Nejednakosti s parametrom

Šefket Arslanagić,[1]

U ovom članku ćemo razmatrati neke nejednakosti koje u sebi sadrže neki parametar $a \in R^+$. Ispitivat ćemo koju najveću vrijednost može uzeti taj parametar a da bi vrijedila dana nejednakost. Ovdje ćemo uglavnom koristiti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dva ili više pozitivnih brojeva. Kada uspijemo odrediti traženu vrijednost parametra a, moći ćemo formulirati te nejednakosti u svom najjačem obliku. Ovo će biti veoma interesantan i donekle kreativan posao koji će omogućiti budućim čitaocima ovog članka da slično rješavaju ovakve zadatke i probleme s nejednakostima. Dat ćemo nekoliko primjera takvih nejednakosti.

Zadatak 1. Odrediti najveću moguću vrijednost realnog parametra a tako da za sve realne brojeve x i y $(x \neq y)$ za koje vrijedi $xy = 2$, vrijedi nejednakost:

$$\frac{\left[(x+y)^2-6\right]\left[(x-y)^2+8\right]}{(x-y)^2} \geqslant a.$$

Rješenje. Zbog $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = x^2-2xy+y^2+4xy = (x-y)^2+8$, imamo sada ekvivalentnu nejednakost danoj nejednakosti koja glasi

$$\frac{\left[(x-y)^2+2\right]\left[(x-y)^2+8\right]}{(x-y)^2} \geqslant a.$$

Uvedemo li susptiticiju $(x-y)^2 = z$, dobivamo

$$\frac{\left[(x-y)^2+2\right]\left[(x-y)^2+8\right]}{(x-y)^2} = \frac{(z+2)(z+8)}{z} = \frac{z^2+10z+16}{z}$$
$$= z+10+\frac{16}{z} = 10+4\left(\frac{z}{4}+\frac{4}{z}\right) \geqslant a\,.$$

Zbog nejednakosti $\frac{z}{4}+\frac{4}{z} \geqslant 2$ $(A_2 \geqslant G_2)$ dobivamo $a = 18$, što je tražena vrijednost parametra a. Jednakost vrijedi ako je $z = 4$, tj. $(x-y)^2 = 4$, te $(x+y)^2 = (x-y)^2+8 = 12$. Rješavajući odgovarajuća četiri sistema jednadžbi:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=2\sqrt{3} \end{cases};\quad \begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=2\sqrt{3} \end{cases};\quad \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=-2\sqrt{3} \end{cases};\quad \begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=-2\sqrt{3} \end{cases}.$$

dobivamo da jednakost vrijedi ako je:

$$(x,y) \in \left\{(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1),(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1),(-\sqrt{3}+1,-\sqrt{3}-1),(-\sqrt{3}-1,-\sqrt{3}+1)\right\}.$$

Zadatak 2. Koja je najveća vrijednost parametar $a \in R^+$, tako da nejednakost

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 \geqslant a\left(x_1x_2x_3+x_2x_3x_4\right) \tag{1}$$

vrijedi za sve pozitivne brojeve x_1, x_2, x_3, x_4?

---

[1] Autor je izvanredni profesor na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu; e-pošta: asefket@pmf.unsa.ba

Rješenje. Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine $(A_3 \geqslant G_3)$ tri pozitivna broja imamo:

$$
\begin{aligned}
x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 &= \left(x_1^3+\frac{x_2^3}{2}+\frac{x_3^3}{2}\right)+\left(\frac{x_2^3}{2}+\frac{x_3^3}{2}+x_4^3\right) \\
&\overset{(A_3\geqslant G_3)}{\geqslant} 3\sqrt[3]{x_1^3\cdot\frac{x_2^3}{2}\cdot\frac{x_3^3}{2}}+3\sqrt[3]{\frac{x_2^3}{2}\cdot\frac{x_3^3}{2}\cdot x_4^3}=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\left(x_1x_2x_3+x_2x_3x_4\right) .
\end{aligned}
$$

Jednakost vrijedi ako je $x_1=\dfrac{x_2}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{x_3}{\sqrt[3]{2}}=x_4$. Dakle, najveće a za koje vrijedi nejednakost (1) jednako je $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Zadatak 3. Koja je najveća vrijednost parametar $a\in\mathbf{R}^+$ za koji nejednakost

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\geqslant a\left(x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1\right)$$

vrijedi za sve pozitivne brojeve x_1,x_2,x_3,x_4?

