ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2011. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/ 247.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadaci iz matematike

3287. Nađi cijele brojeve x, y koji zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + 2012 = y^2$?

3288. Dani su reani brojevi x, y takvi da je

$$(x+y)^4 + (x-y)^4 = 4112,$$
$$x^2 - y^2 = 16.$$

Odredi vrijednost od $x^2 + y^2$.

3289. Neka je za $n = 1, 2, \ldots$

$$a_n = \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}.$$

Dokaži da je $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_{20}}$ pozitivan cijeli broj.

3290. Pokaži da su sve realne nultočke polinoma

$$P(x) = x^7 - 14x + 133$$

nenegativne.

3291. Izračunaj vrijednost izraza

$$\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$$

bez korištenja računala.

3292. Kut A trokuta ABC jednak je polovici pravog kuta. Točke M, N su nožišta okomica iz B i C na suprotne stranice. Dokaži da je $|BC|^2 = 2|MN|^2$.

3293. Ako su a, b, c, d duljine stranica tetivnog četverokuta i x, y duljine njegovih dijagonala, dokaži jednakost

$$xy = ac + bd.$$

3294. Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ trokuta ABC s vanjske strane konstruirani su kvadrati $ABEF$, $ACGH$ sa središtima O_1, O_2, tim redom. Ako je M polovište stranice $\overline{BC}$, dokaži da je trokut O_1MO_2 jednakokračan pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu M.

3295. Neka su $x_1, x_2, x_3, \ldots\ x_{n+1}, \ldots$ prirodni brojevi takvi da je

$$1 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n+1} \leq 2n,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dokaži da se svaki pozitivan cijeli broj k može prikazati u obliku $k = x_i - x_j$ za neke $i > j$.

3296. Pravac AD siječe dvije paralelne ravnine π_1, π_2 u točkama B, C, tim redom, tako de ja $|AB| : |BC| : |CD| = p : q : r$. Iz A i D povučeni su pravci koji sijeku π_1, π_2 u E, F i P, Q, tim redom. Pokaži da je

$$(rp + pq)|CF| \cdot |CQ| = (rp + rq)|BE| \cdot |BP|.$$

B) Zadaci iz fizike

OŠ – 330. Izračunaj prosječnu masu, obujam i gustoću zrna papra. Koliko zrna treba za 1 kilogram papra? Ostavite zrna 24 sata u vodi i izračunajte ponovo masu, obujam i gustoću jednog zrna. Koja se od mjerenih veličina najviše promijenila izraženo u postocima?

OŠ – 331. Kockica leda ima brid 2 centimetra. Koliko bi ih trebalo uzeti da se njihovim otapanjem dobije litra vode? Gustoća leda je 900 $\mathrm{kg/m^3}$, a gustoća vode 1000 $\mathrm{kg/m^3}$.

OŠ – 332. Ivan je na oprugu objesio prvo jednu pa zatim drugu kuglicu. S prvom se opruga produljila za 4 cm, a s drugom za 6 cm. Promjer prve kuglice je 6 cm, a druge 8 cm. Koliki je omjer gustoća prve i druge kuglice?

OŠ – 333. Drveni kvadar iz zbirke za fiziku ima masu 300 grama. Faktor trenja između njega i klupe iznosi 0.3. Učenici ga vuku pomoću konca koji puca kad se optereti silom od 12 N (njutna). Kolika je masa tereta koji bi učenici morali staviti na kvadar da konac pukne prilikom povlačenja?

1483. Asteroid se kreće hiperboličnom putanjom oko Sunca. Na velikoj udaljenosti od Sunca imao je brzinu 3500 m / s u odnosu na Sunce, a u perihelu (točki najbližoj Suncu) brzina mu iznosi 55 000 m / s. Kolika je udaljenost asteroida od Sunca u perihelu? Masa Sunca iznosi $2 \cdot 10^{30}$ kg. Rezultat izrazi u astronomskim jedinicama.

1484. Izvor svjetlosti snage 30 W udaljen je 4 m od papira A4 postavljenog tako da svjetlost pada okomito na njega. Odredi (mjerenjem ili teorijski) površinu papira, a zatim snagu koju papir prima od izvora na spomenutoj udaljenosti.

1485. Pri utovaru tereta u brod, vodena linija se pomakne za 9 cm. Ako je površina broda 18 m^2, a gustoća morske vode 1030 $\mathrm{kg/m}^3$, odredi kolika je masa tereta utovarena u brod.

1486. Molekula klora sastoji se od dva atoma klora (Cl_2) i može imati tri različite molekulske težine, ovisno o tome koji od dva stabilna izotopa klora ju čine (težine 35 i 37 m_u). Težine dvoatomnih molekula i njihove učestalosti u prirodnom kloru su:

m	p
$70m_u$	57.411%
$72m_u$	36.718%
$74m_u$	5.871%

Odredi učestalost izotopa klora.

1487. Izvor zvučnih valova vlastite frekvencije $f_0 = 1500$ Hz giba se prema nepomičnom opažaču brzinom 20 m / s. Koju frekvenciju čuje opažač? Kolika je razlika u frekvenciji koju opažač čuje u odnosu na slučaj kad bi izvor mirovao, a opažač se približavao istom brzinom? (razlika je u odnosu na koga miruje medij-zrak). Za brzinu zvuka uzeti 340 m / s.

1488. Homogena kugla kotrlja se po vodoravnoj podlozi. Impuls translatornog gibanja iznosi 1.14 kg m / s, a zamah (moment vrtnje) 0.01824 $\mathrm{kg\,m^2/s}$. Ako je kinetička energija kotrljanja (zbroj translacijske i rotacijske kinetičke energije) 0.4788 J, odredi radijus, masu i gustoću kugle.

