Andrija Bonifačić

MARIN GETALDIĆ O ODREĐIVANJU POLUMJERA ZEMLJE

Prikaz jednog problema
iz djela »De resolutione et compositione mathematica«[1]

Dubrovački matematičar XVII. stoljeća Marin Getaldić (1568.—1626.) ističe se više kao teoretičar nego kao praktičar koji pristupa matematičkim problemima radi praktične[2] primjene. Njegovu pažnju posebno zaokuplja metodološki pristup geometrijskim problemima koje obrađuje sintetičkom metodom starih, za koje matematika i nije bila drugo nego geometrija, gdje su bili brojevi dužine i njihovi umnošci površine. Taj klasični pristup geometrijskim problemima u njegovo je vrijeme obogaćen odličnim pomagalom algebarskom analizom francuskog matemati-

[1] *Marini Ghetaldi, patritii Ragusini mathematici praestantissimi.* De resolutione et compositione mathematica libri quinque. Opus posthumum. Romae, ex typographia Reverendae Camerae Apostolicae MDCXXX.

[2] Među djelima Marina Getaldića koja mogu imati praktičnu primjenu u optici, najprije se misli na djelo *Neki stavci o paraboli,* objavljeno 1603. koje se često označuje kao djelo koje raspravlja o paraboli i o zrcalu za paljenje (de parabola et speculo ustorio), dok je, u stvari, sadržaj toga djela posve teorijske naravi. Tu se, naime, dokazuje da su presjeci kosog kao i nejednakostraničnog stošca — koji su paralelni s jednom izvodnicom — isto tako parabole kao što su to i presjeci uspravnoga jednakostraničnoga stošca.

Još su veću zabunu stvorili Getaldićevi životopisci Crijević i Appendini kada su proširili pogrešan navod nizozemskog matematičara G. J. Vossa (1577—1649), da je Getaldić napisao djelo *»De radiis visus et lucis in vitris perspectivis et iride«,* a nije ga napisao Getaldić, nego njegov zemljak Rabljanin Markantun de Dominis; koje je izašlo u Veneciji 1611.

Nesumnjivo je ta zabuna pridonijela tomu da su se optičarske radionice kod nas nazvale Getaldićevim imenom, što se može smatrati sretnim slučajem, jer se ne smije Getaldiću poreći svaka veza s primijenjenom geometrijom, posebno s optikom. Brat Getaldićev, Jakov Getaldić, šaljući u Rim rukopis »De resolutione...« kardinalu Barberiniju, priložio je kao dar »jedno parabolično zrcalo koje je napravio sam gospodin Marin — uno Specchio Parabolico, fatto gittare dallo stesso Signore Marino«. (Vidi *Stipanić dr. Ernest,* Marin Getaldić, Beograd, 1961. str. 149. i *Dadić Žarko,* Marin Getaldić, Sabrana djela I, str. 81—83) čara Françoisa Viètea s kojim je Getaldić prijateljevao i surađivao. Getaldić se proslavio upravo s tim što je Vièteovu algebarsku analizu prihvatio i primijenio je pri rješavanju geometrijskih problema, te je tako utemeljio put Descartesovoj analitičkoj geometriji.

Važno je naglasiti da se u Getaldića algebarska analiza pri rješavanju geometrijskih problema nije toliko osamostalila da bi geometrija postala analitičkom, nego je ostala u službi klasične sintetičke metode kojoj je Getaldić do kraja ostao vjeran, te nakon algebarske analize nikad ne propušta gemetrijsku sintezu i konstrukciju geometrijskog problema. U prvom razdoblju znanstvenog djelovanja njome se jedino služio,[3] a u drugom razdoblju to jest u posljednjem svojem djelu De resolutione et compositione mathematica koje je objelodanjeno četiri godine poslije njegove smrti, služi se i algebarskom analizom, ali tako da ona uvijek ostaje u službi klasične sintetičke metode.

Pošto je, dakle, taj uzajamni odnos analize i sinteze za Getaldića toliko važan, smatram vrijednim da se što vjernije prikaže poneki primjer iz navedenog djela o matematičkoj analizi i sintezi radi osvjetljenja toga osnovnoga metodološkog pristupa.

Kao primjer uzeo sam treći problem četvrte knjige, što ga je autor, možda kao jednoga od najsloženijih ostavio za posljednje mjesto među problemima koji spadaju u algebru,[4] a zanimljiv

[3] Uspoređujući ranije Getaldićeve radove, osobito »Zbirku različitih problema«, s njegovim posljednjim djelom, koje je ovdje obrađeno, vidi se da on tek u ovom posljednjem djelu upotrebljava algebarsku analizu. Ali »postoji dosta razloga da se vjeruje kako je Getaldić istodobno zasnovao djelo *Zbirka različitih problema* i djelo *O matematičkoj analizi i sintezi*. Probleme koje je rješavao u ovoj zbirci rješavao je opet u djelu *O matematičkoj analizi i sintezi*... Tako je u isto doba započeo dva svoja djela, metodološki potpuno različita, dapače metodološki suprotna. To je učinio svjesno sa željom da najprije prikaže rješenja problema postupcima koji nisu u okviru Vièteove algebarske metode, a kasnije je htio da prikaže upravo snagu analitičko-sintetičkog postupka, i to vrlo općenito«. Usp. Žarko Dadić, predgovor Zbirci različitih problema, Sabrana djela I, Zagreb 1972, str. 107.

