Sveučilišni diplomski studij: Teorijska matematika

*Boris Širola**

Namjera ovog članka je predstaviti sveučilišni diplomski studij *Teorijske matematike*, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (kraće, PMF-MO). Prvo ćemo pokušati objasniti što se smatra pod pojmom "teorijska matematika", te ćemo za ilustraciju navesti neka konkretna područja istraživanja koja su trenutno sam vrh svjetskog matematičkog interesa. Pritom ćemo se ograničiti samo na jedan relativno uski dio problematike, za koju mislimo da bi ju, možda tek u grubim crtama, mogli razumijeti učenici 3. i 4. razreda gimnazija; ili barem učenici prirodoslovno-matematičkih gimnazija. (To je u skladu s autorovom "filozofijom" da svaki napisani matematički tekst mora čitaocima ponuditi barem "mrvicu" novog efektivnog znanja.) Spomenut ćemo i neke važne otvorene probleme čije bi rješavanje donijelo, pored sigurnog mjesta u povijesti "matematičkih besmrtnika", i do životnog zadovoljstva koje se (barem kako na to gleda autor ovog članka) ne može mjeriti sa svim (materijalnim) bogatstvima svijeta. U drugom dijelu članka reći ćemo nešto o uvjetima upisa na studij *Teorijske matematike*, na PMF-MO, te o njegovoj organizaciji i samom sadržaju. Na kraju ćemo kratko govoriti o dobivenoj vrijednosti nakon završetka ovog studija.

Uvod; ili: Što je teorijska matematika?

Matematika se dijeli na teorijsku, ili tzv. čistu matematiku (eng., pure math.), i na primijenjenu matematiku (eng., applied math.). Cilj teorijske matematike (u daljnjem, TM) su temeljna istraživanja koja razvijaju ukupna matematička znanja. Preciznije rečeno, razvijaju se nove teorije i/ ili matematička područja, rješavaju se otvoreni problemi u okviru postojećih teorija i/ ili područja, razvijaju se nove tehnike i metode u postojećim granama matematike, povezuju se "mostovima" neki dijelovi u raznim granama matematike, itd. Naglasimo kako su tako dobivene spoznaje vrlo često od velike važnosti za neka područja u okviru primijenjene matematike, ali isto tako i za neke druge znanosti (npr., računalna znanost, fizika, biologija, ekonomske znanosti[1], itd.)

Pozamašan je broj područja matematike, i teorija, koje možemo svrstati u TM. Spomenimo tek neka područja i/ ili teorije s kojima će se sresti student(ica) studija TM na PMF-MO: algebra, teorija brojeva, topologija, realna i kompleksna analiza, funkcionalna analiza, diferencijalne jednadžbe, diferencijalna geometrija, algebarska

* Autor je redoviti profesor na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-mail: `sirola@math.hr`

[1] Kao primjer jednog od brojnih matematičara koji su "imali veze" s ekonomijom, spomenimo glavni lik hollywoodskog filma *A beautiful mind*; to je bio John F. Nash, teorijski matematičar po svom obrazovanju. Za primjenu svojih znanja u ekonomiji dobio je 1994. godine Nobelovu nagradu.

geometrija, teorija reprezentacija, itd. Kažimo kako su neka od ovih područja (npr., algebra i topologija) takva da je u njihovom proučavanju glavni naglasak na analizi izuzetno bogatih struktura koje su određene s nekoliko aksioma koji iste definiraju. Kao primjere takvih struktura spomenimo ovdje grupe, prstene i topološke prostore. S druge strane, u nekim drugim područjima naglasak je na sintezi koja dolazi kao posljedica interakcije nekoliko različitih vrsta struktura. Ovdje kao istaknute discipline možemo spomenuti diferencijalnu geometriju, algebarsku geometriju i teoriju reprezentacija. Kada već sve ovo navodimo, dobro je podsjetiti i na još jednu neospornu činjenicu. A to je da matematika uopće, a posebno TM, funkcionira kao "jedinstven organizam". Tu želimo reći da u matematici sva područja i teorije imaju za cilj razvijati se samostalno, ali i na način da pritom pomažu razvoj nekih drugih područja i/ ili teorija. Kao ilustraciju za ovo što spominjemo, kažimo kako npr. moderna teorija brojeva nije zamisliva bez vrlo razvijenih tehnika i metoda, kao i pojedinih dubokih rezultata, koji pripadaju nekim drugim matematičkim područjima (npr., algebarskoj geometriji, kompleksnoj analizi, teoriji reprezentacija, diferencijalnoj geometriji, itd.)

