Primjena CBS nejednakosti u algebarskim nejednakostima za određivanje minimuma i maksimuma u geometriji

Belma Alihodžić[1]

Problemi maksimuma i minimuma ne javljaju se samo u nauci i tehnologiji i njihovim primjenama nego i u svakodnevnom životu. Raznolikost ovih problema je najčešće geometrijske prirode. Naći najkraći put između dva objekta koji zadovoljavaju neki uvjet ili naći figuru minimalnog opsega, površine ili volumena, su tipični problemi koje često susrećemo. Nije neobično čuti da su neki ljudi bili zaokupljeni ovakvim problemom tokom dugo vremena. Npr., Heronovo otkriće je da zraka svjetlosti u prostoru koja polazi iz tačke A i prolazi točkom B poslije refleksije od ogledala prijeđe najkraći mogući put.

Sljedeći problem je tzv. problem figura jednakog opsega, koji je promatrao Descartes (1596. – 1650.): od svih ravninskih figura sa zadanim opsegom, naći onu koja ima najveću površinu. Rješenje tog problema je krug, što je znao i Descartes. Međutim, točan dokaz ovog problema prvi je dao tek Jakob Steiner u 19. stoljeću.

Malo drugačiji problem figura zadanog opsega pripisuje se legendarnoj kraljici Dido iz Kartage. Njoj je lokalno stanovništvo dopustilo da kupi zemljište na obali Afrike "ne veće od onoga što volovska koža može okružiti". Rezanjem volovske kože na uske trake, ona je napravila dugu traku s kojom je mogla okružiti veliku površinu na morskoj

---

[1] Profesorica je matematike na Prvoj bošnjačkoj gimnaziji u Sarajevu, magistrica Metodike nastave matematike.

obali. Kako ovo uraditi na što optimalniji način? Jedno od rješenja je krug čiji je opseg jednak duljini trake.

Veliki broj geometrijskih problema maksimuma i minimuma mogu se riješiti koristeći odgovarajuće algebarske nejednakosti. Mnoge od njih mogu se formulirati kao geometrijski problemi. Tipičan primjer je dobro poznata nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}, \quad x, y \geqslant 0,$$

koju možemo i ovako izreći: *Od svih pravokutnika sa zadanim opsegom kvadrat ima maksimalnu površinu.*

Ovdje ćemo geometrijske probleme maksimuma i minimuma rješavati koristeći Cauchy-Bunjakovski-Schwartzovu nejednakost (CBS) koju ćemo sada navesti.

Teorem. *Za bilo koja dva konačna niza realnih brojeva* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *i* $b = (b_1, \ldots, b_n)$ *vrijedi nejednakost*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right), \tag{1}$$

odnosno,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Pri tome jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni, tj. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Promotrimo sada nekoliko primjera.

Primjer 1. Za bilo koju točku X unutar trokuta ABC, s x, y, z su označene udaljenosti točke X od pravaca BC, AC, AB redom. Naći točku X za koju je suma $x^2 + y^2 + z^2$ minimalna.

Rješenje. Označimo s $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$. Tada je površina ΔABC jednaka zbroju površina trokuta BXC, CXA, AXB, tj. $P_1 = \frac{ax}{2}$, $P_2 = \frac{by}{2}$, $P_3 = \frac{cz}{2}$, odnosno,

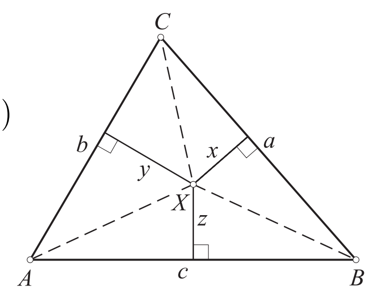
$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}$$

$$\Longrightarrow 2P = ax + by + cz,$$

$$4P^2 = (ax + by + cz)^2 \leqslant \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

(nejednakost CBS)

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{(ax + by + cz)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{4P^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Prema tome, suma $x^2 + y^2 + z^2$ će biti minimalna za one točke X za koje vrijedi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, tj. kada vrijedi jednakost. Dakle, $\min\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{4P^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Primjer 2. Za bilo koju točku X unutar trokuta ABC neka su x, y, z udaljenosti točke X od pravaca $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, tim redom. Naći točku X za koju je minimalno:

a) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$; b) $\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}$.