[4] Za smještaj problema, što ga odabiremo za obradbu u ovoj radnji, dobro je napomenuti da su u Getaldićevu djelu obrađeni teoremi i problemi ovim redom: U prvoj knjizi obrađeno je 11 teorema i 7 problema koji dovode do linearne algebarske relacije. U drugoj knjizi obrađeno je 7 teorema i 9 problema koji dovode u algebarskoj analizi do omjera i razmjera. U trećoj se obrađuju 3 kanona i 7 problema koji dovode do kvadratne relacije. U četvrtoj knjizi najprije dokazuje 3 teorema koji dovode do relacija razmjera, a zatim postavlja i riješava 3 problema kvadratnih relacija. Posljednji od njih, treći, obrađen je u ovom radu. Problemi četiriju prvih knjiga spadaju pod algebru u tom smislu da se pomoću algebarske analize ukazuje na određeno njihovo rješenje. U petoj knjizi obrađuju se dopunski problemi koji ili nemaju rješenja ili ih imaju bezbroj (usp. Andrija Bonifačić, *Gdje se je Marin Getaldić najviše približio Descartesu*, Anali 1978, svezak XV—XVI) ili pak »ne spadaju pod algebru te se rješavaju metodom kakvom su se služili stari« — kako autor veli na početku pete knjige.

je u geometriji i astronomiji za određivanje polumjera Zemlje. Poticaj za taj izbor je neizvršeno obećanje prof. Otona Kučere da će se navratiti »na interesantni predlog za određenje polumjera zemaljskoga«,[5] na taj izbor nije utjecalo ni to što je isti problem obradio Nikola Čubranić.[6] Čubranić, naime, promatra problem s geodetskog gledišta pa analizira mogućnost primjene tog matematskog problema u geodetskoj praksi. Posebice se, na primjer, uopće ne upušta u sintezu problema, to jest u konstituiranje traženog trokuta, što je bitno za Getaldićev metodološki pristup, kako je tek objašnjeno.

Prilikom obrade prevedenoga originalnog teksta bit će izložen uvod i priprava samog problema, zatim problem sa svojom algebarskom analizom koju zaključujemo s porizmom, to jest s tvrdnjom koja proizlazi iz analize, a predstavlja relaciju između traženih i danih veličina u problemu, da se tom relacijom koristimo u konačnom dijelu obrade, to jest u geometrijskoj sintezi ili konstrukciji. Odstupanja od teksta, koji je vrlo opširan i pun ponavljanja te se može sažetije prikazati, bit će napomenuta na odgovarajućem mjestu.

Uvod i priprava problema

»Među najuvaženijim ljudima svih vremena postoji veliko razilaženje u procjeni koliki je opseg Zemlje. Aristotel u drugoj knjizi o nebu, prema mišljenju matematičara onoga vremena, kaže da opseg Zemlje iznosi 400 000 stadija, to jest 50 000 milja.[7] Arhimed pak u knjizi o broju pijeska čini se da pristaje uz one koji misle da opseg Zemlje iznosi 300 000 stadija, ili 37500 milja.[8] A Hiparh, kako donosi Plinije u 108. poglavlju 2. knjige, pridaje opsegu Zemlje 277 000 stadija, što znači 34 625 milja.[9] Aritosten

[5] *Oton Kučera,* O Marinu Getaldiću, patriciju dubrovačkom, znamenitom matematiku i fiziku na početku XVII vijeka, Rad, knj. CXVII, JAZU, Zagreb 1893., str. 19—60.

[6] *Nikola Čubranić,* Getaldićev prijedlog za određivanje veličine Zemlje. Radovi međunarodnog simpozija »Geometrija i algebra početkom XVII stoljeća«. U povodu 400. godišnjice rođenja Marina Getaldića, Zagreb 1969, str. 61—70.

[7] Milja, kako se ovdje vidi, ima 8 stadija, Stadij pak iznosi 192 m (vidi Music A., *Nacrt grčkih i rimskih starina,* Zagreb, 1910, str. 54). Aristotel, dakle, drži da opseg Zemlje iznosi 76,8 milijuna metara. Kod znamo da ekvator Zemlje — po definiciji metra — iznosi samo 40 milijuna metara, vidimo da je Aristotel premašio mjeru skoro dvostruko.

[8] Po istom računu 57,6 milijuna metara.

[9] 53,184 milijuna metara.

[10] 48,384 milijuna metara.

mu pak pridaje 252 000 stadija, ili 31 500 milja.[10] A Dioniziodor, veliki geometar, pišući iz središta Zemlje onima koji su na površini, kako donosi Plinije u zadnjem poglavlju iste knjige, tvrdi da je iz groba dopro do najniže točke Zemlje i da ta udaljenost, to jest polumjer zemlje, iznosi 42 000 stadija, što je 5 250 milja, iz čega se po Arhimedovu računu dolazi do njezina opsega 33 000 milja.[11] Ptolomej pak, kojega noviji slijede, tvrdi da opseg Zemlje iznosi 180 000 stadija ili 22 500 milja.[12] Alfragan i Tibicije daju opsegu Zemlje 163 200 stadija ili 20 400 milja.[13]

»Ova tako velika raznolikost u mišljenju potaknula me je da promotrim kako bi se mogao pronaći opseg Zemlje, pa sam našao dva načina kojima se to može postići, i oba ću geometrijski obraditi.

Prvi način je ovaj:

»Neka se odaberu na površini jezera, kad nema nikakvog vjetra, dva mjesta međusobno udaljena najmanje tri milje. Na jednom od njih neka se podigne okomito na površinu vode limena pločica s uskim otvorom pruženim u širinu. Otrag pločice kod samog otvora neka se postavi svjetlo, a razmak od površine vode do vrha otvora neka bude oko jedne stope. Na drugom kraju neka se postavi promatrač koji će se podizati ili snizivati dok mu dogledница ne dopre do svjetla pravcem koji dira površinu vode, tako da kad bi se i najmanje snizio ne bi vidio svjetla zbog zaobljenosti vode koja bi, sada, došla između oka i svjetla. Površina je, naime, vode, koja mirno leži, zaobljena, a središte te zaobljenosti jest središte Zemlje, kako je dokazao Arhimed. Neka se sada pomnjivo izmjeri razmak između promatračeva oka i površine vode, kao i razmak između površine vode i vrha otvora na pločici. Kad su, naime, zadana ta dva razmaka i udaljenost tih dvaju mjesta na površini vode, može se izračunati promjer Zemlje, kako će se kasnije pokazati, a zatim Arhimedovim računom njezin opseg.

