Osvrt na Bohrov atom *

B. Bhattacharyya

Sažetak

U članku se razmatra Bohrova teorija vodikovog atoma s drukčije točke gledišta. Umjesto uobičajenog pristupa koji se zasniva na uravnoteženju sila koje djeluju na elektron, u članku se polazi od načela korespondencije[1] *da bi se proveo proračun energija vezanja elektrona.*

Uvod

Bohrova teorija [1] vodikovog atoma igrala je ključnu ulogu u ranom teorijskom razvoju atomske spektroskopije. Svaki moderni tečaj atomske fizike ili kvantne teorije na akademskoj razini tumači detaljno ovu teoriju. Postoji nekoliko udžbenika [2–5] atomske fizike koji sadrže opširne rasprave o Bohrovoj teoriji. Standardni udžbenik obično počinje s kratkim kronološkim prikazom pokušaja izgradnje zadovoljavajućeg modela građe atoma zajedno s pravilnostima opaženim u spektru vodikovog atoma [2, 3]. Iznoseći motivaciju, većina ovih udžbenika jasno navodi Bohrove postulate i

* (Prijevod članka: *Bhattacharyya, B. Looking back into Bohr's atom; European Journal of Physics, Vol. 27 (2006) 3, str. 497–500*). Preveo: Roko Pešić, prof., e-pošta `roko.pesic@zg.t-com.hr`

[1] Temeljno načelo koje posebno vrijedi za prijelaz iz klasične u kvantnu teoriju atoma, gdje se za velike kvantne brojeve klasični i kvantnomehanički rezultati moraju podudarati. (vidi V. Lopac: Leksikon fizike, Školska knjiga, Zagreb, 2009.)

izračunava strukturu energijskih razina koristeći dvije osnovne jednadžbe koje se bave (1) kvantizacijom kutne količine gibanja (kao jednog od osnovnih postulata) i (2) uravnoteženjem sila koje djeluju na elektron koji se giba oko jezgre. Nakon dobivenih rezultata pokazuje se kako načelo korespondencije funkcionira za visoke kvantne brojeve.

U ovom radu počinjemo s drukčijeg stajališta. Držimo se osnovnih postulata Bohrove teorije (uključujući kvantizaciju kutne količine gibanja); međutim, umjesto jednadžbe za uravnoteženje centrifugalne sile (u referentnom sustavu elektrona) s Coulombovom interakcijom [2, 4], polazimo od načela korespondencije. Pokazat ćemo da se ovim nekonvencionalnim pristupom dobivaju poznati rezultati za energijske razine elektrona.

Predmet ovog rada nije alternativni izvod rezultata Bohrove teorije, nego radije pokušaj otkrivanja njene zabavne strane, što može biti poučno za učenike odnosno studente.

U drugom dijelu rada raspravljamo o postulatima na kojima se zasnivaju računi, a u trećem dijelu izračunate su energijske razine. Četvrti dio je sažetak čitavog rada.

Bohrovi postulati

Ovdje ćemo navesti bitne postulate Bohrove teorije koji se mogu pronaći u svakom standardnom udžbeniku (pogledati npr. [2–5]). U izgradnji teorije bitno je postulirati ovo:

1) Elektron se giba oko jezgre u nekim izabranim kružnim putanjama (koje su specijalni slučajevi općenitijih eliptičnih putanja u gibanju pod utjecajem centralne sile inverznog kvadrata). U takvim stacionarnim putanjama elektron ne zrači (tj. ne gubi, *op. prev.*) energiju. Ove putanje odgovaraju kvantiziranim vrijednostima kutne količine gibanja:

$$L = mvr = n\hbar, \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots \tag{1}$$

gdje su m, v i r masa, brzina i polumjer putanje elektrona; $\hbar = h/2\pi$, gdje je h Planckova konstanta. Primijetimo da "glavni kvantni broj" n zaista označava redom sve kružne putanje. On za kružne putanje ujedno i mjeri kutnu količinu gibanja elektrona (u $\hbar$).