Čitajući prethodni odjeljak ovog članka moguće je da ste ostali zatečeni navođenjem nekih dijelova matematike o kojima možda ne znate ništa. No toga se ne trebate bojati, jer ako budete imali jaku volju (uz ponešto matematičkog talenta), u godinama koje imate ispred sebe možete naučiti vrlo mnogo. (Puno je teža situacija s autorom ovog članka, koji nije više mlad, a o navedenim stvarima zna vrlo malo!). Bilo kako bilo, sada je pravi trenutak za "mali predah", gdje ćemo tek navesti neke konkretne osnovne pojmove s kojima biste se na studiju mogli mnogo više "zabavljati". (Svakako, barem ima nade da ćete sada naučiti nešto novo. Uputa: uzmite papir i olovku u ruke, i raspišite ponešto od ovoga što slijedi.)

Algebra; o pojmu grupe i prstena

Sjetimo se skupova cijelih brojeva $\mathbf{Z}$, racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$, realnih brojeva $\mathbf{R}$ i kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Znajući četiri osnovne računske operacije, te brojeve posebno znamo zbrajati i množiti. (Inače, neki od vodećih svjetskih matematičara, kao što je npr. A. Wiles, reći će da postoji i peta osnovna računska operacija; tzv. "modularne forme". No takve nas konstatacije ovdje neće brinuti.) I onda, ako za trenutak s G označimo bilo koji od spomenutih skupova brojeva, znamo da vrijedi sljedeće:

(1) Ako su $x, y \in G$, onda je i $x + y \in G$
(tzv. *svojstvo grupoidnosti*);

(2) Ako su $x, y, z \in G$, onda je $(x + y) + z = x + (y + z)$
(tzv. *svojstvo asocijativnosti*);

(3) Ako je $x \in G$, onda je $x + 0 = 0 + x = x$
(tj. broj 0 je tzv. *neutralan element*, za zbrajanje);

(4) Ako je $x \in G$, onda postoji (jedinstven) tzv. inverzni, ili suprotan, element $-x \in G$ takav da je $x + (-x) = (-x) + x = 0$
(tzv. *svojstvo inverza*, za zbrajanje).

Po analogiji s tim dobro poznatim situacijama, uvodimo sljedeći pojam. Neprazan skup G, na kojem je definirana neka operacija $*$, zove se *grupa* ako vrijede gornja svojstva (1)–(4); jasno, kada operaciju $+$ zamijenimo sa $*$, a ulogu broja 0 preuzme neki istaknuti neutralni element $e \in G$. Grupa $G = (G, *)$ bit će *komutativna* ukoliko je $x * y = y * x$, za sve x i y iz G; a ako zadnji uvjet nije ispunjen, grupa je *nekomutativna*. Kažimo da se grupama općenito bavi tzv. *teorija grupa*, kao jedna od poddisciplina algebre. Na primjer, skup $G = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, uz operaciju "običnog" množenja, je još jedan dobro poznat primjer komutativne grupe; ovdje je neutralni element $e = 1$. Isto tako, i skup $\mathbf{Z}^n$, svih n-torki cijelih brojeva $(c_1, \ldots, c_n)$, je grupa uz operaciju "zbrajanja po komponentama"

$$(c_1, \ldots, c_n) + (d_1, \ldots, d_n) = (c_1 + d_1, \ldots, c_n + d_n).$$

Ako ste se do sada susreli s pojmovima matrica i njihovog množenja, onda ste "nadomak" jedne beskonačne serije važnih primjera grupa (i mnoštva njihovih zanimljivih podgrupa); to su tzv. realne i kompleksne *opće linearne grupe* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$, gdje je $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ili $\mathbf{C}$. Govoreći o pojmu grupe, moramo kazati da je pored njega drugi osnovni pojam u teoriji grupa tzv. pojam *homomorfizma grupa*; tj., preslikavanja između dviju grupa koje "čuva strukturu". Posebno, proučavanjem homomorfizama s nekih konkretnih grupa G na tzv. opće linearne grupe $\mathrm{GL}(V)$, gdje je V tzv. *(topološki) vektorski prostor*, bavi se *teorija reprezentacija* grupa.