»Rekoh da se to ima izvesti na kojem jezeru, a ne na moru, jer bi zbog plime i oseke izvedba bila poremećena, pa se za ovaj postupak traži mirna stajaća voda; i stoga rekoh da to mora biti kad nema nikakvog vjetra, da se površina vode ne bi uzbibala.

[11] 50,688 milijuna metara. Ovdje se vidi da je Getaldić poznavao broj π točnošću koju daje kvocijent:

$$33\,000 : 2 \cdot 5250 = 3{,}1428571\ldots$$

[12] 34,56 milijuna metara. Ptolomej se najviše približio vrijednosti opsega Zemlje, to jest 40 milijuna metara.

[13] Tekst glasi 563 200 stadija ili 20 400 milja, gdje treba ispraviti ili stadije na broj 163 200, ili pak milje na broj 70 400. Uvjerljiviji je ispravak broja stadija na 163 200, što iznosi 31,3344 milijuna metara.

Mjesto jezera bi, pače, bio još zgodniji potok ili kanal na kakvoj ravnici ravno pružen kakve sam vidio u nižoj Germaniji, a osobito u Bataviji,[14] jer je u njima voda posve mirna i nepomična.

»Drugi način da se izračuna opseg Zemlje, i to lakši i točniji od prvog, izgleda ovako:

»Nek se odaberu dva brda s otvorenim vidikom na more, tako da se s nekog mjesta višeg brda pruža doglednica preko vrha nižeg brda do kružnice gdje se horizont spaja s morem. Neka se, zatim, istraži visina nižeg brda, to jest okomica od njegovog vrha do morske razine. Isto tako neka se istraži visina onog mjesta iz kojeg se preko vrha brda pruža doglednica do horizonta, to jest okomica od tog mjesta do morske razine. Zatim neka se pronađe razdaljina između tog mjesta i rečenog vrha brda. Pa kad se sve to obavi, izračunat će se promjer Zemlje, kako će se objasniti, a iz promjera opseg.

»Sve ću to pokazati kod jednog problema koji ima dva slučaja«.[15]

Ovdje je na dlanu pitanje: da li je Getaldić obavljao ta mjerenja koja je predlagao.

Odgovor je, doduše, negativan: on mjerenja nije obavljao ni sam niti po drugima. Ali postoji pozitivno svjedočanstvo da je namjeravao mjeriti zajedno sa svojim prijateljem iz Dubrovnika. Sačuvalo se, naime, pismo s datumom od 15. studenoga 1625. godine, naslovljeno profesoru matematike, isusovcu, Kristoforu Grienbergeru.[16] Između ostaloga tu piše: »... Vidjevši da postoji velika raznolikost u procjeni veličine Zemlje, među svim piscima, naumio sam i ja da potražim način na koji bi se mogla veličina Zemlje izmjeriti. Našao sam dosta pogodan problem čijom se primjenom može na dva načina naći promjer Zemlje, a zatim pomoću Arhimedovog računa i njezin opseg. Ako mi Bog da života, možda ću ovoga proljeća, zajedno s Marinom Gundulićem i Ignacijem Tudišićem koji su me mnogo podsticali, ostvariti tu zamisao...«

Međutim, Getaldić je umro 7. travnja 1626, dakle ni pet mjeseci nakon toga pisma. Smrt ga je spriječila ne samo u obavljanju mjerenja nego i u objavljivanju prijedloga mjerenja, koji je tiskan posmrtno 1630. u djelu koje se ovdje obrađuje.

Prije problema postavljen je jedan poučak za koji se predviđa da će u razlaganju biti potreban, a zove se lemom.

[14] Batavia označuje Nizozemsku, a niža Germanija, Germania inferior, kako stoji u latinskom originalu, bez sumnje sjevernu Njemačku koja nije gorovita.

[15] Marini Ghetaldi, De resolutione...« Romae 1630., str. 263—264.

[16] Miroslav Vanino, Dubrovčanin Marin Getaldić i isusovci. *Vrela i prinosi,* br. 12, Sarajevo 1941, str. 76. i 85.—86.

»Lema za ono što slijedi:

»Ako pravac povučen središtem kruga siječe tetivu pod kosim kutom u dva jednaka dijela, središte će kruga biti u njihovu sjecištu.

»Neka pravac AB prolazi središtem kruga i neka siječe pod kosim kutom tetivu CD u dva jednaka dijela u točki E. Tvrdim da je točka E središte kruga. Nek se, naime, povuče kroz E pravac FEG okomit na CD. Pošto je, dakle CE = ED, središte će kruga biti na pravcu FG. (Korolarij 1. stavka 3. knjige Euklida). No isto središte je i na pravcu AEB, pa se ono stoga nalazi u točki E, što je trebalo dokazati.

Problem III

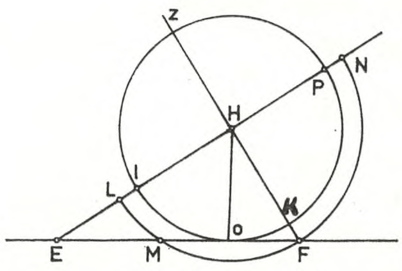
»Odrediti trokut kojemu je zadana osnovica i dužine za koje krakovi premašuju visinu.

»Ovaj problem ima dva slučaja. Visina, naime, to jest okomica spuštena iz vrha, pada ili unutar trokuta ili izvan njega. U prvom slučaju će zbroj dužina, kojima krakovi premašuju visinu, biti manji od osnovice, a u drugom će biti manja od osnovice razlika tih dužina«.