2) Emisija (apsorpcija) zračenja se događa prilikom skoka elektrona s više (niže) putanje energije E_2 na nižu (višu) putanju energije E_1. Očuvanje energije određuje frekvenciju ν fotona emitiranog u ovom procesu (i kružnu frekvenciju $\omega = 2\pi\nu$), tj.

$$E_2 - E_1 = h\nu = \hbar\omega.$$

Ovdje tvrdimo da "načelo korespondencije" vrijedi i u sljedećem obliku: rezultati koje predviđa klasična fizika vrijedit će asimptotski za visoke putanje, pri čemu je polumjer r putanje monotono rastuća funkcija kvantnog broja n. (Ovaj oblik je, izgleda, ekvivalentan standardnom obliku "načela korespondencije" [2] koji se pojavljuje za velike vrijednosti kvantnog broja n.)

Spomenimo neke primjedbe u kontekstu drugog postulata. Diskretne spektralne linije koje su opažene u eksperimentima (tj. u Balmerovoj seriji [6]) upućuju na dva gore navedena postulata. No, putanje većih polumjera odgovaraju slabijem vezanju i shodno tome većoj (manje negativnoj) ukupnoj energiji. Kada $r \to \infty$, energija teži nuli. U ovom graničnom slučaju očekujemo da se "slobodni" elektron nalazi u energijskom kontinuumu. Ako elektron "skoči" iz putanje manjeg polumjera u neku drugu putanju vrlo velikog polumjera, tada je promjena energije (tj. $E_2 - E_1$) vrlo velika, i shodno tome, odgovarajuća frekvencija ω mora biti vrlo visoka. U eksperimentalno opaženim spektralnim linijama doista nalazimo kontinuum u kratkovalnom području (tj. u području visokih frekvencija). To zapravo znači da što se više udaljavamo od jezgre atoma, tj. što se više pomičemo prema putanjama sve većih i većih polumjera, to su one sve bliže i bliže jedna drugoj. Energetski kontinuum očekujemo na temelju klasične fizike. To je pravi smisao ovog postulata.

Energijske razine

Na temelju postulata iz prethodnog odjeljka izračunat ćemo energijske razine elektrona u putanji polumjera r i odgovarajućeg kvantnog broja n. Ukupna energija u tom slučaju jest:

$$E_{\mathrm{r}} = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kZe^2}{r} = \frac{n^2\hbar^2}{2mr^2} - \frac{kZe^2}{r}, \tag{2}$$

gdje smo upotrijebili jednadžbu (1) da bi kinetičku energiju izrazili preko kvantnog broja n. Z je atomski broj, m je masa, a e naboj elektrona. U SI sustavu jedinica $k = 9 \cdot 10^9 \, \dfrac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$. Indeks r u gornjoj jednadžbi podsjeća nas na polumjer putanje. Sada ćemo razmotriti dvije susjedne orbite koje imaju polumjere dovoljno velike da bi se kvantni brojevi razlikovali točno za jedinicu. Za n polumjer je r (pretpostavivši da je r vrlo velik) dok će za $n+1$ polumjer biti infinitezimalno blizu r, recimo $r+\Delta r$. Tada iz jednadžbe (2) dobivamo:

$$\begin{aligned} E_{r+\Delta r} &= \frac{(n+1)^2\hbar^2}{2m(r+\Delta r)^2} - \frac{kZe^2}{r+\Delta r} \cong \frac{(n+1)^2\hbar^2}{2mr^2}\left(1 - \frac{2\Delta r}{r}\right) - \frac{kZe^2}{r}\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right) \\ &\cong \frac{(n^2+2n)\hbar^2}{2mr^2} - \frac{kZe^2}{r} - \frac{n^2\hbar^2\Delta r}{mr^3} + \frac{kZe^2\Delta r}{r^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Zanemareni su članovi s više od jednog infinitezimalnog faktora (oblika $\Delta r/r$ i $1/n$, uz uvrštavanje $(n+1)^2 = n^2+2n+1$). S obzirom da vrlo velika vrijednost polumjera r podrazumijeva (u klasičnom graničnom slučaju) da $n \to \infty$, možemo izračunati energiju fotona emitiranog u prijelazu s energijske razine $E_{r+\Delta r}$ na E_r pomoću jednadžbe (3):

$$E_{r+\Delta r} - E_r \cong \frac{n\hbar^2}{mr^2} + \frac{\Delta r}{mr^3}(kZe^2mr - n^2\hbar^2). \tag{4}$$

