Andrija Bonifačić

GDJE SE MARIN GETALDIĆ NAJVIŠE PRIBLIŽIO DESCARTESU

Akademijino izdanje sabranih djela Marina Getaldića, Zagreb 1968. g., čini pristupačnom svu znanstvenu baštinu toga našeg poznatoga matematičara i fizičara iz prve polovice XVII stoljeća. U povodu 400. godišnjice njegova rođenja, imamo tako pri ruci sva njegova djela na originalnom latinskom jeziku, po redu kako su nekad tiskana. Nabrojimo ih :

1. Promotus Archimedes seu de variis corporum generibus gravitate et magnitudine comparatis — Unaprijeđeni Arhimed ili o različitim vrstama tjelesa uspoređenim po težini i po veličini, Rim 1603. g.

2. Nonnulae propositiones de parabola — Neki poučci o paraboli, Rim 1603.

3. Variorum problematum collectio — Zbirka različitih (geometrijskih) zadataka, Venecija 1607. g.

4. Supplementum Apollonii Galli — Dodatak Francuskom Apoloniju (tim imenom naziva francuskog matematičara Françoisa Viètea), Venecija 1607. g.

5. Apolonius redivivus — Oživljeni Apolonije, Venecija 1607.

6. Apollonius redivivus, liber II — Oživljeni Apolonije, knjiga II, Venecija 1613. g.

7. De resolutione et compositione mathematica libri quinque — O algebarskoj analizi i geometrijskoj sintezi pet knjiga, Rim 1630. g.

Ova posljednja knjiga tiskana je 4 godine poslije Getaldićeve smrti. Ona je najopsežnija i donijela je autoru najveću slavu. Getaldić je, naime, ovim djelom dao najveći doprinos matematici, time što u njemu sustavno upotrebljava metodu algebarske analize, te dolazi na sam prag otkrića analitičke geometrije. U ovoj radnji želim pokazati gdje se Getaldić najviše približio tom Descartesovu otkriću.

Evo najprije male digresije o Getaldićevoj špilji u Dubrovniku. Čini se, naime, da se mogu dati neka objašnjenja koja u literaturi o Getaldiću još nisu poznata.

Sin dubrovačke vlasteoske obitelji, Marin Getaldić[1] je posjedovao dvorac izvan grada na južnoj strani, na putu prema Svetom Jakovu. Dvorac je sagrađen nad velikom špiljom, koja ima široko zjalo otvoreno prema otočiću Lokrumu. Na špilju upozorava i natpis na gornjem pragu vrata kroz koja se s puta ulazi u ograđeno dvorište dvorca. Natpis, u latinskom leoniskom distihu, glasi :

Este procul livor, lites, ambitio, curae :
Antra, hortos, scopulos pax comitatque quies.

U prijevodu :

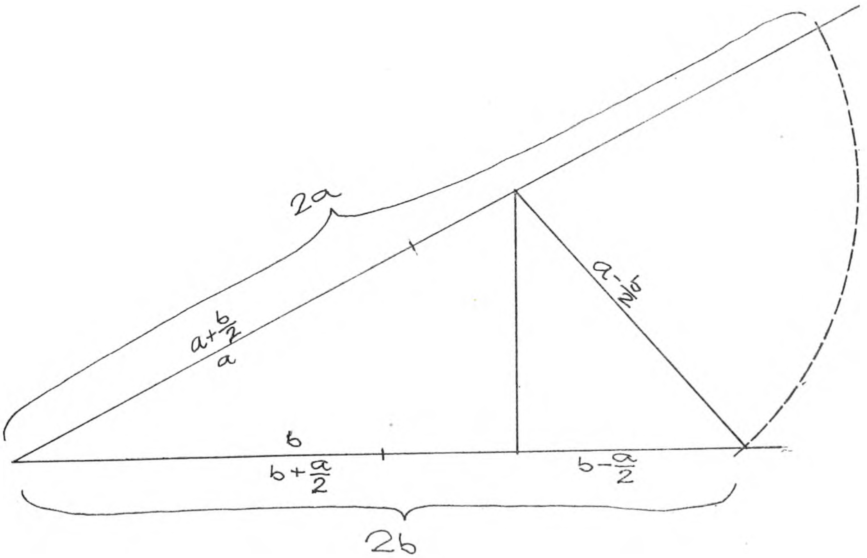
Odstupite poslovi, parbe, požude i skrbi :
Špilje, vrtove i grebene neka prati spokojan mir.

Za ovu špilju u Dubrovniku postoji naziv Betina spilja. U dubrovačkom se, naime, govoru kaže: spilja. Naziv se pridaje upravo Marinu Getaldiću, koji je prozvan Bete ili Betìno. U literaturu o Getaldiću te je nazive uveo dominikanac o. Serafin Crijević, pišući Getaldićev životopis potkraj XVIII stoljeća.[2]