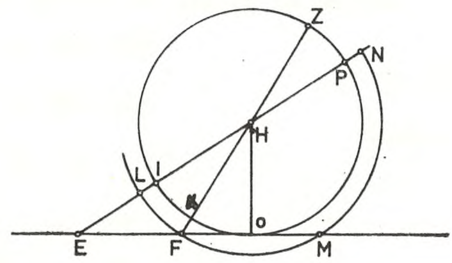
Pri rješavanju problema treba napomenuti da je originalni tekst vrlo opširan. Autor obrađuje svaki slučaj posebno, i to svaki na dva načina. Tako postoje četiri algebarske analize i četiri sinteze. Tekst iznosi 34 stranice (str. 264—297). No cijela se stvar može prikazati kraće, a da se pri tom ništa bitno ne propusti. Oba slučaja a) i b) rješavaju se istim tekstom kad se on primijeni na dvije slike — slika a) i slika b) — koje prikazuju svaka svoj slučaj, te su označene istim znakovima s malom inačicom za svoj slučaj. Oba se pak slučaja rješavaju na dva načina, a svaki način ima u istom tekstu (za oba slučaja) svoju inačicu koja se označuje oznakama A) i B). Mala, dakle, slova a) i b) razlikuju dva slučaja — u jednom visina pada unutar trokuta, a u drugom izvan, na produženje osnovice, a velika slova A) i B) odnose se na dva načina rješavanja, svaki za oba slučaja a) i b). Tako se izbjegavaju mnoga ponavljanja i — umjesto četiri — bit će samo jedna analiza i jedna sinteza, upozoravajući s oznakom a) i b) da se tekst nešto mijenja za svaki pojedini slučaj. Na taj način bit će dovoljno u prijevodu samo 9 stranica teksta.

Analiza

»Neka je zadana osnovica trokuta b, dužina d kojom veći krak premašuje visinu, i dužina g kojom premašuje visinu manji krak. Treba odrediti trokut. (V. *sl. 1a* i *sl. 1b*).



Slika 1a



Slika 1b

»Uzmimo da je trokut HEF već određen. Na osnovicu pada okomica HO. Oko H nek se opiše kružnica IOP s polumjerom HO, koja siječe krakove EH i FH u točki I, odnosno K, te produženje većeg kraka u P. Zadana je osnovica EF = b, te dužine EI = d i KF = g, kako je označeno na slikama br. 1. Nek se još povuče kružnica sa središtem u H i s polumjerom HF, koja siječe:

a) osnovicu, b) produženje osnovice

u M, krak EH u L, a njegovo produženje u N.

»Razlika segmenata što ih visina tvori na osnovici bit će dužina a = EM, i to:

a) $EO - OF = EM = a < b$

b) $EO - OF = EO + FO = EM = a > b$

jer je, prema 36. stavku III knjige Euklida, MO = OF.

»Razlika krakova je EL, a to je i razlika dužina kojima krakovi nadmašuju visinu, te je bilježimo

$$EL = d - g$$

»Najprije ćemo odrediti dužinu EM = a.

»Prema korolariju I prvog problema prve knjige ovoga djela imamo:

A) $2EO = a + b$ B) $2FO = b - a$[17]

$$EO = \frac{a + b}{2} \qquad FO = \frac{b - a}{2}$$

[17] Za prvi slučaj a) problema, jer je $a < b$, postavlja se $b - a$; no za drugi slučaj problema, b) slučaj, jer je $a > b$, treba postaviti $a - b$. U daljnjem se postupku taj izraz kvadrira, pa se dobije isti rezultat u konačnoj relaciji za oba slučaja.

»Pošto je, prema 36. stavku treće knjige Euklida,

$$EL \cdot EN = EM \cdot EF,$$

bit će

$$EL : EM = EF : EN,$$

i odatle

$$(d - g) : a = b : EN$$

$$EN = \frac{ab}{d - g}$$

te dalje:

A) $EP = \dfrac{ab}{d - g} - g$

B) $IN = LP = FZ = \dfrac{ab}{d - g} - d,$

gdje je Z točka na kružnici IOKP u produženju FH.

»Pošto je pak,[18] prema 36. stavku treće knjige Euklida:

A) $EI \cdot EP = EO^2$

$$d \cdot \left(\frac{ab}{d - g} - g\right) = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$$

B) $FK \cdot FZ = FO^2$

$$g \cdot \left(\frac{ab}{d - g} - d\right) = \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$$

Odatle imamo:

A) $\dfrac{4\,abd}{d - g} - 4dg = a^2 + 2ab - b^2$

B) $\dfrac{4\,abg}{d - g} - 4dg = a^2 - 2ab + b^2$

[18] Da bi čitatelj imao uvid u način kako autor na latinskom jeziku izražava ovo što prevodimo, ovu rečenicu ispisujemo točno iz originala:

»Et quoniam rectangulum IEP (36 tertii) aequale est quadrato EO, hoc est rectangulum D, & $\dfrac{b \text{ in } a}{d - g}$ — G aequale quadrato ex B½ — A½«.

Rectangulum prvotno znači pravokutnik, a u geometrijskom računanju, gdje su brojevi dužine, znači umnožak. Tako kvadrat prvotno znači površinu, a u računanju sve do danas zadržava značenje umnoška nekog broja samim sobom.

»Da se ova jednadžba lakše riješi, neka se postavi :

$$A)\quad \frac{bd}{d - g} = f \qquad\qquad B)\quad \frac{bg}{d - g} = f$$

pa imamo :

$$A)\quad 4af - 2ab - a^2 = b^2 + 4dg$$

$$B)\quad 4af + 2ab - a^2 = b^2 + 4dg$$

$$A)\quad a_{1,2} = 2f - b \pm \sqrt{(2f - b)^2 - b^2 - 4dg}\,^{19}$$

$$B)\quad a_{1,2} = 2f + b \pm \sqrt{(2f + b)^2 - b^2 - 4dg}$$

»Kod ovih jednadžbi *a* ima dvije vrijednosti, jer su pred znakom korijena dva predznaka, plus daje veću vrijednost, a minus manju. Za prvi, a), slučaj, kod rješavanja na oba načina, A) i B), uzima se manja vrijednost, jer je a⟨b; a za drugi, b), slučaj, kod rješavanja na oba načina, A) i B), veća vrijednost, jer je a⟩b, kako je istaknuto kod postavljanja problema«.