1489. Nabijena metalna kugla radijusa 6 cm stvara elektrostatsko polje koje u neposrednoj blizini kugle iznosi 1200 V/ m. Odredi ukupan naboj na kugli i površinsku gustoću naboja.

C) Rješenja iz matematike

3259. *Dokaži da ne postoji prirodan broj n takav da $(n!)$ bude djeljivo s 2^n.*

Rješenje. Uzmimo da je $n! = m \cdot 2^k$ gdje je m neparan broj, a 2^k produkt svih dvojki u broju $n!$.

U $n!$ imamo $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \ldots$ dvojki, tj.

$$\begin{aligned} k &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \ldots \\ &\leqslant \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \ldots \\ &= n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) < n \\ 2^k &= 2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \ldots} < 2^n \end{aligned}$$

tj. $2^n \not| \ 2^k$, a pošto je m neparan broj $2^n \not| \ n!$.

Hamza Merzić (3),
Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo

3260. *U skupu cijelih brojeva riješi jednadžbu*

$$\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Rješenje. Jednadžba je definirana za $x \geqslant -2\sqrt{3}$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Imamo

$$\begin{aligned} &\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \ /\ ^2 \\ &x + 2\sqrt{3} = y + z + 2\sqrt{yz} \\ \iff &[x - (y+z)] + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{yz} \ /\ ^2 \\ \iff &[x-(y+z)]^2 + 4\sqrt{3}[x-(y+z)] + 12 = 4yz \\ \iff &[x - (y+z)]^2 + 4(3 - yz) \\ &\qquad + 4\sqrt{3}[x - (y+z)] = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

Kako je $[x - (y+z)]^2 + 4(3 - yz)$ racionalan broj, a $\sqrt{3}$ je iracionalan, broj uz $\sqrt{3}$ mora biti jednak nuli. Dakle, $x - y - z = 0$. Tada iz $(*)$ dobivamo $yz = 3$. Imamo ove mogućnosti

1) $y = 3$, $z = 1$, $x = y + z = 4$;

2) $y=1,\ z=3,\ x=4$.

Neposrednom provjerom vidi se da su to zaista rješenja.

Lucija Drašinac (3), III. gimnazija, Osijek

3261. *Nađi sve nultočke polinoma*

$$P(x)=x^4-6x^3+18x^2-30x+25,$$

ako je poznato da je zbroj dvije od njih jednak 4.

Rješenje. Nultočke od $P(x)$ su x_1, x_2, x_3, x_4. Neka je $x_1+x_2=4$. Iz prve Vièteove formule imamo $x_1+x_2+x_3+x_4=6$, odakle je $x_3+x_4=2$. Drugu Vièteovu formulu možemo zapisati u obliku

$$x_1x_2+x_3x_4+(x_1+x_2)(x_3+x_4)=18,$$

odakle dobivamo $x_1x_2+x_3x_4=18-4\cdot 2=10$. Koristeći Vièteovu formulu $x_1x_2x_3x_4=25$ vidimo da su x_1x_2, x_3x_4 rješenja kvadratne jednadžbe $u^2-10u+25=0$. Odavde dobivamo $x_1x_2=x_3x_4=5$. Sada su x_1, x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2-4x+5=0$, dok su x_3, x_4 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2-2x+5=0$. Dakle, nultočke od $P(x)$ su $2+i,\ 2-i,\ 1+2i,\ 1-2i$.

Hamza Merzić (3), Sarajevo

3262. *Odredi domenu funkcije*

$$f(x)=\sqrt{\log_{0.2}^3 x+(\log_{0.2}x^3)(\log_{0.2}0.0016x)+36}.$$

Rješenje. Najprije stavljamo uvjet $x>0$; sada uz zamjenu $y=\log_{0.2}x$ funkciju možemo preurediti:

$$\begin{aligned}f(y)&=\sqrt{y^3+3y(4+y)+36}\\&=\sqrt{y^3+3y^2+12y+36}\\&=\sqrt{y^3(y+3)+12(y+3)}\\&=\sqrt{(y+3)(y^2+12)}.\end{aligned}$$

Drugi je faktor pod korijenom uvijek pozitivan pa prvi faktor mora biti nenegativan kako bi korijen bio definiran:

$$\begin{aligned}y+3&\geqslant 0,\\y&\geqslant -3,\\\log_{0.2}x&\geqslant -3,\\x&\leqslant(0.2)^{-3},\\x&\leqslant 125,\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je domena funkcije f interval $\langle 0,125]$.

Kristijan Kvaternik (4), V. gimnazija, Zagreb

3263. *Ako su v_a, v_b, v_c visine trokuta na stranice a, b, c i r polumjer upisane mu kružnice, dokaži nejednakost*

$$(v_a-2r)(v_b-2r)(v_c-2r)\leq r^3.$$

Rješenje. Koristeći formule

$$\begin{aligned}P_\triangle&=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2}=\frac{c\cdot v_c}{2}\\P_\triangle&=s\cdot r\\P_\triangle&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}$$

gdje je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, dobivamo

$$\begin{aligned}&(v_a-2r)(v_b-2r)(v_c-2r)\\&=\left(\frac{2P}{a}-2r\right)\left(\frac{2P}{b}-2r\right)\left(\frac{2P}{c}-2r\right)\\&=\left(\frac{2sr}{a}-2r\right)\left(\frac{2sr}{b}-2r\right)\left(\frac{2sr}{c}-2r\right)\\&=8r^3\cdot\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\end{aligned}$$

a odavde je zbog $abc=4RP$ i

$$(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{P^2}{s}$$

$$\begin{aligned}&(v_a-2r)(v_b-2r)(v_c-2r)\\&=8r^3\cdot\frac{\frac{P^2}{s}}{4RP}=2r^3\cdot\frac{rs}{sR}=2r^4\cdot\frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Odavde zbog poznate Eulerove nejednakosti $R\geqslant 2r$ tj. $\dfrac{1}{R}\leqslant\dfrac{1}{2r}$ dobivamo

$$(v_a-2r)(v_b-2r)(v_c-2r)\leqslant 2r^4\cdot\frac{1}{2r}=r^3.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $R=2r$ tj. za jednakostraničan trokut.