Prema tome, kod prijelaza s putanje polumjera $r+\Delta r$ na putanju polumjera r $(r \to \infty)$ elektron će emitirati foton frekvencije ω tako da je $\hbar\omega = E_{r+\Delta r} - E_r$, kao što slijedi iz jednadžbe (4).

Međutim, u graničnom slučaju kada $r \to \infty$, s obzirom na naš postulat, elektron bi se morao ponašati kao čestica s nabojem koja se podvrgava zakonima klasične fizike. U klasičnom smislu, očekuje se da on zrači na frekvenciji ω koja je jednaka frekvenciji kruženja, tj.

$$\omega = \frac{L}{mr^2} = \frac{n\hbar}{mr^2}. \tag{5}$$

Na taj je način energija prijelaza jednaka $\hbar\omega$ samo ako je izraz u zagradi u (4) jednak nuli:

$$kZe^2 mr = n^2\hbar^2. \tag{6}$$

Tako dobivamo,

$$r = \frac{n^2\hbar^2}{kZe^2 m}, \tag{7}$$

a ukupna energija je dana sa

$$E_r = \frac{n^2\hbar^2}{2mr^2} - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{kZ^2e^4m}{2n^2\hbar^2} = \frac{E_0}{n^2}. \tag{8}$$

Odavde stižemo do formula [2, 4] koje je izveo Bohr. Jednadžba (7) uistinu pokazuje ekvivalenciju dvaju oblika načela korespondencije: onoga kojeg smo formulirali u ovome radu i standardnog oblika [2] istog načela, tj. da u klasičnoj granici, $r \to \infty$ implicira $n \to \infty$.

Zaključak

Vidjeli smo kako se načelo korespondencije, zajedno s temeljnim postulatima Bohrove teorije, može upotrijebiti za izvođenje energijskih razina elektrona u vodikovom atomu umjesto uobičajene jednadžbe "ravnoteže sila". Ovo nije pokušaj alternativnog izvoda, nego prije vježba koja ističe značenje načela korespondencije u kvantnoj teoriji građe atoma. Nadamo se da će ovaj pristup pomoći u shvaćanju ključne uloge načela korespondencije i razumijevanju slaganja klasičnog i kvantnog rezultata. Ovakav pristup također može upotpuniti standardni udžbenički tekst o načelu korespondencije u kontekstu Bohrove teorije [2].

Literatura

[1] N. Bohr, 1913. *Phil. Mag.* **26** 1. Vidi, za detaljniju diskusiju, Born, M. 1989. *Atomic Physics* 8. izd. (New York: Dover) poglavlje 3

[2] A. Beiser, 1987. *Concepts of Modern Physics* 4. izd. (Singapur:McGraw-Hill) poglavlje 4

[3] D. Halliday, R. Resnick, K. S. Krane, 1994. *Physics* vol. 2 (proširena verzija) 4. izd. (Singapur: Wiley) poglavlje 51

[4] H. Semat, 1968. *Introduction to Atomic and Nuclear Physics* 4. izd. (London: Chapman and Hall) poglavlje 8

[5] M. R. Wehr, J. A. Richards, T. W. Adair, 1999. *Physics of the Atom* 4. izd. (New Delhi: Addison-Wesley/ Narosa Publishing House) poglavlje 4

[6] H. E. White, 1934. *Atomic Spectra* int. izd. (Singapur: McGraw-Hill) poglavlja 1 i 2