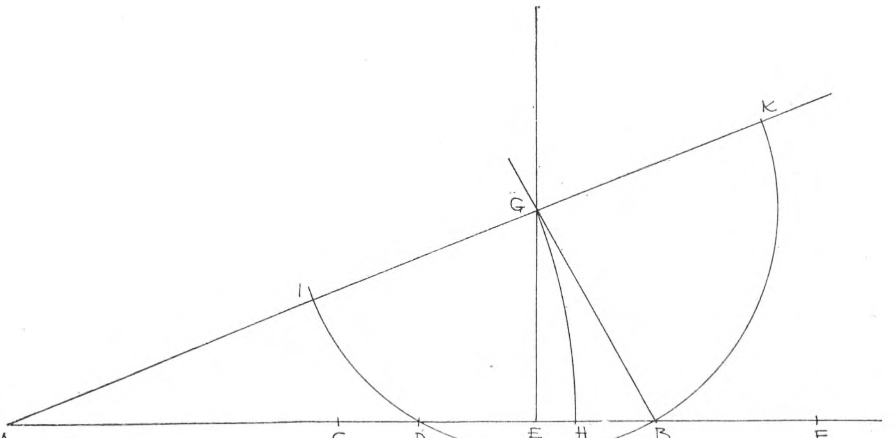
O tom da je špilja zaista pripadala Getaldiću ne može biti sumnje. Da je u toj špilji pravio neobične pokuse potvrđuju njegova pisma. Vrativši se iz Carigrada u Dubrovnik piše iz Dubrovnika isusovcima P. Klaviju i Grienbergeru u Rim da je u Carigradu izmjerio geografsku širinu točno 41 stupanj, te da je također izmjerio geografsku širinu Dubrovnika, koja iznosi 42 stupnja i 35 minuta. Pismo je datirano 20. veljače 1608. Nakon tri mjeseca, 20. svibnja 1608. g., piše jednome od gore spomenutih isusovaca, P. Klaviju: »Prošlih dana napravio sam parabolično zrcalo, mnogo veće od onoga što sam negda tamo pravio: ovo može rastaliti na suncu ne samo olovo nego i srebro, pa i sam

[1] Ovaj hrvatski oblik prezimena, koje u latinskim spisima dolazi kao Ghetaldius ili de Ghetaldis, a u talijanskim kao Ghetaldi, arhivski je utvrdio Jireček. Vidi: Medini Milorad , Starine dubrovačke, Dubrovnik 1935, str. 110.

[2] Dominikanska biblioteka u Dubrovniku, rukopisi III, 52. Crijevićev životopis pisan je latinskim jezikom i počinje opisom špilje o kojoj kaže: »Na koncu 16. i na početku 17. stoljeća bila je ova špilja na glasu, a i danas je još kod ribara i neznalica. Tamo je, vele, bivao preko gotovo cijelog dana glasoviti čarobnjak imenom Bete ili Betino. U zvijezdama je čitao budućnost, vladao je elementima i zapaljivao je nekim određenim gibanjima svojih paklenih strojeva sve vrste brodova; stoga se nijedna ribarska lađa ne usuđuje ni blizu k onom nesretnom žalu«.



Sl. 1.



Sl. 2.

čelik na zrcalima, što je mnogo teže«.[3] Najvjerojatnije je te pokuse, osobito ovaj posljednji, radio u svojoj špilji.

[3] Vanino Miroslav, Dubrovčanin Marin Getaldić i Isusovci, Vrela i Prinosi, zbornik za povijest Isusovačkog reda u hrvatskim krajevima, Sarajevo 1941. g., svezak 12, str. 82-83.

No, dok nema sumnje da špilja njemu pripada, nije uvjerljivo da bi ime Betina spilja nastalo od imena Bete ili Betìno. Takvo se ime nigdje ne pojavljuje, osim u ovom slučaju. Na to me je upozorio dubrovački franjevac o. Urban Talija (1859—1943). Pripovijedao mi je kako mu je pokojni mostarski biskup o. Pasko Buconjić kazivao da u Hercegovini špilju sa širokim otvorom, udubljenu u brijegu, nazivaju općim imenom bètina, te je moguće da je ovaj opći naziv bio vlastito ime ove špilje, karakteristično u tom kraju. Kad se, pak, izgubilo značenje tog općeg imena, dodao se naziv spilja, a ime Betina počelo se osjećati kao posvojni pridjev imena Bete. Nije, dakle, naziv Betine spilje nastao od imena Bete, nego je ime Bete nastalo od općeg imena betina.

Trebalo bi provjeriti navode o. Paska Buconjića o općem nazivu betina u Hercegovini, a uz to da li je taj naziv u prastaro doba vladao u dubrovačkom kraju. Akademijin rječnik ne navodi riječ betina u općem značenju. Teško je pretpostaviti da bi, možda, naziv pećina prešao u betina.