Porizam

Porizmom se sređuju rezultati analize, da se njima možemo poslužiti u sintezi problema. Rezultati su već dani relacijom do koje analiza dovodi, ali se radi lakše primjene na konstrukciju zadatka običava porizam izraziti riječima. Tako imamo :

»Neka se razlika dužina kojima krakovi premašuju visinu trokuta odnosi A) prema većoj, B) prema manjoj od tih dužina, kao što se osnovica odnosi prema nekoj drugoj dužini;[20] a od A) razlike, B) zbroja dvostruke te dužine i osnovice[21] a) nek se

[19] Ovdje se vidi kako je nastao znak $\sqrt{}$ kao znak za računsku operaciju drugog korijena. Ta se operacija nazivala »latus universale« i označivala se početnim slovima tih dviju riječi: L U, gdje se drugo slovo često piše kao V. Naziv doslovno znači »posvudašnja stranica«, to jest stranica kvadrata koja je svuda jednaka. To je u skladu s nazivom kvadrata za drugu potenciju, kao i s nazivom »pravokutnik« za umnožak. Razvoj pak od L V do današnjeg znaka $\sqrt{}$ nadaje se sam po sebi. Izraz pod korijenom trebalo je, naime, obuhvatiti ili zagradama ili crtom nad njim koja se ticala znaka V, da se ne bi slovo V pobrkalo s kakvom dužinom, odnosno algebarskom veličinom. Zbog istog razloga napuštalo se i slovo L.

[20] Ta »neka druga dužina« difinirana je upravo tim razmjerom, a označena je sa *f*. Dakle:

A) (d—g) : d = b : f B) (d—g) : g = b : f

[21] Razlika ili zbroj jesu:

za A) 2f — b za B) 2f + b

gdje *f* ima različitu vrijednost, već prema definiciji kod A), odnosno kod B) — bilj. 20.

oduzme dužina kojoj je kvadrat jednak onoj površini kojom kvadrat A) te razlike, B) toga zbroja premašuje kvadrat osnovice i četverostruki pravokutnik nad dužinama kojima krakovi premašuju visinu;[22] i tako preostaje izraz za manju vrijednost.

b) Nek se pak A) razlici, B) zbroju dvostruke te dužine i osnovice doda dužina kojoj je kvadrat jednak onoj površini kojom kvadrat A) te razlike, B) toga zbroja premašuje kvadrat osnovice i četverostruki pravokutnik nad dužinama kojima krakovi premašuju visinu; i tako preostaje izraz za veću vrijednost«.[23]

Kako je već rečeno, a) vrijedi za prvi slučaj problema, kad visina pada unutar trokuta, a b) za drugi slučaj, kad visina pada izvan trokuta, bilo da se rješava problem na način A) ili na način B).

Našavši izraz za posrednu veličinu a = EM, koja predstavlja razliku segmenata što ih tvori visina trokuta na njegovoj osnovici, autor se ne trudi dalje da analizom pronađe visinu koja, u oba slučaja što ih predlaže za mjerenje opsega Zemlje, predstavlja Zemljin polumjer. Njemu je važno da, slijedeći tragove ove analize kojom se određuje posredna veličina *a*, može odrediti trokut pa će onda pokazati izračunavanje visine koja predstavlja polumjer Zemlje. Slijedimo ga, te pređimo na konstruiranje traženog trokuta.

Sinteza

»Zadana je osnovica EF trokuta, zatim dužina FD kojom veći krak trokuta premašuje njegovu visinu, te dužina DA kojom manji krak trokuta premašuje istu visinu. Na FD označit ćemo točku G tako da bude GD = DA.

»Za prvi, a), slučaj vrijedi uvjet:

$$FD + DA < EF$$

a za drugi, b), slučaj uvjet glasi:

$$FD - DA < EF$$

Treba odrediti trokut«.

Jednim tekstom obuhvatit ćemo oba slučaja, a) i b), koji se odnose na prvi način obradbe u analizi. To je način A).[24] Sinteza

[22] Razlici, odnosno zbroju iz bilj. 21, u slučaju a) se oduzima, u slučaju b) se dodaje »dužina kojoj je kvadrat...«. Ta je dužina dana izrazom: u A) $\sqrt{(2f - b)^2 - b^2 - 4dg}$ u B) $\sqrt{(2f + b)^2 - b^2 - 4dg}$

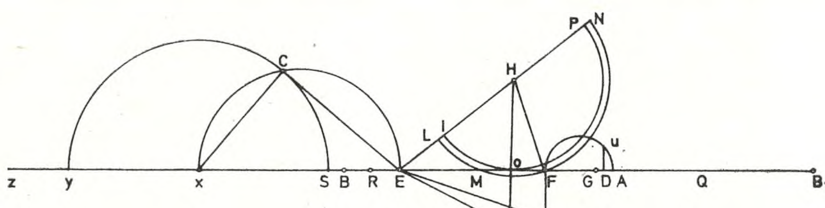
[23] Marini Ghetaldi, n. d., str. 264—266; 275—276; 282—283; 293—294.

[24] Tekstovi se nalaze u originalnom djelu str. 266—269. i str. 284.—287.

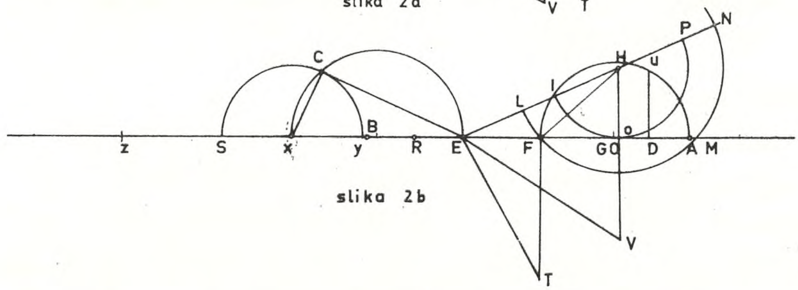
koja slijedi tragove drugoga, B), načina obradbe u ovom radu nije provedena,[25] jer to nije moguće učiniti inačicom istoga teksta koji služi za A). Dakle, inačice a) i b), kao i slike 2. a) i 2. b) odnose se na prvi i drugi slučaj problema, prvi — kad visina pada unutar trokuta, a drugi — kad visina pada izvan njega.