Za razliku od navedenog, ako gledamo skup $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$, i ovaj put uz operaciju množenja, onda tu vrijede samo gornja svojstva (1)–(3). (Jasno; za bilo koji cijeli broj x, koji nije u skupu $\{-1, 0, 1\}$, ne postoji cijeli broj y takav da je $xy = 1$!) Posebno, skup $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$, uz množenje, nije grupa. Ali ta činjenica nije razlog za "nezadovoljstvo". Naime, skup $\mathbf{Z}$, kada ga istovremeno gledamo i uz operaciju zbrajanja i uz operaciju množenja ima vrlo dobru strukturu; sasvim precizno, $\mathbf{Z}$ je primjer onoga što zovemo prsten. Općenito; neprazan skup R je *prsten* ako su na njemu definirane dvije operacije, koje se standardno (po analogiji sa $\mathbf{Z}$) zovu zbrajanje i množenje, tako da je skup R sa zbrajanjem grupa, skup R bez neutrala za zbrajanje zadovoljava gornja svojstva (1)–(3), te još vrijede dobro poznata pravila distributivnosti množenja prema zbrajanju. Pored prstena $\mathbf{Z}$, sljedeći "lako dohvatljivi" primjeri prstena su dobro poznati *prsteni polinoma*. To su na primjer prsteni polinoma $\mathbf{R}[X]$ i $\mathbf{Z}[X]$, u jednoj varijabli X. Ili prsteni polinoma $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ i $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$; sada u $n \geq 2$ varijabli $X_1, \ldots, X_n$. (Nešto više detalja o grupama i prstenovima možete naći u [4].)

Algebarska geometrija; o pojmu algebarske mnogostrukosti

Promatrajmo sada prsten polinoma $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$, kada je $n \geq 2$. Za bilo koji (konačan) skup polinoma $f_i = f_i(X_1, \ldots, X_n)$ iz tog prstena, za $i = 1, \ldots, m$, možemo promatrati skup zajedničkih nultočaka tih polinoma u skupu $\mathbf{C}^n$; tj., definiramo skup

$$\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_m) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid f_i(z_1, \ldots, z_n) = 0 \text{ za } i = 1, \ldots, m\}.$$

Takvi se skupovi zovu *(afine) algebarske mnogostrukosti*; i njima se, između ostalog, bavi prije spomenuta matematička disciplina koja se zove algebarska geometrija. Mogli smo isto tako uzeti da su polinomi f_i iz prstena polinoma s cijelim koeficijentima; tj., iz prstena $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$. Pa onda promatrati npr. tzv. cjelobrojne, ili racionalne, točke u skupu $\mathcal{V}(f_1, \ldots, f_m)$. Sasvim precizno rečeno, možemo postaviti pitanje da se odrede skupovi

$$\mathcal{V}_{\mathbf{Z}}(f_1, \ldots, f_m) = \{(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{Z}^n \mid f_i(c_1, \ldots, c_n) = 0 \text{ za } i = 1, \ldots, m\},$$
$$\mathcal{V}_{\mathbf{Q}}(f_1, \ldots, f_m) = \{(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbf{Q}^n \mid f_i(q_1, \ldots, q_n) = 0 \text{ za } i = 1, \ldots, m\};$$

za neke konkretne polinome f_i, koji su od interesa. Matematička istraživanja koja traže odgovore na pitanja ove vrste dio su prije spomenute teorije brojeva. Naglasimo kako je takva problematika od izuzetnog interesa u modernoj matematici. No isto tako kažimo da je ona, u svojoj punoj općenitosti, zapravo nevjerojatno teška. (Malo drugačije rečeno, ovdje se matematičari "imaju što igrati u narednim milenijima"...)