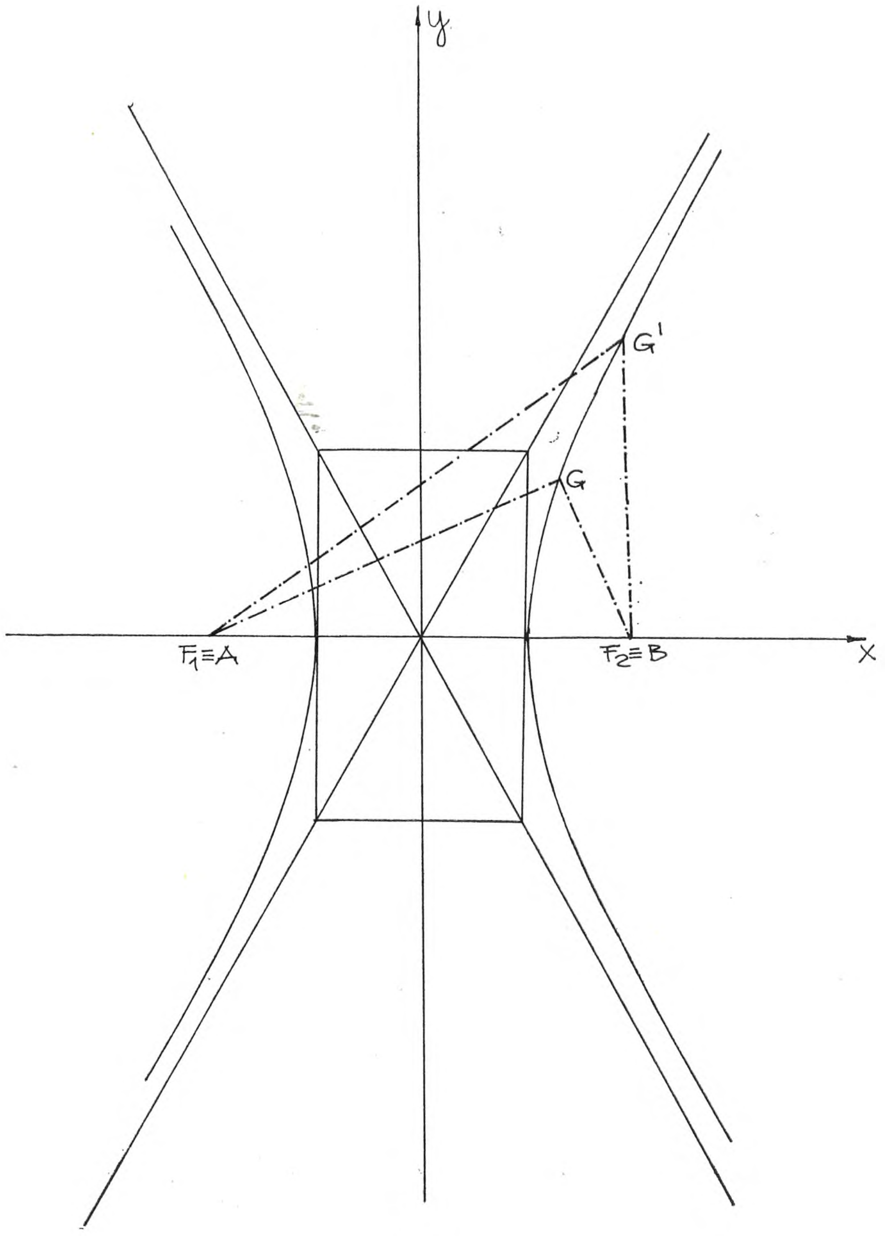
Međutim, za takvu pretpostavku imamo jaku potvrdu u imenu sela Betina na otoku Murteru. Za podrijetlo toga imena usvojeno je znanstveno tumačenje don Krste Stošića, što ga iznosi u svojoj knjizi »Sela kotara Šibenik«: »Betina, ime joj dolazi od keltske (ilirske) riječi *bet* — znači usta — i augmentativnog nastavka *-ina,* a to je zbog toga što luka ima oblik velikih razvaljenih usta«.

Na isti se način može shvatiti opći naziv betina za Getaldićevu špilju, te iz toga naziva izvoditi njegov čudan nadimak Bete ili Betino. Zanimljivo je da je i oko sela Betine nastalo pučko tumačenje tog imena, pomoću neke tobožnje gospodje Betìne.[4]

Metodu algebarske analize geometrijskih problema, što je Getaldić upotrebljava u svom posthumnom djelu »De resolutione et compositione mathematica«, pronašao je on skupa s Françoisom Viètom, s kojim je tijesno surađivao od godine 1600. kad se s njim upoznao u Parizu. Riječ *resolutio,* koja stoji u naslovu knjige, znači upravo algebarsku analizu. Ova se pokazala moćnim sredstvom za istraživanje rješenja i za konstrukciju geometrijskih problema, što se označuje kao *compositio.* Prema današnjem izražavanju, riječ »resolutio« prevodimo sa: algebarska analiza ili, jednostavno, analiza; a riječ »compositio« sa: sinteza ili geometrijska konstrukcija.

Budući da algebarska analiza utire put analitičkoj geometriji, i budući da je Getaldićevo djelo objelodanjeno sedam godina prije Descartesove »Gèometrie«, bilo je tvrdnji po kojima se Getaldiću

[4] O knjizi Don Krste Stošića, kao i o pučkom tumačenju imena Betina, izvješćuje me župnik sela Betine Don Ante Hailo u pismu od 29. svibnja 1972.



Sl. 3.

davala prednost pred Descartesom, osnivačem analitičke metode u geometriji. Takve je tvrdnje sveo na pravu mjeru već Eugen

Gelčić godine 1882.[5] Nesumnjivo je Getaldić došao na sam prag Descartesova otkrića. Gdje se to dogodilo i koliko je Getaldiću manjkalo do potpune Descartesove misli?

To kritičko mjesto jesu četvrti i peti zadatak trećeg poglavlja pete knjige »De resolutione et compositione mathematica«. U ovoj radnji idemo tragom Getaldićevih misli do u pojedinosti i dodajemo ono što mu je manjkalo do otkrića koordinatnog sustava, toga osnovnoga pojma analitičke metode. Dosad je to samo djelomično provedeno,[6] te je poznato da četvrti zadatak dovodi do skupa točaka koji predstavlja hiperbolu, a peti do skupa točaka koji predstavlja elipsu.