»Neka se u točki D podigne okomica, koju polukružnica nad FA sječe u U. Iz točke F neka se spusti okomica FT = 2DU i nek se spoji ET. Imamo:

$$FT^2 = 4DU^2 = 4FD \cdot DA$$



slika 2a



slika 2b

»Neka se odredi FR iz razmjera:

$$FG : FD = EF : FR$$

i neka se odredi točka X tako da bude FX = 2FR, te neka se podigne polukružnica nad XE i neka se na nju nanese dužina EC = ET, za koju ćemo pokazati da je manja od promjera XE.

Točka C neka se spoji s točkom X i neka se povuče polukružnica XC sa središtem u X, koja siječe:

a) dužinu XE u točki S, a njezino produženje u Y.

b) dužinu EX u točki Y, a njezino produženje u točki S.

»Vrijednosti koje su u relaciji porizma dane za dužinu a=EM jesu SE.

[25] Izostavljeni tekstovi sinteze po drugom načinu obrade nalaze se na str. 276.—280. i str. 294.—297.

a) Za prvi slučaj je manja (znak minus pred korijenom): $SE = XE — XC = 2RF — EF = XC$

b) za drugi slučaj je veća (znak plus pred korijenom): $SE = 2RF — EF + XC$

Gdje je za oba slučaja: $XC = \sqrt{XE^2 — CE^2}$

$$XC = \sqrt{(2RF — EF)^2 — ET^2}$$

$$XC = \sqrt{(2RF — EF)^2 — EF^2 — 4FD \cdot DA}$$«

»Vrijednosti, dakle, koje dobivamo za traženu veličinu *a* jesu:

a) SE manja i YE veća
Jasno je da je YE veća od tražene razlike segmenata na osnovici, pače i od same osnovice. Pošto je, naime, u omjeru FG:FD postavljen manji član prema većemu, tako je i u omjeru EF:RF, te imamo :

$$EF \langle RF \doteq XR.$$

b) SE veća i YE manja
Nešto manjka, ne od dokazivanja problema, nego od analize, da se jedna vrijednost mora uzeti a ne druga; ili zašto treba uzeti jednu vrijednost, a ne drugu. (Znamo da treba uzeti SE, to jest veću vrijednost)

»Neka se, dakle

a) na osnovici

b) na produženju osnovice

uzme dužina EM=SE, za koju možemo dokazati da je

a) manja od osnovice.

b) veća od osnovice.

Dužina EM neka se raspolovi na dva jednaka dijela u O, pa nek se kroz tu točku povuče okomica HOV, gdje je:

$$OV = FD \langle EO,$$

kako se kasnije dokazuje. Neka se spoji V sa E. Pošto je OV ⟨ OE, bit će i kut OEV manji od kuta OVE. Neka bude kut VEH jednak kutu EVH, gdje pravac EH siječe pravac OH u točki H, te neka se H spoji sa F. Odredili smo, dakle, trokut HEF kojemu je osnovica zadana dužina EF, krak HE premašuje visinu trokuta dužinom OV koja je jednaka dužini FD-, jer je HE = HV zbog jednakosti kutova VEH i HVE. Preostaje još, dakle, da se dokaže da krak HF premašuje visinu HO dužinom koja je jednaka zadanoj dužini DA, a to ćemo objasniti idući tragom algebarske analize, na ovaj način:

»Neka se, dakle, nacrta kružnica IOKP sa središtem u H i polumjerom HO, koja siječe krak EH u točki I, a krak HF u K, pa neka se EH produži tako da obodnicu kružnice siječe u P. Neka se odredi točka N i L tako da bude

$$PN = LI = AD$$[26]

»Neka se produži i YF na obe strane tako da bude:

$$FQ = EF \text{ i } ZX = XE.$$

Bit će dakle:

$$ZQ = 2XF = 4RF$$

jer je prema konstrukciji $XF = 2RF$. A budući da je kut XCE pravi, pravac EC dira kružnicu SCY, te je stoga, prema 36. stavku III. knjige Euklida,

$$XE \cdot SE = EC^2 = ET^2 = EF^2 + FT^2 = EF^2 - 4FD \cdot DA$$

No postoji i ova relacija:

$$YE \cdot SE = ZS \cdot SE = (ZE - SE) \cdot SE = ZE \cdot SE - SE^2 =$$

$$= (ZQ - EQ)\, SE - SE^2 = ZQ \cdot SE - EQ \cdot SE - SE^2 =$$

$$= 4RF \cdot SE - 2EF \cdot SE - SE^2.$$

Imamo, dakle:

$$4RF \cdot SE - 2EF \cdot SE - SE^2 = EF^2 - 4FD \cdot DA$$[27]

$$4RF \cdot SE - 4FD \cdot DA = SE^2 + 2EF\, SE + EF^2$$

$$4\,(RF\, SE - FD\, DA) = (SE + EF)^2 = SF^2 = 4 \cdot EO^2$$

jer je $SF = 2EO$, pošto je, prema konstrukciji $SE = EM$ i $MO = OF$.

Dalje imamo:

$$RF \cdot SE - FD \cdot DA = EO^2 = EI \cdot EP = EI \cdot (EN - PN) =$$

$$= EI \cdot EN - EI \cdot PN = EI \cdot EN - EI \cdot LI$$

[26] Da su dužine $LI = PN = DA$ upravo ona dužina kojom manji krak HF premašuje visinu, bit će dokazano tako da točke L i N leže na istoj kružnici kao i točke M i F.