Rješenje. a) U primjeru 1 dobili smo $2P_{\Delta ABC}=ax+by+cz$. Stavimo $x_1=\sqrt{ax}$, $x_2=\sqrt{by}$, $x_3=\sqrt{cz}$, $y_1=\sqrt{\frac{a}{x}}$, $y_2=\sqrt{\frac{b}{y}}$, $y_3=\sqrt{\frac{c}{z}}$. Tada prema nejednakosti CBS dobivamo:

$$\left(\left(\sqrt{ax}\right)^2+\left(\sqrt{by}\right)^2+\left(\sqrt{cz}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2\right)$$

$$\geqslant\left(\sqrt{ax}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{by}\cdot\sqrt{\frac{b}{y}}+\sqrt{cz}\cdot\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2=(a+b+c)^2,$$

$$(ax+by+cz)\cdot\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\geqslant(a+b+c)^2 \implies \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}=\frac{(a+b+c)^2}{2P_{\Delta ABC}},$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $x=y=z$. Tada se točka X nalazi u središtu upisanog kruga trokuta ABC, odnosno u točki presjeka simetrala njegovih kutova. Dakle,

$$\min\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=\frac{(a+b+c)^2}{2P_{\Delta ABC}}.$$

b) Označimo li s $x_1=\sqrt{ax}$, $x_2=\sqrt{by}$, $x_3=\sqrt{cz}$, $y_1=\sqrt{\frac{1}{ax}}$, $y_2=\sqrt{\frac{1}{by}}$, $y_3=\sqrt{\frac{1}{cz}}$, iz CBS nejednakosti dobivamo:

$$(ax+by+cz)\cdot\left(\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}\right)\geqslant(1+1+1)^2=3^2=9$$

$$\implies \frac{1}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}\geqslant\frac{9}{ax+by+cz}=\frac{9}{2P_{\Delta ABC}},$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $ax=by=cz$. Dakle, imamo

$$\min\left(\frac{1}{ax}+\frac{1}{by}+\frac{1}{cz}\right)=\frac{9}{2P_{\Delta ABC}},$$

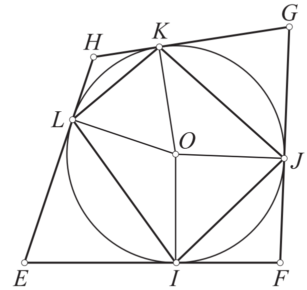
kada je točka X težište ΔABC.

Primjer 3. Neka su površina i opseg tangencijalnog četverokuta C, A_C, P_C, tim redom. Ako su površina i opseg tetivnog četverokuta, čiji vrhovi pripadaju kružnici koja je upisana u četverokut C, A_T, P_T, tim redom, dokazati

$$\frac{A_C}{A_T}\geqslant\left(\frac{P_C}{P_T}\right)^2.$$

Rješenje. Uzmimo četverokut $EFGH$ s kutovima $\sphericalangle E=2\alpha_1$, $\sphericalangle F=2\alpha_2=\sphericalangle G=2\alpha_3$, $\sphericalangle H=2\alpha_4$. Neka je u taj četverokut upisana kružnica polumjera r sa središtem u točki O. Stranice $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$ četverokuta su tangente kružnice u točkama I, J, K, L kao na slici.

Za trokut EIO imamo $|IO| = r$ i $\sphericalangle OEI = \alpha_1$, tada je $|EI| = r \operatorname{ctg} \alpha_1$. Analogno dobijemo i za $|IF|$, $|FJ|$,..., $|LE|$. Dobivamo $P_T = 2r \sum_{i=1}^{4} \operatorname{ctg} \alpha_i$.



Također je, $P_{\Delta EFO} = \frac{1}{2}|EF| \cdot |IO| = \frac{1}{2}|EF| \cdot r$. Na sličan način dobijemo i površine $P_{\Delta FGO}$, $P_{\Delta GHO}$, $P_{\Delta HEO}$ te $A_T = \frac{1}{2} P_T \cdot r$. Također je

$$|IJ| = 2r \sin \sphericalangle IOF = 2r \sin(90^\circ - \alpha_2) = 2r \cos \alpha_2.$$

Isto tako određujemo $|JK|$, $|KL|$, $|LI|$, te dobijemo $P_C = 2r \sum_{i=1}^{4} \cos \alpha_i$. Također vrijedi

$$\sphericalangle IOJ = 180^\circ - \sphericalangle JFI = 180^\circ - 2\alpha_2$$

i tada je površina

$$P_{\Delta IOJ} = \frac{1}{2}|OI| \cdot |OJ| \sin \sphericalangle IOJ = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha_2 = r^2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2.$$

Analogno, imamo $P_{\Delta JOK}$, $P_{\Delta KOL}$, $P_{\Delta LOI}$, te $A_C = r^2 \sum_{i=1}^{4} \sin \alpha_i \cos \alpha_i$.