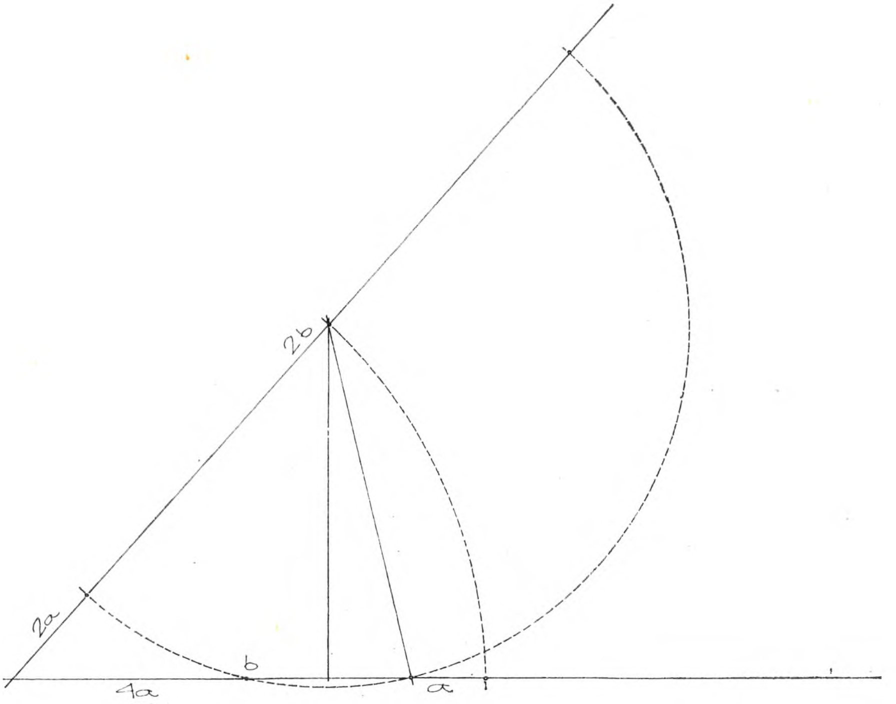
U četiri prve knjige svog posthumnog djela »De resolutione et compositione mathematica« mnoge zadatke rješava Getaldić na opisan način: služeći se algebarskom analizom dolazi do geometrijske konstrukcije. Peta je pak knjiga posvećena završnim i dopunskim radovima koji, sa stajališta glavne zamisli djela, imaju tek sporednu važnost. Tu se nalaze zadaci kojima nisu potrebne konstrukcije (prvo poglavlje), zatim zadaci koji nemaju rješenja (poglavlje drugo); zatim, u trećem poglavlju, zadaci s bezbroj rješenja, koji nas ovdje posebno zanimaju; te, konačno, u četvrtom poglavlju, zadaci koji ne spadaju u algebru.

Da Getaldić nije davao važnosti zadacima s bezbroj rješenja, vidi se po tome što ih naziva ništavim ili tričavim zadacima — problemata vana seu nugatoria. Ovaj dvostruki naziv, ništav ili tričav, ne upućuje na razlikovanje zadataka koje zadovoljava svako rješenje od zadataka koji doista imaju neizmjerno mnogo rješenja, ali ih ne zadovoljava bilo koje rješenje. Getaldić doista razlikuje te dvije vrste zadataka, ali ih ne dijeli i ne razlikuje po imenu, već se za obje vrste služi sinonimima. Po tome se vidi da mu nije svrha naći i označiti — gdje je to moguće, to jest kod zadataka koje ne zadovoljava svako rješenje — što sačinjava skup svih rješenja. On samo želi algebarskim putem ustanoviti da zadatak ima bezbroj rješenja, te to potvrditi geometrijskom konstrukcijom. Da je pošao korak dalje i potražio što predstavljaju sva rješenja takva zadatka, bio bi došao do neke krivulje i do algebarskog izraza koji tu krivulju označuje, to jest do osnovne misli analitičke geometrije.

Sve će to biti očito iz slijedećeg prikaza, gdje iz pete knjige donosimo u doslovnom prijevodu početak III poglavlja, te — izostavivši prva tri zadatka — cjelovit kratak tekst četvrtog i petog

[5] Gelcich Eugen, Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie ecc., Schlömilch Zeitschrift für Math. u. Physik XXVII (1882), histor. Anhang.

[6] Kučera Oton, prof., Rad Jugoslavenske Akademije, br. 117, god. 1893, O Marinu Getaldiću, patriciju dubrovačkom. Od navedena dva zadatka obrađen je samo prvi, i to ne ulazeći u sve pojedinosti.



Sl. 4.

zadatka, a svakom zadatku dodajemo ono što je Getaldiću manjkalo do otkrića analitičke metode.

»Poglavlje III. Kako se poznaju ništavi ili tričavi zadaci.