[27] Na ovu relaciju upućuje analiza, do koje se dolazi algebarskim putem. To je relacija:

$$4af - 2ab - a^2 = b^2 + 4dg.$$

Upućeni na nju analizom ovdje je dobivamo geometrijskom sintezom. Sada sinteza ide tragom analize retrogradno, dok se dođe do geometrijske relacije od koje je analiza pošla, to jest do relacije:

$$EL \cdot EN = EN \cdot EF$$

Lijep primjer kako analiza služi sintezi!

No imamo i:

$$RP \cdot SE - FD \cdot DA = RF \cdot EM - EI \cdot LI$$

Dakle je i:

$$RF \cdot EM - EI \cdot LI = EI \cdot EN - EI \cdot LI$$

$$RF \cdot EM = EI \cdot EN$$

$$EM : EN = EI : RF$$

A pošto je prema konstrukciji:

$$FG : FD = EL : EI = EF : RF$$

ili, promijenivši redoslijed:

$$EL : EF = EI : RF$$

bit će:

$$EM : EN = EL : EF$$

i

$$EM \cdot EF = EN \cdot EL$$

iz čega se razabire da točke L, M, F i N leže na kružnici. Središte te kružnice je na pravcu HV koji pod pravim kutom siječe dužinu MF na dva jednaka dijela. Pravac pak HV siječe dužinu LN u H na dva jednaka dijela, jer je, prema konstrukciji, PN = LI a IH = HP, jer su polumjeri kružnice IKP, ali je ne siječe pod pravim kutom. Dakle, prema lemi koju smo postavili prije problema, točka H je središte kružnice LMFN, kao i kružnice IOP. Stoga je HF = HL. Pošto je pak HK = HI, bit će KF = IL = AD. Tako je konstruiran na osnovici EF trokut HEF, kojemu krakovi HE i HF premašuju visinu HO dužinama koje su jednake zadanim dužinama FD i DA. A to je trebalo učiniti — quod facere oportebat«[28]

Ovime zaključujemo sintezu, kojom su ujedno obuhvaćena oba slučaja, a) i b), obrađena na prvi način, A). Već je napomenuto da je izostavljena sinteza koja je slijedila drugi, B, način obrade, a nalazi se na stranicama originalnog djela 276. — 280. za prvi a) slučaj, i na str. 294. — 297. za drugi b) slučaj. K tomu su, kao manje važni, izostavljeni neki dokazi, kao na primjer da je:

$$OV = FD \langle EO,$$

iako su u tekstu obećani. Mislim, naime, da bi za razumijevanje same stvari to bilo u ovom radu preveliko i ne nužno opterećenje.[29]

[28] Stereotipni završetak dokaza kod geometrijske sinteze.

»*Kako odrediti polumjer Zemlje*«[30]

Ovaj se problem sa svoja dva slučaja primjenjuje za određivanje polumjera Zemlje upravo prema dvama prijedlozima koje je autor postavio prije nego je naveo sam problem. Evo kako je to učinio:

»Iz ove konstrukcije problema naći ćemo promjer Zemlje na ovaj način:

»Udaljenost dvaju mjesta, što smo ih odabrali na površini jezera, to jest dužina koja dira površinu vode, položena između promatračeva oka i otvora limene pločice, neka se uzme kao osnovica trokuta koji ima vrh u središtu Zemlje, pa će mu visina biti zemaljski polumjer. Visina, naime, ili okomica povučena iz vrha na osnovicu siječe osnovicu u dirali̇štu gdje osnovica dira površinu vode, za koju je dokazano da je sferna; a razmak između vrha otvora pločice i površine vode neka se uzme kao dužina kojom jedan krak trokuta premašuje njegovu visinu, a razmak između promatračeva oka i površine vode treba uzeti kao dužinu kojom drugi krak trokuta premašuje njegovu visinu. Tako će se iz zadane osnovice i tih dviju dužina dobiti trokut, dosljedno i njegova visina, to jest polumjer Zemlje«.[31]

Drugi slučaj problema odnosi se na drugi Getaldićev prijedlog za određivanje polumjera Zemlje. Njihovu vezu autor ovako pokazuje:

»Iz ove konstrukcije drugog slučaja razabire se drugi način određivanja, a taj je ovakav. Razmak između mjesta odabranog na višem brdu i vrha nižeg brda, preko kojega promatračev pogled dopire do kružnice horizonta, to jest dužina koja (u svom produženju)[32] dira površinu mora, a pruža se od odabranog mjesta na višem brdu do vrha nižeg brda, neka se uzme za osnovicu trokuta, kojemu je vrh u središtu Zemlje, a polumjer Zemlje mu je visina; jer visina, to jest okomica spuštena iz vrha trokuta, pada na produženje osnovice izvan trokuta u točki diranja, to jest u točki gdje produžena osnovica dira površinu mora; a visina mjesta koje smo odabrali na višem brdu, to jest okomica iz toga mjesta do razine mora, treba da se shvati kao dužina kojom veći

[29] Prijevod potpunoga teksta ovoga Getaldićeva djela *O matematskoj analizi i sintezi,* sa svim varijacijama i ponavljanjima teksta, očekuje se u Sabranim djelima, II. dio. Prvi dio izašao je u prijevodu koji je revidirao Žarko Dadić, Zagreb 1972, a obuhvaća sva Getaldićeva djela osim djela *O matematskoj analizi i sintezi.*

[30] »Ratio inveniendi diametrum terrae« autor donosi nakon sinteze problema gdje se pokazuje kako konstruirati traženi trokut, i to samo u prvom načinu obrade, za svaki slučaj napose. N. d., str. 271.—275. i 290.—293.

[31] Ondje str. 271.