Da bismo bili još jasniji o čemu govorimo, pogledat ćemo samo jedan poseban slučaj; tj., u prethodnom odjeljku uzet ćemo $n = 2$ i $m = 1$. Znači, imamo samo jedan polinom $f = f(X, Y)$. (Ovdje varijable polinoma označavamo s X i Y, a ne s X_1 i X_2!) Štoviše, mi ćemo pretpostaviti da je

$$f(X, Y) = Y^2 - X^3 - AX - B,$$

za neke $A, B \in \mathbf{Z}$. U tom su slučaju gore definirani skupovi $\mathcal{V}_{\mathbf{Z}}(f)$ i $\mathcal{V}_{\mathbf{Q}}(f)$ dani kao

$$\mathcal{V}_{\mathbf{Z}}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \mid y^2 = x^3 + Ax + B\},$$

$$\mathcal{V}_{\mathbf{Q}}(f) = \{(x, y) \in \mathbf{Q}^2 \mid y^2 = x^3 + Ax + B\}.$$

Problematika računanja takvih skupova, za polinome f kao gore, dio je teorije brojeva o tzv. eliptičkim krivuljama. Sasvim precizno rečeno, pretpostavimo još da jednadžba $X^3 + AX + B = 0$ ima u skupu kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ tri međusobno različite nultočke. Onda i jednadžbu $f(X, Y) = 0$, tj.

$$E: \qquad Y^2 = X^3 + AX + B,$$

ali i skup njezinih rješenja $E(\mathbf{Q}) = \mathcal{V}_{\mathbf{Q}}(f)$, zovemo *eliptičkom krivuljom.* (Ako se pitate zašto govorimo o krivulji, skicirajte za vježbu u koordinatnoj ravnini $\mathbf{R}^2$ skupove točaka (x, y) koji zadovoljavaju sljedeće jednadžbe: (a) $Y^2 = X^3 + 17$; (b) $Y^2 = X^3 + X$; (c) $Y^2 = X^3 - X$.) Spomenimo ovdje kako se lako pokazuje da skup $E(\mathbf{Q})$ možemo (uz jednu konkretnu operaciju; tzv. "zbrajanje točaka na eliptičkoj krivulji") organizirati u komutativnu grupu. Nadalje, prvi važan rezultat o eliptičkim krivuljama (tzv. Mordell-Weilov teorem) govori da je ta grupa $E(\mathbf{Q})$ konačno generirana. Preciznije rečeno, dana je kao tzv. direktan produkt grupa

$$E(\mathbf{Q}) = E_{tor}(\mathbf{Q}) \times \mathbf{Z}^r;$$

za neku konačnu grupu $E_{tor}(\mathbf{Q})$, tzv. *grupu torzionih točaka*, i neki broj $r = \mathrm{rk}(E(\mathbf{Q})) \in \mathbf{N}_0$, tzv. *rang eliptičke krivulje* $E(\mathbf{Q})$. Tek za ilustraciju navedimo sljedeću činjenicu (koju nije lako pokazati): Za gore navedeni primjer eliptičke krivulje $E:\ Y^2 = X^3 + 17$ imamo da je njezin rang $\mathrm{rk}(E(\mathbf{Q})) = 2$; ili još preciznije, imamo $E(\mathbf{Q}) = \mathbf{Z}^2$. U isto vrijeme, pokazuje se da je za $f = Y^2 - X^3 - 17$ skup cjelobrojnih točaka $\mathcal{V}_{\mathbf{Z}}(f)$ jednak

$$\{(-2, \pm 3), (-1, \pm 4), (2, \pm 5), (4, \pm 9), (8, \pm 23),$$
$$(43, \pm 282), (52, \pm 375), (5234, \pm 378661)\}.$$

(Provjerite da napisanih 16 točaka doista pripada datoj eliptičkoj krivulji! Naglasimo ovdje i to da, prema tzv. Siegelovom teoremu, nije slučajno da imamo samo konačno mnogo cjelobrojnih točaka u $E(\mathbf{Q})$.)

Istraživanja o eliptičkim krivuljama, i s njima povezanim problemima, spadaju u sam vrh moderne matematike kroz nekoliko zadnjih desetljeća. Pritom su dobiveni neki spektakularni rezultati koji su među najznačajnijima u, recimo, posljednjih stotinu godina; npr., dokaz *Velikog Fermatovog teorema*, dokaz *Shimura-Taniyamine slutnje*, dokaz *Serreove slutnje o modularnosti*, itd. Jasno, u teoriji eliptičkih krivulja postoji i mnoštvo otvorenih problema, od kojih su dva posebno zanimljiva. Prvi je problem "misterioznost" ranga eliptičke krivulje. Naime, taj se broj u konkretnim slučajevima vrlo teško računa, a općenito se ne zna može li biti po volji velik. Drugi je problem jedna čuvena slutnja, tzv. Birch i Swinnerton-Dyerova slutnja. (Više o eliptičkim krivuljama naći ćete u [1] i [2].)