»Izloživši što spada u poznavanje nemogućih zadataka, red je da kažem kako se poznaju ništavi ili tričavi zadaci. Oni su, naime, nemogućim zadacima posve oprečni, jer zadatak se zove nemogućim kad se ni na kakav način ne može postići ono što zadatak traži. Zadatak je pak ništav ili tričav kad je zadatku udovoljeno ako se uzme na bilo koji način ono što zadatak traži, ili kad se zadatak može konstruirati na neizmjerno mnogo načina.[7]

»Kad god, dakle, pravilno obavljena analiza zadatka navede na beskorisnu jednadžbu, znak je da je zadatak ništav i tričav.[8] A beskorisnom zovem jednadžbu kad se u njoj veličine izjednačuju same sa sobom, ili kad se zadane veličine izjednačuju sa zadanim

[7] Evo razlikovanja dviju vrsta zadataka: jednima zadovoljava svako rješenje, drugima bezbroj rješenja, ali ne svako. Oba zadatka, koja se u ovoj radnji obrađuju, spadaju u drugu vrstu.

[8] Evo dva sinonima što podjednako označuju obje vrste zadataka.

veličinama, a nepoznanica je isključena. Tad se, naime, nepoznanica ne može izraziti zadanim veličinama, u koju svrhu se jednadžba postavlja«.

ZADATAK IV — Nad zadanom osnovicom treba podići trokut u kojem će razlika krakova biti jednaka polovici osnovice.

ANALIZA — »Neka je zadana osnovica *2b*. Nad njom treba nacrtati trokut čija će razlika krakova biti jednaka polovici osnovice. Pretpostavimo da je to učinjeno. Razlika krakova bit će *b*.

(*V. sl. 1.*)

S vrha trokuta povucimo okomicu na osnovicu. Okomica siječe na osnovici dva odsječka. Razlika odsječaka neka bude *a*, pa će veći odsječak biti $b+\frac{a}{2}$, a manji $b-\frac{a}{2}$.

Budući da se razlika krakova u trokutu odnosi prema razlici odsječaka na osnovici kao osnovica prema zbroju krakova (korolarij II zadatka I, knjiga I), to jest :

$$b : a = 2b : 2a,$$

bit će *2a* zbroj krakova, ali razlika istih krakova je *b*, pa će veći krak biti $a+\frac{b}{2}$, a manji $a-\frac{b}{2}$. A budući da je kvadrat većeg kraka (Pitagorin poučak) jednak zbroju kvadrata nad većim odsječkom i kvadrata nad visinom, to se oduzimanjem kvadrata većeg odsječka od kvadrata većeg kraka dobiva kvadrat visine :

$$(a+\frac{b}{2})^2 = a^2 + ab + \frac{b^2}{4}$$

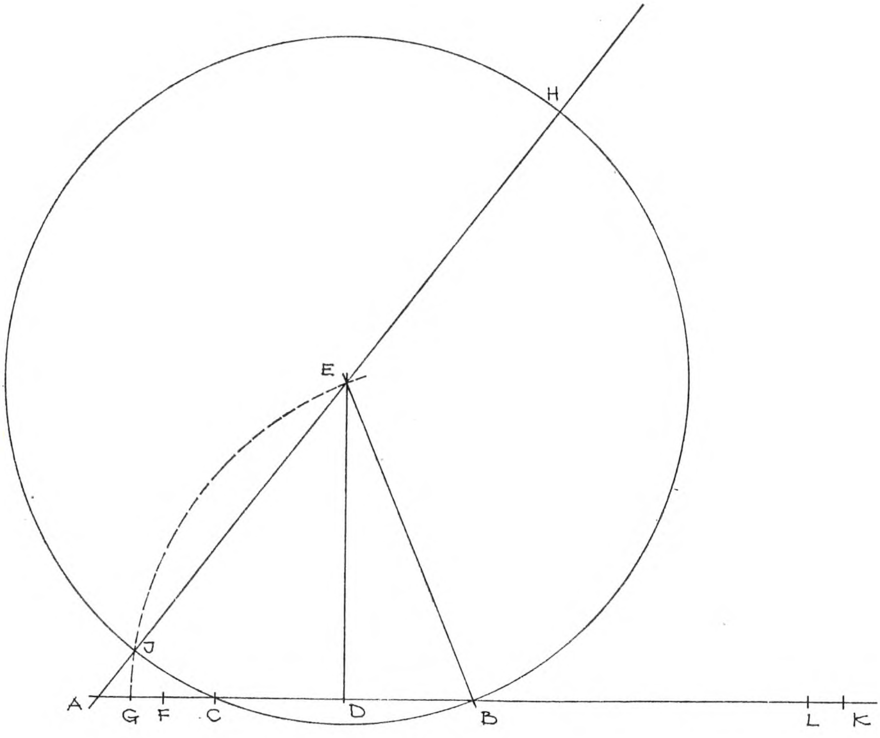
$$(b+\frac{a}{2})^2 = b^2 + ab + \frac{a^2}{4};$$

ostatak će biti kvadrat visine :

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} - b^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{3a^2}{4} - \frac{3b^2}{4}$$

»Na isti način, budući da je kvadrat manjeg kraka jednak zbroju kvadrata manjeg odsječka i kvadrata visine, ako od kvadrata manjeg kraka oduzmemo kvadrat manjeg odsječka dobivamo kvadrat visine :

$$(a-\frac{b}{2})^2 = a^2 - ab + \frac{b^2}{4}$$



Sl. 5.