Lucija Drašinac (3), Osijek

3264. *Dokaži nejednakost*

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}\le\frac{n^2x+nx+2n}{4\sqrt{x}}$$

za sve prirodne brojeve n *i sve pozitivne brojeve* x.

Rješenje. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po broju n.

1° *Baza.*
Za $n=1$ nejednakost postaje

$$\begin{aligned}1&\leqslant\frac{x+x+2}{4\sqrt{x}}\\ &\iff 2\sqrt{x}\leqslant x+1\\ &\iff 0\leqslant\left(\sqrt{x}-1\right)^2,\end{aligned}$$

što očito vrijedi za svaki pozitivan broj x.

2° *Pretpostavka.*
Pretpostavimo da $\exists k\in\mathbf{N}$ takav da nejednakost

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k}\leqslant\frac{k^2x+kx+2k}{4\sqrt{x}}$$

vrijedi za sve pozitivne brojeve x.

3° *Korak.*
Sada prema pretpostavci imamo

$$\begin{aligned}&1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\\ &\leqslant\frac{k^2x+kx+2k}{4\sqrt{x}}+\sqrt{k+1},\end{aligned}$$

pa je dovoljno dokazati

$$\begin{aligned}&\frac{k^2x+kx+2k}{4\sqrt{x}}+\sqrt{k+1}\\ &\qquad\leqslant\frac{(k+1)^2x+(k+1)x+2(k+1)}{4\sqrt{x}}\\ &\iff\sqrt{k+1}\leqslant\frac{(2k+1)x+x+2}{4\sqrt{x}}\\ &\iff\sqrt{k+1}\leqslant\frac{(k+1)x+1}{2\sqrt{x}}\\ &\iff\sqrt{(k+1)x}\leqslant\frac{(k+1)x+1}{2},\end{aligned}$$

što prema AG nejednakosti zaista vrijedi za sve pozitivne brojeve x. Ovime je korak indukcije dokazan pa vrijedi tvrdnja zadatka.

Kristijan Kvaternik (4), Zagreb

3265. *Označimo s* $(F_n)_{n\geq 0}$ *Fibonačijev niz,* $(F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,\ n\geq 0)$. *Koristeći determinantu*

$$M=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

pokažite najprije da vrijedi $M^n=(-1)^n$, *a zatim*

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n,\ \textit{za svaki } n\geq 1.$$

Rješenje. Za determinantu M očito vrijedi $M=1\cdot 0-1\cdot 1=-1$ pa vrijedi i $M^n=(-1)^n$. Sada promatrajmo determinantu

$$N=\begin{vmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{vmatrix}.$$

Nad determinantom N ćemo (tim redoslijedom) vršiti sljedeće transformacije:

1. Oduzimat ćemo desni stupac od lijevoga (time se vrijednost determinante neće promijeniti),
2. Zamjenjivat ćemo desni i lijevi stupac (time će se promjenjivati predznak determinante).

Iteriranjem ovih transformacija slijedi

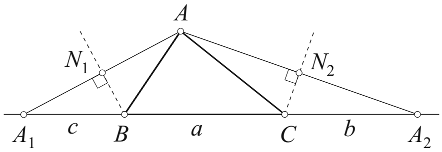
$$\begin{aligned}N&=\begin{vmatrix}F_{n+1}&F_n\\F_n&F_{n-1}\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}F_{n-1}&F_n\\F_{n-2}&F_{n-1}\end{vmatrix}\\ &=-\begin{vmatrix}F_n&F_{n-1}\\F_{n-1}&F_{n-2}\end{vmatrix}\\ &=-\begin{vmatrix}F_{n-2}&F_{n-1}\\F_{n-3}&F_{n-2}\end{vmatrix}\\ &=(-1)^2\begin{vmatrix}F_{n-1}&F_{n-2}\\F_{n-2}&F_{n-3}\end{vmatrix}=\ldots\\ &=(-1)^j\begin{vmatrix}F_{n-j+1}&F_{n-j}\\F_{n-j}&F_{n-j-1}\end{vmatrix}=\ldots\\ &=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}F_2&F_1\\F_1&F_0\end{vmatrix}\\ &=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\\ &=(-1)^{n-1}M\\ &=(-1)^n.\end{aligned}$$

S druge strane, vrijedi $N=F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^2$ pa je tvrdnja zadatka dokazana.

Kristijan Kvaternik (4), Zagreb

3266. *Iz jednog vrha trokuta spuštene su okomice na simetrale vanjskih kutova uz druga dva vrha. Dokaži da je udaljenost nožišta tih okomica jednaka poluopsegu trokuta.*

Rješenje. Uvedimo oznake kao na skici.