Za kraj ovoga Uvoda; nekoliko riječi o nečemu za što će većina (teorijskih) matematičara kazati da je danas najvažniji otvoren problem u matematici. (Više detalja možete naći na primjer u [5].)

Riemannova hipoteza

Za svaki realan broj $x > 1$ može se pokazati da je dobro definiran broj

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

(To je lako za pokazati kada se ima tzv. *integralni kriterij konvergencije* redova.) Tako dobivamo funkciju $\zeta : (1, +\infty) \to \mathbf{R}$. Nešto više posla, u okviru kompleksne analize, treba da bi se pokazala sljedeća tvrdnja: Postoji jedinstveno analitičko produljenje gornje funkcije do funkcije

$$\zeta : \mathbf{C} \setminus \{1\} \to \mathbf{C}.$$

(Primijetimo kako se posebno sada broj $\zeta(s)$, za $s \in \mathbf{C}$ čiji je realni dio $\mathrm{Re}(s) < 1$, NE MOŽE računati preko gore napisanog reda!) Tako dobivena kompleksna funkcija kompleksne varijable je poznata *Riemannova*[2] *Zeta-funkcija*. Definirajmo

$$\mathcal{N}(\zeta) := \{s \in \mathbf{C} \mid \zeta(s) = 0\},$$

skup *nultočaka* funkcije ζ. Pokazuje se da se u skupu $\mathcal{N}(\zeta)$ nalaze brojevi $s = -2, -4, -6, \ldots$; to su tzv. *trivijalne nultočke* Zeta-funkcije. Centralni je problem razumijeti skup

$$\mathcal{N}_{netriv}(\zeta) := \mathcal{N}(\zeta) \setminus \{-2, -4, -6, \ldots\},$$

skup netrivijalnih nultočaka Zeta-funkcije. Iako se zna da je taj skup beskonačan, te da štoviše ima beskonačno mnogo kompleksnih nultočaka oblika $s = 1/2 + \imath t$, $t \in \mathbf{R}$, čini se kako je današnja matematika daleko od potpunog razumijevanja skupa $\mathcal{N}_{netriv}(\zeta)$. Jedan "potproblem" problema da se potpuno i detaljno opiše skup $\mathcal{N}_{netriv}(\zeta)$ je glasovita *Riemannova hipoteza*:

(RH) *Sve netrivijalne nultočke s Zeta-funkcije ζ su na pravcu* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$*; tj., oblika su $s = 1/2 + \imath t$, za odgovarajući $t \in \mathbf{R}$.*

Evo vam i jedan "mali poslić". (Ali, ako ga budete krenuli obavljati, nemojte se pritom nipošto obeshrabriti, ili još gore, prestrašiti!)

Zadatak. Ako imate volje, i pristup Internetu, "potrošite" malo vremena čitajući (npr., na *Wikipedia*) barem ponešto o sljedećim (engleskim) pojmovima koji se spominju (na hrvatskom jeziku) u ovom članku: algebra, number theory, complex analysis, functional analysis, algebraic geometry, differential geometry, representation theory, group, vector space, ring, (affine) algebraic variety, elliptic curve.

Isto tako, da biste doznali više o nekim velikim uspjesima moderne matematike, i o onima koji su za njih zaslužni, te o nekim njezinim velikim problemima, potražite na primjer sljedeće pojmove: Fermat's Last theorem, Shimura-Taniyama conjecture, Poincare's conjecture, Langlands' correspondence, Serre's modularity conjecture, Fundamental lemma, Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, Riemann hypothesis.

[2] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), veliki njem. matematičar

Upis na studij

Uvjeti za upis na studij TM uglavnom su isti kao i oni za druge diplomske studije na PMF-MO. To znači da morate imati završen preddiplomski sveučilišni studij, s najmanje 180 ECTS bodova; vidite npr. [3], a za više detalja posjetite web-stranicu `www.math.hr`. Naglasimo i to da je pretpostavka za kvalitetno praćenje studija TM čvrst matematički temelj s preddiplomskog studija. Drugim riječima, potrebno je kvalitetno znanje, i razumijevanje, realne analize funkcija jedne i više varijabli, linearne algebre, kompleksne analize, geometrije, običnih diferencijalnih jednadžbi, osnova algebre i teorije vjerojatnosti. Vrlo je bitna i sposobnost matematičkog razmišljanja, posebno u vidu sposobnosti shvaćanja matematičkih dokaza.