$$\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - ab + \frac{a^2}{4}$$

ostaje za kvadrat visine isti izraz kao gore:

$$v^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3b^2}{4},$$

te imamo: $$\frac{3a^2}{4} - \frac{3b^2}{4} = \frac{3a^2}{4} - \frac{3b^2}{4}.$$

»Ova je jednadžba beskorisna, jer se s obje strane jednadžbe nalaze iste veličine. Stoga je ovo ništav i tričav zadatak, jer će se nad istom osnovicom moći nacrtati bezbroj trokuta čija će razlika krakova biti jednaka polovici osnovice, što je jasno iz sinteze koja slijedi:

»SINTEZA« — Neka je zadana osnovica AB nad kojom treba nacrtati trokut, tako da mu razlika krakova bude jednaka polovici osnovice. Neka se raspolovi osnovica u *C* i neka se na osnovici uzme odsječak AD po volji veći od AC, a ostatak DB neka se raspolovi i neka se u polovištu E podigne okomica EG, a odsječak AD neka se podvostruči u F. Zatim neka se raspolovi CF u H, te iz središta A s polumjerom AH neka se povuče luk koji siječe pravac EG u G, pa neka se spoji G s A i B.

(V. sl. 2.)

»Tvrdim da je trokut ABG traženi trokut.«

»Iz središta G s polumjerom GB neka se opiše kružnica koja siječe krak AG u I, a njegovo produženje u K. Ta će kružnica prolaziti točkom D, jer su dužine DE i EB jednake, prema crtežu. A budući da je AB dvostruko od AC, a AF dvostruko od AD, bit će

$$AC : AB = AD : AF,$$

pa će umnožak vanjskih biti jednak umnošku unutrašnjih:

$$AC \cdot AF = AD \cdot AB.$$

No, kako je prema poznatom, ranije dokazanom, poučku:

$$AI \cdot AK = AD \cdot AB,$$

bit će:

$$AI \cdot AK = AC \cdot AF.$$

Umnožak AI · AK je dalje jednak:

$$AI \cdot AK = AI \cdot (AI + 2\,IG) = AI^2 + 2\,AI \cdot IG,$$

a slično je:

$$AC \cdot AF = AC \cdot (AC + 2\,CH) = AC^2 + 2\,AC \cdot CH,$$

jer je CH = HF.

Dakle je: $AI^2 + 2\,AI \cdot IG = AC^2 + 2\,AC \cdot CH$.

Budući da su dužine AG i AH jednake, prema crtežu, bit će jednaki i njihovi kvadrati, to jest:

$$AG^2 = (AI + IG)^2 = AI^2 + 2\,AI \cdot JG + IG^2$$
$$AH^2 = (AC + CH)^2 = AC^2 + 2\,AC \cdot CH + CH^2.$$

Imamo dakle:

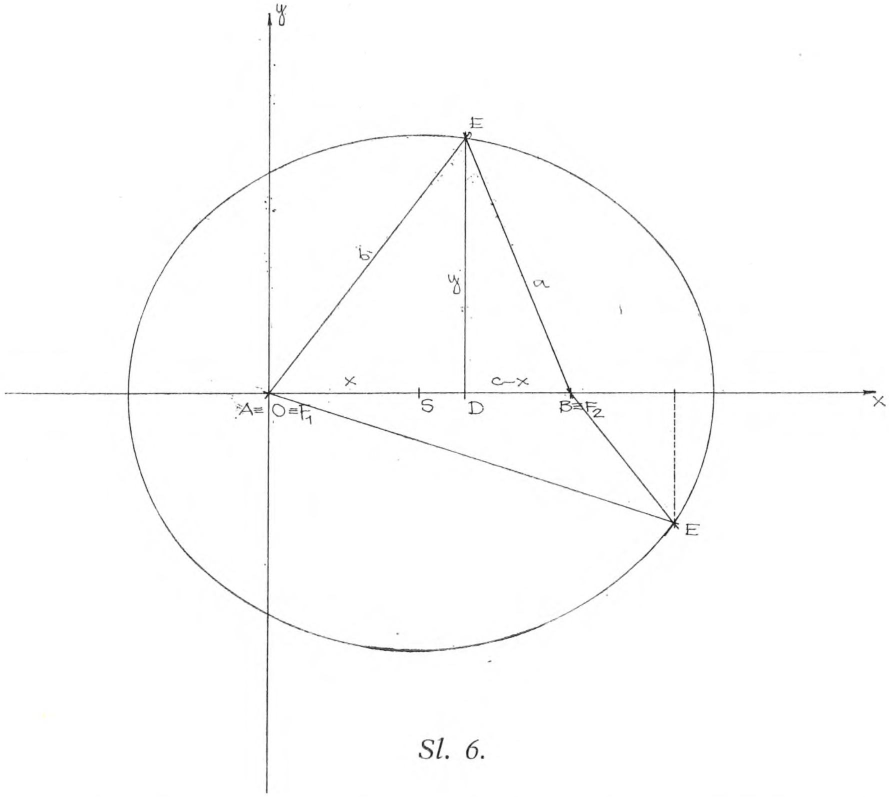
$$AI^2 + 2\,AI \cdot IG + IG^2 = AC^2 + 2\,AC \cdot CH + CH^2$$

No: $AI^2 + 2\,AI \cdot IG = AC^2 + 2\,AC \cdot CH$

kako je gore pokazano. Dakle, preostali je kvadrat IG^2 jednak preostalom kvadratu CH^2, a odatle slijedi da su jednake i dužine

$$IG = CH.$$

Budući da su jednake dužine AG i AH, bit će jednak i AI s ostatkom AC, koji je polovica osnovice AB.



