koristeći podatak da je velika poluos Zemljine putanje duga 1 astronomsku jedinicu, a ophodno vrijeme 1 godinu.*

Rješenje. Kutna brzina vrtnje je obrnuto proporcionalna ophodnom vremenu. Period između opozicija odgovara *razlici* kutnih brzina Zemlje i Marsa. Znači da vrijedi

$$\frac{1}{T_{Marsa}} = \frac{1}{T_{Zemlje}} - \frac{1}{T_{opozicije}} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2.1354}.$$

Odatle je $T_{Marsa} = 1.88075$ godina. Po trećem Keplerovom zakonu duljine poluosi a su:

$$\frac{a^3_{Marsa}}{T^2_{Marsa}} = \frac{a^3_{Zemlje}}{T^2_{Zemlje}} = 1.$$

Odatle je $a_{Marsa} = \sqrt[3]{1.88075^2} = 1.5237$ astronomskih jedinica.

Ur.

1492. *Kugla promjera 4 cm pliva na vodi tako da je vrh kugle 3.2 cm iznad površine vode. Odredi gustoću kugle ako je gustoća vode* 1000 *kg/m*^{3}, *a gustoću zraka zanemari.*

Rješenje. Volumen dijela kugle ispod površine vode (volumen kalote) je

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h),$$

gdje je R radijus kugle, a $h = 0.8$ cm visina dijela uronjenog u vodu. Sila teže kugle jednaka je sili uzgona na kalotu, pa je

$$\rho_{kugle} V_{kugle} = \rho_{vode} V_{kalote}.$$

Odatle je $\rho_{kugle} = 104$ kg/ m^3.

Ur.

1493. *Homogena bakrena kugla rotira kutnom brzinom* 6π *rad/s, uz kinetičku energiju rotacije 0.24 J. Odredi radijus i masu kugle. Gustoća bakra je* 8940 *kg/m*^{3}.

Rješenje. Energija rotacije je

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

a moment tromosti kugle je $I = \frac{2}{5} m R^2$. Uvrštavanje mase u izraz za gustoću daje

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{I}{R^2}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{15I}{8\pi R^5}.$$

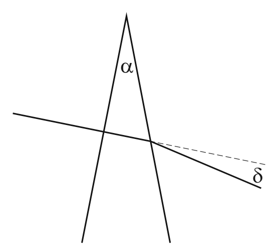
Rješavanje po R daje

$$R = \sqrt[5]{\frac{1}{40\pi^3 \rho}} = 0.039 \text{ m},$$

a odatle je masa $m = 2.22$ kg.

Ur.

1494. *Zraka svjetlosti upada okomito na stranicu plastične prizme indeksa loma 1.3. Smjer lomljene zrake na izlazu iz prizme zatvara kut* $\delta = 5^\circ$ *u odnosu na smjer upadne zrake. Odredi kut prizme* α *(na slici).*



Rješenje. Promatrajmo lom svjetlosti na izlazu iz prizme (na ulazu je zraka okomita na prizmu i nema loma). Kut u prizmi između zrake i okomice jednak je kutu prizme, α, a kut u zraku iznosi $\alpha+\delta$. Iz Snellovog zakona loma svjetlosti imamo:

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\sin\alpha}=n.$$

Množenjem sa $\sin\alpha$ i korištenjem adicijske formule dobijemo:

$$\sin\alpha\cos\delta+\cos\alpha\sin\delta=n\sin\alpha.$$

Podijelimo s $\cos\alpha$ i izrazimo direktno $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\delta}{n-\cos\delta}.$$

Uvrštanjem dobijemo $\alpha=16^\circ 0' 26''$.

Ur.

1495. *U zadnjoj sekundi slobodnog pada, kamen prevali 16% veći put nego u predzadnjoj. Odredi visinu i trajanje pada. Uzeti $g = 10$ m/s^2, a otpor zraka zanemari.*

Rješenje. Put slobodnog pada određen je jednadžbom gibanja $h(t)=\frac{1}{2}gt^2$. Omjer puta u zadnjoj (od $t-1$ do t) i predzadnjoj (od $t-2$ do $t-1$) sekundi pada je

$$\frac{t^2-(t-1)^2}{(t-1)^2-(t-2)^2}=1.16.$$

Množenje s nazivnikom i dokidanje kvadratnih članova daje

$$2t-1=1.16(2t-3),$$

a rješavanjem po t dobivamo $t=7.75$ s, što određuje visinu pada $h=5t^2=300.3$ m.

Ur.

1496. *Idealno crno tijelo na temperaturi 300 K prima jednaku snagu od okoline koliko i zrači. Pri temperaturi tijela 320 K, treba ulagati 17 W snage za održavanje temperature tijela. Koliku bi snagu trebalo ulagati za održavanje temperature 340 K istog tog tijela?*

Rješenje. Snaga zračenja crnog tijela proporcionalna je četvrtoj potenciji apsolutne temperature, $P(T)=k\cdot T^4$. Tada je snaga pri 300 K

$$P(300)=k\cdot 300^4-k\cdot 300^4=0,$$

pri 320 K

$$P(320)=k\cdot 320^4-k\cdot 300^4=17\ \text{W},$$

a pri 340 K

$$P(340)=k\cdot 340^4-k\cdot 300^4,$$

što uz prethodnu jednadžbu daje

$$P(340)=\frac{340^4-300^4}{320^4-300^4}\cdot 17\ \text{W}=37.5\ \text{W}.$$

Ur.