Rješenje. I ovdje, koristeći nejednakost $A_3\geqslant G_3$, imamo:

$$
\begin{aligned}
x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3 &= \left(\frac{x_1^3}{2}+\frac{x_2^3}{2}+\frac{x_3^3}{3}\right)+\left(\frac{x_2^3}{2}+\frac{x_3^3}{3}+\frac{x_4^3}{2}\right)+\left(\frac{x_3^3}{3}+\frac{x_4^3}{2}+\frac{x_1^3}{2}\right) \\
&\overset{(A_3\geqslant G_3)}{\geqslant} 3\sqrt[3]{\frac{x_1^3}{2}\cdot\frac{x_2^3}{2}\cdot\frac{x_3^3}{3}}+3\sqrt[3]{\frac{x_2^3}{2}\cdot\frac{x_3^3}{3}\cdot\frac{x_4^3}{2}}+3\sqrt[3]{\frac{x_3^3}{3}\cdot\frac{x_4^3}{2}\cdot\frac{x_1^3}{2}} \\
&= \frac{3}{\sqrt[3]{12}}\left(x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1\right) .
\end{aligned}
$$

Jednakost se dostiže za $\dfrac{x_1}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{x_2}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{x_3}{\sqrt[3]{3}}=\dfrac{x_4}{\sqrt[3]{2}}$. Najveća vrijednost parametra a je $\dfrac{3}{\sqrt[3]{12}}$.

Zadatak 4. Odrediti najveću vrijednost realnog parametra a za koju nejednakost

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\geqslant a\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5\right)$$

vrijedi za svakih pet realnih brojeva x_1, x_2, x_3, x_4, x_5?

Rješenje. Dokazat ćemo da je tražena maksimalna vrijednost parametra $a\in\mathbf{R}^+$ jednaka $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Zaista, za proizvoljne realne brojeve x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, zbog nejednakosti $A_2\geqslant G_2$, vrijedi:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=\left(x_1^2+\frac{1}{3}x_2^2\right)+\left(\frac{2}{3}x_2^2+\frac{1}{2}x_3^2\right)+\left(\frac{1}{2}x_3^2+\frac{2}{3}x_4^2\right)+\left(\frac{1}{3}x_4^2+x_5^2\right)$$

$$\geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\left(|x_1x_2| + |x_2x_3| + |x_3x_4| + |x_4x_5|\right)$$
$$\geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5\right) .$$

Jednakost se dostiže ako je $x_1 = t$, $x_2 = \sqrt{3}t$, $x_3 = 2t$, $x_4 = \sqrt{3}t$, $x_5 = t$ i tada je

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 12t^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5).$$

Dakle, tražena najveća vrijednost realnog parametra a iznosi $\frac{2}{\sqrt{3}}$, tj. $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Zadatak 5. Dokazati da ne postoji pozitivan realan broj λ tako da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{abc} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{bcd}$$
$$\geqslant \frac{(a+b+c+d)(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}{\lambda a^2b^2c^2d^2}.$$

Rješenje. Nakon množenja dane nejednakosti s $\lambda a^2b^2c^2d^2 > 0$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\lambda\,(a+b+c+d)\,abcd$$
$$\geqslant (a+b+c+d)(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) .$$

Stavimo sada $a = x$ i $b = c = d = y$. Tada je $\lambda xy^3 \geqslant (x+y)^3(3y-x)$, a odavde zbog $x + y > y$: $\lambda xy^3 \geqslant y^3(3y-x)$, te $\lambda x \geqslant 3y - x$.

Uvedemo li supstituciju $y = \beta x$; $(\beta > 0)$, dobivamo $\lambda x \geqslant 3\beta x - x$, odnosno nakon dijeljenja s $x > 0$, $\lambda \geqslant 3\beta - 1$.

Ako uzmemo $\beta = \lambda + \frac{1}{3}$, iz prethodne nejednakosti dobivamo $\lambda \geqslant 3\lambda$ $(\Leftrightarrow 1 \geqslant 3)$, što je istina, tj. dobili smo proturječje. Odavde vidimo da ne postoji nijedan takav pozitivan realan broj λ.

Nadam se da će ovih pet, u potpunosti riješenih, zadataka dobro poslužiti čitateljima, a posebno učenicima koji imaju veći interes za matematiku, da se upotpuni i poveća njihovo znanje potrebno za rješavanje i nešto težih zadataka iz nejednakosti. Naravno, ovdje se pretpostavlja da poznajete izuzetno važne nejednakosti kao što su nejednakosti između brojnih sredina, nejednakost Cauchy-Schwartz-Bunjakovskog i još neke.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] Š. Arslanagić, I. Glogić, *Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematike učenika srednjih škola u Federaciji Bosne i Hercegovine (1995. – 2008.)*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.

[3] G. Baron, B. V. Schmidt, *Österreichische Mathematik-Olympiaden (2000. – 2008.)*, Eigenverlag, Wien, 2009.

[4] Z. Kadelburg, D. Đukić, M. Lukić, I. Matić, *Nejednakosti, Materijali za mlade matematičare*, Sveska 42, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2003.