Neka zadane okomice AN_1 i AN_2 sijeku pravac BC u točkama A_1 i A_2 redom. Uočimo da je trokut ACA_2 jednakokračan ($|CA| = |CA_2|$) jer su trokuti ACN_2 i A_2CN_2 prema KSK poučku sukladni. Analogno slijedi i da je trokut ABA_1 jednakokračan, tj. $|BA| = |BA_1|$. No zbog činjenice da su ti trokuti jednakokračni točke N_1 i N_2 su polovišta dužina $\overline{AA_1}$ i $\overline{AA_2}$ redom. Zato je dužina $\overline{N_1N_2}$ srednjica u trokutu AA_1A_2 pa je njena duljina

$$|N_1N_2| = \frac{|AA_1|}{2} = \frac{|A_1B| + |BC| + |CA_2|}{2} = \frac{|AB| + |BC| + |CA|}{2},$$

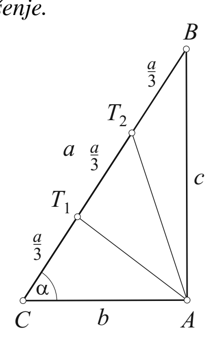
čime je tvrdnja zadatka dokazana.

Kristijan Kvaternik (4), Zagreb

3267. *Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom uz vrh A. Točke T_1, T_2 dijele dužinu $\overline{BC}$ na tri jednaka dijela. Dokaži da vrijedi jednakost*

$$|AT_1|^2 + |AT_2|^2 = \frac{5a^2}{9}.$$

Prvo rješenje.



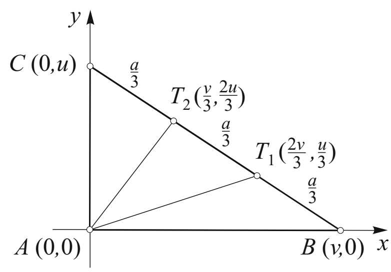
Prema kosinusovu poučku za trokute AT_1C i AT_2C vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} |AT_1|^2 &= \frac{a^2}{9} + b^2 - \frac{2}{3}ab\cos\alpha \\ |AT_2|^2 &= \frac{4}{9}a^2 + b^2 - \frac{4}{3}ab\cos\alpha \end{aligned}\right\} +$$

$$\begin{aligned} |AT_1|^2 + |AT_2|^2 &= \frac{5a^2}{9} + 2b^2 - 2ab\cos\alpha \\ &= \frac{5a^2}{9} + 2b(b - a\cos\alpha) \\ &= \frac{5a^2}{9} + 2b\left(b - a\cdot\frac{b}{a}\right) = \frac{5a^2}{9}. \end{aligned}$$

Lucija Drašinac (3), Osijek

Drugo rješenje. Prema uvjetima zadatka nacrtajmo dani trokut u kordinatnom sustavu i odredimo koordinate točaka A, B, C, T_1 i T_2.



Sa slike lako računamo traženo, odnosno

$$\begin{aligned} |AT_1|^2 &= \left(\frac{2v}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{u}{3} - 0\right)^2 \\ &= \frac{4v^2}{9} + \frac{u^2}{9} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} |AT_2|^2 &= \left(\frac{v}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2u}{3} - 0\right)^2 \\ &= \frac{v^2}{9} + \frac{4u^2}{9} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= a^2 = (v-0)^2 + (0-u)^2 \\ &= v^2 + u^2. \end{aligned} \tag{3}$$

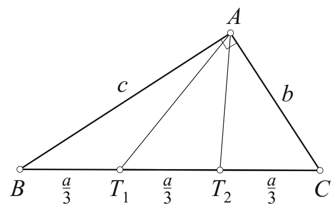
Zbrojimo li (1) i (2) dobijemo

$$\begin{aligned} |AT_1|^2 + |AT_2|^2 &= \frac{5v^2}{9} + \frac{5u^2}{9} \\ &= \frac{5}{9}(v^2 + u^2) = \frac{5a^2}{9}. \end{aligned}$$

Kuzma Pecotić (4),
Gimnazija "Čedo Žic", Krk

Treće rješenje. Primjenom Stewartovog teorema na trokute BT_2A i T_1CA dobivamo

$$|AB|^2 \cdot |T_1T_2| + |AT_2|^2 \cdot |BT_1|$$
$$= |BT_2|(|AT_1|^2 + |BT_1| \cdot |T_1T_2|),$$
$$|AT_1|^2 \cdot |T_2C| + |AC|^2 \cdot |T_1T_2|$$
$$= |T_1C|(|AT_2|^2 + |T_1T_2| \cdot |T_2C|).$$



Kako je ABC pravokutan trokut vrijedi $a^2 = b^2 + c^2$. Uvrštavanjem dobivamo

$$c^2 \cdot \frac{a}{3} + |AT_2|^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}\left(|AT_1|^2 + \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3}\right) / \cdot \frac{3}{a}$$
$$|AT_1|^2 \cdot \frac{a}{3} + b^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}\left(|AT_2|^2 + \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3}\right) / \cdot \frac{3}{a}$$

$$c^2 + |AT_2|^2 = 2\left(|AT_1|^2 + \frac{a^2}{9}\right)$$
$$|AT_1|^2 + b^2 = 2\left(|AT_2|^2 + \frac{a^2}{9}\right)$$

$$(|AT_1|^2 + |AT_2|^2) + b^2 + c^2$$
$$= 2(|AT_1|^2 + |AT_2|^2) + \frac{4a^2}{9}$$

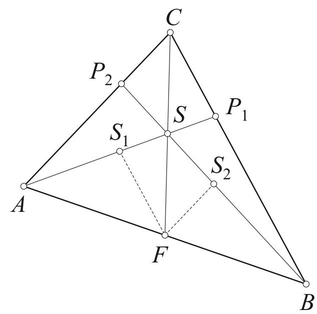
tj. $|AT_1|^2 + |AT_2|^2 = \dfrac{5a^2}{9}$.

Ur.