Upis na diplomski studij TM vrši se prema rang listi kandidata prijavljenih za studij, u sklopu razredbenog postupka. Sam razredbeni postupak ne predviđa test provjere znanja, nego se rang lista formira na temelju skupnog broja bodova; to je zbroj bodova dobivenih na temelju ocjena položenih kolegija i tzv. dodatnih bodova. (Precizni detalji nalaze se u pravilima upisa.)

Organizacija studija

Predviđeno trajanje studija je 2 godine; tj., 4 semestra. Pritom nastavni plan donosi 120 ECTS bodova. U prvoj godini studija kolegiji koji se izvode kao obavezni su: *Algebra 1* i *2*, *Diferencijalna geometrija 1* i *2*, *Normirani prostori*, *Operatori na normiranim prostorima*, *Metrički prostori*, *Opća topologija*, *Projektivna geometrija* i *Algebarske krivulje*. U svakom semestru student izabire i po jedan kolegij po vlastitom afinitetu s liste kolegija koji se izvode konkretne akademske godine. U drugoj godini obavezni su kolegiji: *Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1* i *2*, *Algebarska teorija brojeva 1* i *2*, *Teorija vjerojatnosti 1* i *2*, *Neeuklidska geometrija* i *Algebarska topologija*. I sada se u svakom semestru izabire po jedan kolegij s ponuđene liste.

Studij završava izradom i uspješnom obranom diplomskog rada. Tako se stječe akademski naziv magistra/ magistre matematike.

Zaključak

Diplomski sveučilišni studij TM svojim nastavnim sadržajem i metodama nastave omogućava usvajanje nekih temeljnih znanja, i razumijevanje rezultata, iz područja teorijske matematike. Pritom se studenti upoznaju s nekim od stožernih matematičkih disciplina i/ ili teorija. Na studiju studenti razvijaju sposobnost razumijevanja složenijih matematičkih dokaza, a tako i logičke argumentacije u raznim drugim situacijama. Pritom se razvija vještina analitičkog razmišljanja uopće.

Magistri/ magistre (teorijske) matematike osposobljeni su za rad u sustavu znanosti i visokog obrazovanja (sveučilišta, veleučilišta, znanstveno-istraživački instituti). Ali jednako tako, zahvaljujući razvijenom aparatu logičkog zaključivanja, magistri/ magistre ovog studija nalaze poslove u proizvodnom gospodarstvu, financijskim institucijama itd.

Za sam kraj, navedimo (u originalnoj formi) odgovor koji je u jednom intervjuu 1985. godine dao Jean-Pierre Serre, zasigurno jedan od najvećih živućih matematičara, kada su ga pitali na koji način poticati mlade ljude da postanu (teorijski) matematičari. On je odgovorio:

> *I have a theory on this, which is that one should first discourage people from doing mathematics; there is no need for too many mathematicians. But, if after that, they still insist on doing mathematics, then one should indeed encourage them, and help them.*

Postati teorijski matematičar, a onda se možda i baviti matematikom kao znanosti, nije baš uvijek jednostavno. Kako smo bili spomenuli, za to treba ponešto talenta, a napose podosta volje, upornosti i, rekli bismo, hrabrosti. No ako se u tu "avanturu" upustite, ono u što možete biti sigurni je to da ćete njenim završetkom svomu znanju, ali i životu u cjelini, dodati jednu istinsku veliku novu vrijednost.

Literatura

[1] `http://www.math.pmf.unizg.hr/~ duje/ecc/eccseminar.html`

[2] `http://www.math.pmf.unizg.hr/~ duje/elipticke/algelip.pdf`

[3] A. Novak i M. Vuković, *Studij matematike u Zagrebu*, MFL **1/241** (2010.–2011.)

[4] `http://www.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/predavanja/ASpred.pdf`

[5] B. Širola, *Distribucija prim brojeva i Riemannova Zeta-funkcija; prvi dio* (`http://e.math.hr/old/zeta/index.html`)