Sl. 6.

»Nad zadanom osnovicom AB nacrtan je trokut ABG čija je razlika AI krakova jednaka polovici osnovice AB. A to je trebalo učiniti.

»SKOLIUM — U konstruktivnoj sintezi zadatka uzeta je na osnovici AB dužina AD — kao razlika odsječka AE i EB — po volji, samo je uzeta tako da bude veća od polovice AC osnovice, jer je razlika odsječaka na osnovici veća od razlike krakova trokuta, kako smo dokazali u drugoj knjizi, poučak prvi prije konstruktivne sinteze trećeg zadatka. Razlika krakova mora biti jednaka polovici osnovice, po zahtjevu zadatka, pa je tako dobiven trokut kako zadatak traži. Nad istom osnovicom AB mogu se, dakle, nacrtati bezbrojni trokuti — kad se AD uzme po volji drukčije — s istim uvjetom, pa je ovaj zadatak ništav i tričav«.

— o —

Getaldić ne ide dalje od te tvrdnje da zadatak ima bezbroj rješenja. Očito je da točka G ne može biti bilo gdje, nego je ona određena uvjetima zadataka, kako pokazuje provedena konstrukcija. Zadatak, dakle, vodi istraživanju gdje leže i što tvore sve točke G. Nije vjerojatno da je Getaldića mimoišla takva misao koju je on, nakon duljeg ili kraćeg razmišljanja, otklonio kao stvar bez interesa. Da se je pak zainteresirao za to pitanje, mogao je sve te točke naći u kontinuiranom nizu konstruktivnim putem, mijenjajući kontinuirano točku D i — dosljedno — točku G. Pri tom poslu bi kontinuiranoj promjeni dužine CD odgovarala kontinuirana promjena dužine CE i, po tom, kontinuirana promjena visine EG. To nadalje navodi na misao da su dvije — za točku G karakteristične — dužine CE i EG u međusobnom odnosu, koji je postavljen u uvjetima zadatka. Istraživanje takvih geometrijskih uvjeta pomoću opće algebre provodi Getaldić u ovom djelu općenito, te je mogao lako odrediti odnos među tim dužinama na slijedeći način, gdje — radi zgodnijeg izražavanja — postavljamo ove oznake:

$$CE = x \qquad AB = c$$

$$EG = y \qquad BG = a = \sqrt{\left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2}$$

$$GA = b = \sqrt{\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2}$$

Uvjet zadatka izražen je jednadžbom:

$$b - a = \frac{c}{2}$$

odnosno:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2} = \frac{c}{2} \qquad (1)$$

Već razabiremo da (1) predstavlja jednadžbu hiperbole. Svedimo je na kanonski oblik, eliminacijom iracionaliteta kvadrirajući dvaput cijelu jednadžbu, nakon što smo iracionalitet, koliko je moguće, izolirali. Kanonski oblik bit će:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c}{4}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}\,c}{4}\right)^2} = 1 \qquad (2)$$

Dobivena jednadžba (2) prikazuje hiperbolu sa središtem u polovištu osnovice trokuta. Realna poluos iznosi četvrtinu osnovice $\frac{c}{4}$, a imaginarna poluos je nešto veća, to jest $\frac{\sqrt{3}\,c}{4}$.

Ekscentricitet e iznosi :

$$\sqrt{\left(\frac{c}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\,c}{4}\right)^2} = \frac{c}{2}$$

To znači da će dužina među žarištima $F_1F_2 = 2e$ biti jednaka dužini osnovice *c*. Krakovi traženog trokuta bit će radijvektori svake pojedine točke hiperbole, a osnovica trokuta je uvijek ista dužina F_1F_2.

Naše se rješenje, dakle, slaže s definicijom hiperbole kojoj je razlika radijvektora jednaka polovici dužine među žarištima. To je rješenje prikazano slikom 3. (*V. sl. 3.*)

Kako je obrađen zadatak IV, obradit ćemo i zadatak V trećeg poglavlja pete knjige Getaldićeva djela. Ovaj će nas, kako je već rečeno, dovesti na jednadžbu elipse do koje se Getaldić mogao dovinuti da je u svojim razmišljanjima pošao korak dalje.

»ZADATAK V — Nad zadanom osnovicom treba podići trokut čija će razlika odsječaka na osnovici[9] biti jednaka dvostrukoj razlici krakova, a sama će razlika krakova biti jednaka dvostrukoj dužini čiji veći krak nadmašuje osnovicu.