[32] Opaska prevoditelja.

krak trokuta premašuje njegovu visinu; a visina nižeg brda, to jest okomica iz njegova vrha spuštena na razinu mora, neka se uzme kao dužina kojom manji krak trokuta premašuje njegovu visinu. Tako iz zadane osnovice i tih dužina kojima krakovi trokuta nadmašuju njegovu visinu određen je trokut i, dosljedno, njegova visina, to jest polumjer Zemlje«.[33]

Postupak za određivanje polumjera Zemlje ide nešto dalje od rješenja zadanog problema. Problem traži da se odredi trokut iz zadanih veličina: *b*, *d* i *g*.

Za određivanje trokuta uveli smo neke posredne veličine, i to:

A) $$f = \frac{bd}{d - g}$$ B) $$f = \frac{bg}{d - g}$$

$$a = 2f - b \pm \sqrt{(2f-b)^2 - b^2 - 4dg} \qquad a = 2f + b \pm \sqrt{(2f+b)^2 - b^2 - 4dg}$$

Za određivanje polumjera treba ukloniti posredne veličine *f* i *a*, a uvesti traženu veličinu r = HO. To se postiže dvjema relacijama, koje se lako provjeravaju na slikama 2, i to:

$$EN = IP + EI + PN$$

ili

$$EN = 2r + d + g$$

i druga relacija:

$$EN \cdot EL = EM \cdot EF$$

ili

$$EN \cdot (d - g) = a \cdot b$$

$$EN = \frac{ab}{d - g}$$

Usporedivši desne strane imamo za r izraz:

$$r = \frac{ab}{2(d-g)} - \frac{d+g}{2}$$

[33] Marini Ghetaldi, N. d., str. 289.
[34] Marini Ghetaldi, N. d., str. 2.

Konačni izraz za polumjer *r* dobiti će se kad se u gornja dva izraza za *a* uvrsti svakom njegova vrijednost za *f*, te u oba, A) i B) načina obrade dobijemo isti izraz za *a*, gdje će figurirati samo zadane veličine: *b*, *d* i *g*. To će biti:

$$a_{1,2} = \frac{b\,(d+g) \pm 2\sqrt{dg\,(b+d-g)\,(b-d+g)}}{d-g}$$

Kad se taj izraz uvrsti kao vrijednost za *a* u gornjem izrazu za *r*, dobiva se konačni izraz za *r*, u kojem figuriraju samo tri zadane veličine:

$$r_{1,2} = \frac{b^2\,(d+g) \pm 2b\sqrt{dg\,(b+d-g)\,(b-d+g)}}{2\,(d-g)^2} - \frac{d+g}{2}$$

Brojčani primjeri

Ovaj ćemo prikaz zaključiti nekim brojčanim primjerima, koje ćemo izabrati iz Getaldićeve knjige. Autor donosi sedam primjera, ali neke od njih mnogo puta ponavlja u donekle različitim varijantama računske obrade. Suvišno je slijediti autora doslovce, pa ako su zadani podaci za tri već poznate zadane veličine: *b* kao osnovicu trokuta, *d* i *g* kao veličine kojima krakovi trokuta premašuju njegovu visinu, može se uputiti na navedenu formulu za polumjer *r*. Podaci su dani brojčano, ali bez oznake mjere, a u tim zadacima, koje odabiremo, zadani su tako da rezultat *r* uvijek ispada isti: $r = 12$. Podaci su dani kako slijedi:

Primjer I: $b = 21$, $d = 8$ i $g = 1$; određuje se $r = ?$

Primjer II: $b = 14$, $d = 3$ i $g = 1$; $r = ?$

Primjer III: $b = 4$, $d = 3$ i $g = 1$; $r = ?$

Uvjeti zadatka jesu:

Za a) slučaj: $d + g < b$; Za b) slučaj: $d - g < b$

Uvrštenjem zadanih vrijednosti vidimo da spadaju na

a) I. i II. primjer; b) III. primjer,
pa pred znakom korijena treba uzeti predznak:

a) minus b) plus.

Smatrao sam vrijednim što vjernije slijediti misao autora kako to dopuštaju granice jednoga informativnog rada i ukus današnjih čitatelja koji su se — u udaljenosti od tri i pol stoljeća — odvikli od izraza i metoda koje su bile početkom XVII. st. suvremene. Ako sam uspio uputiti čitatelja u razumijevanje obrađenog, ovaj bi se rad mogao smatrati prilogom za veliki posao prijevoda II. dijela Sabranih djela Marina Getaldića, što se već sedam godina sa zanimanjem očekuje.

(Primljeno na 6. sjednici Razreda za matematičke, fizičke i tehničke znanosti JAZU od 12. prosinca 1978.)

Andrija Bonifačić

MARIN GETALDIĆ ON DEFINING THE EARTH RADIUS
(A presentation of a problem from the work »De resolutione et compositione mathematica«)

Summary

Marin Getaldić (1568—1626), the patrician of Dubrovnik, a famous physicist and mathematician, paid particular attention to the new algebraic method of solving geometrical problems introduced by François Viète's algebra. Getaldić was a good friend of his. He worked with him thus paving the way for analytic geometry. This side of his genius manifested greatly in his posthumous work »De resolutione et compositione mathematica«, Rome 1630.

In this treatise is presented the elaboration of one of the most complex problems from the author's work — the third problem of the fourth volume — which is of geographical and astronomic interest. Getaldić proposes two ways which can be used to define the Earth radius. Both ways are directed to solve only one problem which says: »To define a triangle to which the base is given and also the lengths for which the sides of the triangle exceed its height«. The problem has got two cases as the height falls either inside the triangle or outside. In both proposes, where the data are given through the geodetic measurements, the height of the wanted triangle presents the Earth radius. The author did not do any measurements, although he wanted to, but nobody else has tried to do that so far.

The author was anxious about solving the problem not only by algebraic analysis, but by a syntetic method, too. Thus syntetic elaboration of the problem, to which the above analysis refers, has been presented in this article. In one text with two drawings — a) and b) — both cases are solved in two ways: A) and B); the author gives in detail four analyses and four synteses. This work can be considered a contribution to the Croatian translation of the Second part of Marin Getaldić's Collected Works, which we have been expecting with great interest for seven years.