Uvrštavajući ovo u traženu nejednakost, dobijemo:

$$\frac{r^2 \sum_{i=1}^{4} \sin \alpha_i \cos \alpha_i}{\frac{1}{2} P_T \cdot r} \geqslant \frac{\left(2r \sum_{i=1}^{4} \cos \alpha_i\right)^2}{P_T^2}$$

$$\iff P_T \left(\sum_{i=1}^{4} \sin \alpha_i \cos \alpha_i\right) \geqslant 2r \left(\sum_{i=1}^{4} \cos \alpha_i\right)^2$$

$$\iff 2r \left(\sum_{i=1}^{4} \operatorname{ctg} \alpha_i\right) \left(\sum_{i=1}^{4} \sin \alpha_i \cos \alpha_i\right) \geqslant 2r \left(\sum_{i=1}^{4} \cos \alpha_i\right)^2$$

ili što je ekvivalentno s

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \operatorname{ctg} \alpha_i\right) \left(\sum_{i=1}^{4} \sin \alpha_i \cos \alpha_i\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{4} \cos \alpha_i\right)^2.$$

Stavljajući u nejednakost CBS $a_i = \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha_i}$, $b_i = \sqrt{\sin \alpha_i \cos \alpha_i}$, $i = 1, \ldots, 4$ dobivamo:

$$\begin{gathered}(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_3 + \operatorname{ctg} \alpha_4) \\ \cdot (\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_3 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_4 \cos \alpha_4) \\ \geqslant \big(\sqrt{\operatorname{ctg} \alpha_1}\sqrt{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1} + \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha_2}\sqrt{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2} \\ + \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha_3}\sqrt{\sin \alpha_3 \cos \alpha_3} + \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha_4}\sqrt{\sin \alpha_4 \cos \alpha_4}\big)^2\end{gathered}$$

odnosno,

$$\begin{gathered}(\operatorname{ctg}\alpha_1+\operatorname{ctg}\alpha_2+\operatorname{ctg}\alpha_3+\operatorname{ctg}\alpha_4)\\ \cdot(\sin\alpha_1\cos\alpha_1+\sin\alpha_2\cos\alpha_2+\sin\alpha_3\cos\alpha_3+\sin\alpha_4\cos\alpha_4)\\ \geqslant(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4)^2\,.\end{gathered}$$

Jednakost vrijedi za $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4$.

Primjer 4. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Pokaži da su ove dvije tvrdnje ekvivalentne:

(i) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant 1$;

(ii) $a^2x+b^2y+c^2z>d^2$ za svaki četverokut s duljinama stranicama a, b, c, d.

Rješenje. Pokažimo da iz (i) $\Longrightarrow$ (ii). Pretpostavimo da vrijedi (i). Tada na osnovu CBS nejednakosti za $a_1=a\sqrt{x}$, $a_2=b\sqrt{y}$, $a_3=c\sqrt{z}$, $b_1=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $b_2=\frac{1}{\sqrt{y}}$, $b_3=\frac{1}{\sqrt{z}}$ vrijedi:

$$a^2x+b^2y+c^2z\geqslant\left(a^2x+b^2y+c^2z\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant(a+b+c)^2>d^2,$$

tj. vrijedi (ii).

Pretpostavimo sada da vrijedi (ii) i dokažimo da vrijedi (i).

Sada postoji četverokut s duljinama stranica $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$ i $d=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{n}$, gdje je broj n dovoljno velik. Sada imamo:

$$a^2x+b^2y+c^2z=\frac{x}{x^2}+\frac{y}{y^2}+\frac{z}{z^2}>\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{n}\right)^2.$$

Ako pustimo da $n\to\infty$ dobit ćemo

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2,$$

a odavde $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqslant 1$.

Literatura

[1] T. Andreescu, O. Mushkarov, L. Stoyanov, *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhäuser Basel-Boston-Berlin, 2006.

[2] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[3] O. Bottema, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff off publishing Groningen, The Netherlands, 1969.

[4] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Berlin/ Heidelberg/ New York, 1970.