3268. *Točka F je polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC. Točke S_1 i S_2 su težišta trokuta AFC i BFC. Pravci AS_1 i AS_2 sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ u točkama P_1, P_2, tim redom. Dokaži da je četverokut $S_1S_2P_1P_2$ paralelogram.*

Rješenje. Označimo sjecište pravaca AP_1 i BP_2 sa S. Budući da pravac FS_1 raspolavlja stranice $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC, on sadrži i srednjicu trokuta ABC pa je $FS_1 \parallel BC$, odnosno $FS_1 \parallel BP_1$. Zato je $\overline{FS_1}$ srednjica trokuta ABP_1 pa vrijedi $|AS_1| = |S_1P_1|$ (jer je S_1 očito polovište stranice $\overline{AP_1}$). Osim toga, budući da je S_1 težište trokuta ACF, vrijedi $|AS_1| = 2|S_1S|$ pa je

$$|AS_1| = |S_1S| + |SP_1|,$$
$$2|S_1S| = |S_1S| + |SP_1|,$$
$$|S_1S| = |SP_1|.$$



Analogno dobijemo da je točka S polovište dužine $\overline{S_2P_2}$. To znači da se dijagonale četverokuta $S_1S_2P_1P_2$ raspolavljaju pa je taj četverokut paralelogram.

Kristijan Kvaternik (4), Zagreb

3269. *Ako su α, β, γ kutovi trokuta za koje vrijedi*

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1,$$

dokaži da je $\alpha = \beta = 45^\circ$.

Rješenje. Iskoristimo li očitu nejednakost $\sin\gamma \leqslant 1$, dobivamo

$$1 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$\leqslant \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta),$$

pa je očito

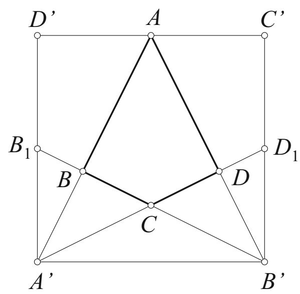
$$\cos(\alpha - \beta) = 1, \qquad \sin\gamma = 1,$$
$$\alpha - \beta = 0, \qquad \gamma = \frac{\pi}{2},$$
$$\alpha = \beta,$$

odakle je $\alpha = \beta = 45^\circ$.

Kristijan Kvaternik (4), Zagreb

3270. *Točke A, B_1 i D_1 su polovišta stranica $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$, $\overline{B'C'}$ kvadrata $A'B'C'D'$. Vrhovi deltoida $ABCD$ su $B = AA' \cap B_1B'$, $C = A'D_1 \cap B'B_1$, $D = B'A \cap A'D_1$. Ako je a duljina stranice kvadrata, odredi površinu deltoida.*

Rješenje. Očito je $P(AB'C') = \dfrac{a^2}{4} = P(AA'D')$. S druge strane, točka C je jednako udaljena od pravaca $A'B'$ i B_1D_1 jer je to sjecište dijagonala pravokutnika $A'B'D_1B_1$ pa je duljina visine trokuta $A'B'C$ na stranicu $\overline{A'B'}$ jednaka $\dfrac{a}{4}$ – dakle, $P(A'B'C) = \dfrac{a^2}{8}$.



Nadalje, iz $\sphericalangle D_1A'B' = \sphericalangle AB'C'$ slijedi $A'D_1 \perp B'A$ pa je

$$|B'D| = \frac{|A'B'| \cdot |B'D_1|}{|A'D_1|} = \frac{a}{\sqrt{5}},$$

odnosno $|A'D| = \sqrt{|A'B'|^2 - |B'D|^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Odavde je $P(A'B'D) = \dfrac{a^2}{5}$ pa je konačno

$$P(ABCD) = P(A'B'C'D') - 2P(AB'C') - 2P(A'B'D) + P(A'B'C),$$

$$P(ABCD) = a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{2a^2}{5} + \frac{a^2}{8} = \frac{9}{40}a^2.$$

Kristijan Kvaternik (4), Zagreb

3271. *Koliko igračih kockica treba baciti da bude maksimalna vjerojatnost da će se pojaviti točno jedna šestica?*

Rješenje. Pretpostavimo da bacamo n kockica. Tada se šestica može pojaviti na točno jednoj kockici na ukupno n, dok se na svakoj od preostalih $n-1$ kockica može pojaviti 5 različitih brojeva. Zato je broj povoljnih slučajeva $n \cdot 5^{n-1}$. Ukupan je broj slučajeva jednak 6^n (jer se na svakoj kockici može pojaviti 6 različitih brojeva) pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p(n) = \frac{n \cdot 5^{n-1}}{6^n} = \frac{n}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Dobivena funkcija p će rasti sve dok vrijedi:

$$\frac{n-1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} < \frac{n}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n,$$

$$\frac{n-1}{5} < \frac{n}{6},$$

$$n < 6,$$

tj. $n \leqslant 5$ (jer je $n \in \mathbf{N}$). S druge strane, funkcija p će padati za:

$$\frac{n}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{n+1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1},$$

$$\frac{n}{5} > \frac{n+1}{6},$$

$$n > 5,$$

tj. $n \geqslant 6$. Za $n = 5$ i $n = 6$ vrijedi:

$$p(5) = \frac{5}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = p(6),$$

pa je tražena vjerojatnost maksimalna kad bacamo 5 ili 6 kockica.

Kristijan Kvaternik (4), Zagreb

3272. *Dan je tetraedar $ABCD$. Na težišnicama $\overline{AM}$, $\overline{DN}$ strana ACD, ABD nalaze se točke E i F takve da je $EF \| BC$. Odredi omjer $\dfrac{|EF|}{|BC|}$.*

Rješenje. Neka je a duljina brida tetraedra. Postavimo tetraedar u $Oxyz$ prostor tako da je vrh A u ishodištu, pravac AB na osi apscisa, a ravnina ABC u Oxy ravnini. Tada za vrhove tetraedra i polovišta dobivamo sljedeće koordinate:

$$A\,(0,0,0), \qquad B\,(a,0,0),$$

$$C\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right), \qquad D\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{6}, \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),$$

$$M\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{a\sqrt{6}}{6}\right), \qquad N\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right).$$

Pritom smo koristili formule za radijus upisane i opisane kružnice jednakostraničnog trokuta.

Neka točke E i F imaju koordinate $E(x_1, y_1, z_1)$ i $F(x_2, y_2, z_2)$. Iz linearne zavisnosti vektora postoje $p, q, r \in \mathbf{R} \setminus 0$ takvi da vrijedi

$$\overrightarrow{AE}=p\cdot\overrightarrow{AM},\quad \overrightarrow{NF}=q\cdot\overrightarrow{ND},\quad \overrightarrow{FE}=r\cdot\overrightarrow{BC},$$

odnosno,

$$x_1\vec{\imath}+y_1\vec{\jmath}+z_1\vec{k}=\frac{pa}{2}\vec{\imath}+\frac{pa\sqrt{3}}{3}\vec{\jmath}+\frac{pa\sqrt{6}}{6}\vec{k},$$

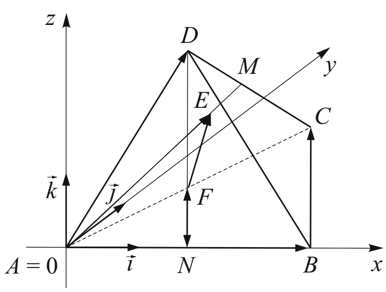
$$\left(x_2-\frac{a}{2}\right)\vec{\imath}+y_2\vec{\jmath}+z_2\vec{k}=\frac{qa\sqrt{6}}{6}\vec{\jmath}+\frac{qa\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\vec{k}.$$

Kada drugu od gornje dvije jednadžbe oduzmemo od prve i od obje strane o duzmemo $\frac{a}{2}\vec{\imath}$, dobit ćemo

$$(x_1-x_2)\vec{\imath}+(y_1-y_2)\vec{\jmath}+(z_1-z_2)\vec{k}$$
$$=\frac{p-1}{2}a\vec{\imath}+\frac{a\sqrt{3}}{3}\left(p-\frac{q}{2}\right)\vec{\jmath}+\frac{a\sqrt{2}}{3}\left(\frac{p}{2}-q\right)\vec{k},$$

to jest,

$$\overrightarrow{FE}=\frac{p-1}{2}a\vec{\imath}+\frac{a\sqrt{3}}{3}\left(p-\frac{q}{2}\right)\vec{\jmath}+\frac{a\sqrt{2}}{3}\left(\frac{p}{2}-q\right)\vec{k}.$$



S druge je strane

$$\overrightarrow{FE}=-\frac{ar}{2}\vec{\imath}+\frac{ar\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$$

pa izjednačavanjem koeficijenata uz jedinične vektore u dobivenim jednakostima dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} r=1-p \\ \frac{r}{2}=\frac{1}{3}\left(p-\frac{q}{2}\right) \\ p=2q \end{cases}$$

Kao rješenje ovog sustava dobijemo trojku $(p,q,r)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ pa slijedi

$$\overrightarrow{FE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},$$

$$\frac{|EF|}{|BC|}=\frac{1}{3}.$$

Kristijan Kvaternik (4), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 322. *Učiteljica je na dodatnoj nastavi fizike učenicima dala dvije vrste otpornika. Jedni su imali dvostruko veći otpor od drugih. Učenici su dobili jednaki broj jačih i slabijih otpornika s cijelim brojevima Ω i ukupno ih nije bilo više od 20. Kad su ih sve spojili paralelno, izmjerili su njihov ukupni otpor* $0.2\,\Omega$. *Koliko su učenici imali otpornika i koliki su njihovi otpori?*

Rješenje.

$$R_1=2R_2$$
$$R=0.2\ \Omega$$
$$n_1=n_2=n$$
$$\underline{n\leqslant 10}$$
$$n=?$$
$$\frac{1}{R}=\frac{n}{R_1}+\frac{n}{R_2}$$
$$\frac{1}{R}=\frac{n}{2R_2}+\frac{n}{R_2}=\frac{3n}{2R_2}$$

Kad uvrstimo $\frac{1}{R}=5$ slijedi $n=\frac{10R_2}{3}$, iz čega vidimo da R_2 mora biti djeljiv s 3, odnosno R_2 je upravo jednak 3 Ω jer je n manje ili jednako 10.

$$R_1=6\ \Omega,\qquad n=10.$$

Učenici su imali 20 otpornika, a njihovi su otpori iznosili 3 Ω i 6 Ω.

Domagoj Dorešić (7),
Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 323. *Kad se u menzuru nalije određena količina vode njezina visina je 20 centimetara. Kolika će biti visina tekućine ako u jednaku menzuru natočimo jednaku masu alkohola? Alkohol ima gustoću* $800\,kg/m^3$, *a gustoća vode je* $1000\,kg/m^3$.

Rješenje.

$$\rho_v=1000\ \mathrm{kg/m^3}$$
$$\rho_a=800\ \mathrm{kg/m^3}$$
$$h_v=20\ \mathrm{cm}$$
$$\underline{m_v=m_a}$$

$h_a = ?$

$m_v = m_a$

$\rho_v \cdot V_v = \rho_a \cdot V_a$

$\rho_v \cdot A \cdot h_v = \rho_a \cdot A \cdot h_a$

A je površina dna menzure.

$$h_a = \rho_v \cdot \frac{h_v}{\rho_a} = 25 \text{ cm}.$$

Kristijan Zdelarec (7), Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 324. *Herman Potočnik je prvi izračunao visinu na kojoj treba kružiti geostacionarni satelit i njegovu brzinu. Takav satelit je uvijek iznad iste točke na Zemlji. Bilo je to još 1928. godine, 35 godina prije nego je lansiran prvi geostacionarni satelit. Izračunao je da brzina satelita mora biti* $3080\,m/s$. *Odredi visinu na kojoj kruži takav satelit. Prosječni polumjer Zemlje iznosi* $6371\,km$, *a period njene rotacije je 23 sata 56 minuta i 4 sekunde.*

Rješenje.

$v = 3080 \text{ m/s}$

$t = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}$

$\underline{R_Z = 6371 \text{ km}}$

$h = ?$

Satelit se oko Zemlje giba po kružnici radijusa r.

$$v = \frac{2r\pi}{t}$$

$$r = \frac{vt}{2\pi}$$

$$r = \frac{3080 \text{ m/s} \cdot 86\,164 \text{ s}}{2 \cdot \pi}$$

$r = 42\,237\,353.7 \text{ m} = 42\,237 \text{ km}$

$r = R_z + h$

$h = r - R_z$

$h = 42\,237 \text{ km} - 6371 \text{ km}$

$h = 35\,866 \text{ km}.$

Domagoj Dorešić (7), Zagreb

OŠ – 325. *Zemljin je polumjer oko* 3.7 *puta veći od Mjesečevog, a njena je masa 81 puta veća od mase Mjeseca. Ako je prosječna gustoća Zemlje* $5515\,kg/m^3$ *kolika je prosječna gustoća Mjeseca? Pretpostavi da su oba tijela oblika kugle.*

Rješenje.

$R_Z = 3.7R_M$

$m_Z = 81m_M$

$\underline{\rho_Z = 5515 \text{ kg/m}^3}$

$\rho_M = ?$

$m_Z = 81m_M$

$$\rho_Z \cdot \frac{4}{3}R_Z^3 \cdot \pi = 81 \cdot \rho_M \cdot \frac{4}{3}R_M^3 \cdot \pi$$

$\rho_Z \cdot R_Z^3 = 81 \cdot \rho_M \cdot R_M^3$

$\rho_Z \cdot (3.7R_M)^3 = 81 \cdot \rho_M \cdot R_M^3$

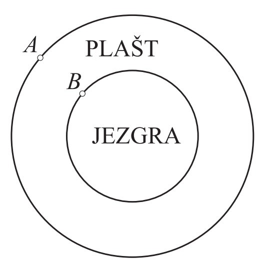
$\rho_Z \cdot 3.7^3 = 81 \cdot \rho_M$

$$\rho_M = \frac{\rho_Z \cdot 3.7^3}{81} = \frac{5515 \text{ kg/m}^3 \cdot 3.7^3}{81}$$

$\rho_M = 3448.8 \text{ kg/m}^3.$

Krešimir Cervelin (7), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1469. *Zemljinu unutrašnjost ugrubo možemo podijeliti na plašt i jezgru (na slici). Na površini Zemlje (točka* A*) jačina gravitacijskog polja je* $9.83\,m/s^2$, *a na granici jezgre i plašta (točka* B*)* $10.7\,m/s^2$. *Ako je radijus Zemlje* $6371\,km$, *i radijus jezgre* $3486\,km$, *odredi prosječnu gustoću jezgre i plašta, te Zemlje kao cjeline.*



Rješenje. Neka su r, m, ρ_j i g_j radijus, masa i gustoća jezgre, te jačina polja u točki B. Neka su R, M, ρ i g radijus, masa i gustoća cijele Zemlje, te jačina polja u točki A.

$$g_j = \frac{Gm}{r^2} \implies m = \frac{g_j r^2}{G} = 1.95 \cdot 10^{24}\ \text{kg},$$
$$\rho_j = \frac{m}{4/3 r^3 \pi} = 11000\ \text{kg}/\text{m}^3.$$

Masa i gustoća cijele Zemlje su analogno:

$$M = \frac{gR^2}{G} = 5.98 \cdot 10^{24}\ \text{kg},$$
$$\rho = \frac{M}{(4/3)R^3\pi} = 5500\ \text{kg}/\text{m}^3.$$

Razlika dobivenih masa podijeljena s razlikom volumena daje gustoću plašta:

$$m_p = M - m = 4.03 \cdot 10^{24}\ \text{kg},$$
$$\rho_p = \frac{m_p}{(4/3)\pi(R^3 - r^3)} = 4450\ \text{kg}/\text{m}^3.$$

Lovro Čupić (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1470. *Određivanje starosti uzorka "metodom C-14" zasniva se na raspadu radioaktivnog izotopa* ^{14}C, *s vremenom poluživota 5730 godina. Kolika je starost uzorka ako je izmjereno da aktivnost iznosi 73% početne aktivnosti?*

Rješenje. Uz oznaku A_0 za početnu aktivnost i T za vrijeme poluraspada, za aktivnost u trenutku t vrijedi:

$$A(t) = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Uvrstimo li $A(t) = 0.73A_0$ i $T = 5730$ godina dobivamo

$$t = -T\log_2 \frac{0.73A_0}{A_0} = -5730 \cdot \frac{\log 0.73}{\log 2},$$
$$t = 2601.6\ \text{godina}.$$

Kristijan Kvaternik (4), Zagreb

1471. *Željezna plutača ima oblik kugle, sa željeznom opnom debljine d, šuplje u sredini (ispunjeno zrakom zanemarive mase). Ako je radijus kugle 12.7 cm, a gustoća željeza 7870 kg/m^3, odredi debljinu d željeza za koju kugla pluta do polovice uronjena u vodu. Gustoća vode je 1000 kg/m^3.*

Rješenje. Ako kugla miruje, sila uzgona je iznosom jednaka težini plutače:

$$U = mg = \rho_{Fe} V_{Fe} g.$$

Volumen željeza računamo tako da od volumena vanjske kugle ($r = 12.7$ cm) oduzmemo volumen unutarnje ($r - d$),

$$V_{Fe} = \frac{4}{3}\pi(r^3 - (r-d)^3).$$

Sila uzgona je jednaka težini istisnute vode, dakle umnošku volumena vanjske polukugle i gustoće vode:

$$U = \frac{2}{3}\pi r^3 \rho_v g.$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$\frac{2}{3}\pi r^3 \rho_v g = \frac{4}{3}\pi(r^3 - (r-d)^3)\rho_{Fe} g.$$

Odatle je

$$d = r\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_v}{2\rho_{Fe}}}\right) = 0.275\ \text{cm}.$$

Lovro Čupić (3), Zagreb

1472. *Kojom se maksimalnom brzinom može kretati automobil mase 900 kg na uzbrdici nagiba 7°, ako je koeficijent trenja kotrljanja kotača s podlogom 0.08, a snaga motora 58 kW? Navedi koje sve sile djeluju na automobil.*

Rješenje. Duž smjera gibanja, na automobil djeluju vučna sila motora, sila trenja i komponenta težine duž kosine. Budući da se automobil giba konstantnom brzinom, zbroj tih sila jednak je nuli:

$$F_v - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$$
$$F_v = 900 \cdot 9.81 \cdot (0.08\cos 7^\circ + \sin 7^\circ)$$
$$= 1777\ \text{N}.$$

Snaga motora je brzina obavljanja rada:

$$P = \frac{W}{t} = F_v \cdot \frac{s}{t} = F_v \cdot v.$$

Slijedi $v = \dfrac{P}{F_v} = 32.64\ \text{m}/\text{s}$.

Lovro Čupić (3), Zagreb

1473. *Divergentna leća stvara virtuelnu (prividnu) sliku predmeta udaljenu 20 cm od tog predmeta. Na kojoj je udaljenosti predmet od leće, ako je jakost leće −3.25 dpt?*

Rješenje. Uz oznake na slici,

$$d = x - |x'| = x + x' = 20 \text{ cm}.$$

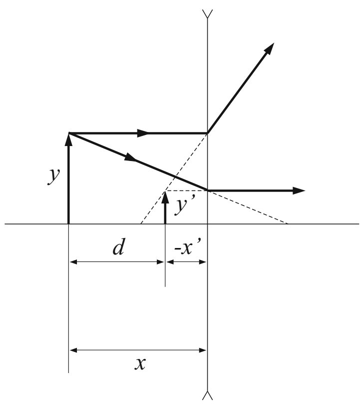
Jednadžba leće je:

$$j = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'}.$$

Uvrstimo $j = -3.25 \text{ m}^{-1}$ i $x' = 0.2 - x$,

$$-3.25 = \frac{1}{x} + \frac{1}{0.2 - x},$$

$$x^2 - 0.2x - \frac{0.2}{3.25} = 0.$$



Pozitivno rješenje je $x = 0.367 \text{ m} = 36.7$ cm.

Maja Vatavuk (3),
Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik

1474. *Žica duljine* $40\,cm$ *nategnuta je silom* $224\,N$. *Masa žice je* $0.08\,kg$. *Odredi brzinu širenja valova duž žice. Kojim sve frekvencijama između* 500 *i* $600\,Hz$ *žica može titrati?*

Rješenje. Brzina valova iznosi:

$$v = \sqrt{N \cdot \frac{L}{m}} = 33.466 \text{ m/s},$$

gdje je N napetost žice, L duljina i m masa žice. Osnovna frekvencija titranja odgovara stojnom valu duljine $2L$:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = 41.833 \text{ Hz}.$$

Ostale moguće frekvencije su cjelobrojni višekratnici osnovne,

$$f_n = n \cdot f_1$$

Između 500 i 600 Hz su

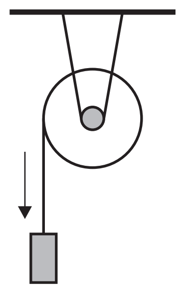
$$f_{12} = 502 \text{ Hz},$$

$$f_{13} = 543.83 \text{ Hz},$$

$$f_{14} = 585.66 \text{ Hz}.$$

Lovro Čupić (3), Zagreb

1475. *Kolotura (homogeni disk) mase* $2.8\,kg$, *radijusa* $10\,cm$ *učvršćena je tako da se može okretati oko osovine bez trenja. Na koloturu je namotano uže zanemarive mase, a na kraju užeta visi uteg mase* $0.84\,kg$ *(na slici). Koliko će biti ubrzanje utega? Kolika je sila napetosti užeta?* $(g = 10\,m/s^2)$



Rješenje. Moment inercije valjka je $I = \frac{m_v r^2}{2}$, a kutna akceleracija $\alpha = \frac{a}{r}$, gdje je a obodna akceleracija valjka i jednaka je akceleraciji utega. Napetost užeta $N = mg - ma$ uzrokuje moment sile $M = Nr = I\alpha$. Sređivanjem dobivamo:

$$a = \frac{mg}{m + m_v/2} = 3.75 \text{ m/s}^2,$$

$$N = m(g - a) = 5.25 \text{ N}.$$

Lovro Čupić (3), Zagreb