»ANALIZA — Zadana je osnovica *b* i treba nacrtati kako se traži. Uzmimo da je trokut već nacrtan, pa nek je *a* dužina čiji veći krak nadmašuje osnovicu. Razlika krakova, dakle, bit će *2a*, a razlika odsječaka na osnovici bit će *4a*. Kako veći krak nadmašuje osnovicu za *a*, bit će veći krak : b + a, a manji krak dosljedno : b — a. Krakovi se naime, razlikuju za *2a*, pa će njihov zbroj biti *2b*. A, prema dokazanom 6. teoremu druge knjige, umnožak[10] razlike krakova i njihova zbroja jednak je umnošku osnovice i razlike odsječaka na osnovici, to jest:

$$2a \cdot 2b = b \cdot 4a$$

$$4ab = 4ab. \qquad (V.\ sl.\ 4.)$$

Ova je jednadžba beskorisna, jer se u njoj izjednačuju veličine same sa sobom. Stoga kažemo da je zadatak tričav. A to i jest, jer se nad istom osnovicom može podići bezbroj trokuta koji zadovoljavaju istim uvjetima, kako će se vidjeti iz slijedeće sinteze.

»SINTEZA — Zadana je osnovica AB nad kojom treba podići trokut čija će razlika odsječaka na osnovici biti jednaka dvo-

[9] Odsječke na osnovici određuje visina trokuta, okomica povučena sa suprotnog vrha.

[10] U latinskom originalu za umnožak stoji riječ *rectangulum*, što doslovno znači pravokutnik, a misli se na površinu pravokutnika koja se dobiva *umnoškom* stranica.

strukoj razlici krakova, a sama će razlika krakova biti (*V. sl. 5.*) jednaka dvostrukoj dužini kojom veći krak nadmašuje osnovicu. Neka se od zadane osnovice odsiječe dio AC po volji, a ostatak CB neka se raspolovi u D, pa iz D neka se podigne okomica neodređene dužine DE. Ponovno neka se raspolovi AC u F, i AF u G. Iz B, kao središta, neka se povuče kružnica s polumjerom BG koja siječe okomicu DE u E, pa neka se E spoji s A i B. Tvrdim da je u trokutu ABE razlika odsječaka AD i DB dvostruko veća od razlike krakova AE i BE, a ta razlika krakova da je dvostruko veća od dužine kojom veći krak AE nadmašuje osnovicu AB.

»Neka se, naime, iz E kao središta opiše polumjerom EB kružnica koja siječe veći krak AE u I, a njegovo produženje u H, pa neka se podvostruči AB do K i neka se odredi L tako da bude AG = LK. Bit će dakle:

$$BL = GB = EB,$$

pa je stoga GL = IH, a ista dužina GL = FK, jer je FG = LK. Bit će, dakle, i FK = IH.

»Nadalje su među sobom jednaki i ovi umnošci:

$$AI \cdot AH = AC \cdot AB,$$

prema poznatom, ranije dokazanom, teoremu, a to je dalje:

$$2AF \cdot AB = AF \cdot 2AB = AF \cdot AK.$$

Budući da je AH = AK, zaključujemo da je:

$$AI = AF$$

prema trećem teoremu druge knjige koji glasi: Ako se od dviju dužina odsijeku jednaki dijelovi, pa je umnožak cijele i ostalog u jedne jednak umnošku cijele i ostalog dijela u druge, onda je cijela dužina jednaka cijeloj drugoj dužini i ostali dio jedne jednak je ostalom dijelu druge.

»Stoga je razlika AC odsječaka AD i DB dvostruko veća od razlike AI krakova AE i BE.

»Budući da je krak EB manji od kraka AE za dužinu AI = AF, a od osnovice AB manji je za AG prema crtežu, krak će AE nadmašivati osnovicu dužinom AG = GF, a 2AG = AF = AI, što je jednako razlici krakova.

»Nad zadanom, dakle, osnovicom AB podignut je trokut ABE čija je razlika AC odsječaka AD i DB dvostruko veća od razlike AI krakova AE i EB, a ta razlika AI je dvostruko veća od dužine kojom veći krak AE nadmašuje osnovicu AB. A to je trebalo postići.

»SKOLIUM — U ovoj sintezi zadatka uzeta je na osnovici AB dužina AC po volji i nacrtan je trokut koji ima tražene uvjete. Nad istom osnovicom mogu se, dakle, nacrtati bezbrojni trokuti.

Kad, naime, na osnovici uzmemo bilo gdje točku C i kad sve ostalo izvedemo kao gore, bit će zadatku udovoljeno. Stoga je ovaj zadatak ništav i tričav. Na sličan se način pokazuje da je ništav i tričav svaki zadatak koji pravilno izvedenom analizom dovodi do beskorisne jednadžbe«.

— o —

S tom općenitom tvrdnjom svršava poglavlje koje i nije za drugo napisano nego da tu tvrdnju dokaže. U Getaldića, dakle, nema govora o kakvu prikazivanju krivulja pomoću algebarskih tvorevina, to jest pomoću jednadžbi, ili pak o koordinatnom sustavu. On se zadovoljava time da pomoću algebre ustanovi da zadatak ima bezbroj rješenja. Mi se, pak, pitamo što je na ovom konkretnom primjeru Getaldiću manjkalo da se dovine do tih osnovnih pojmova analitičke geometrije. Manjkalo mu je samo to da pobliže ispita što sačinjava skup bezbrojnih datih rješenja.

Istaknimo i ovdje, kako smo slično istaknuli kod prethodnog zadatka, da svaka točka u ravnini ne zadovoljava, nego samo točke E kojih ima bezbroj, a nađene su prema uvjetima zadatka. Na dlanu je, dakle, misao da se istraži skup točaka E. Getaldić je tu misao otklonio, ali nije vjerojatno da se njome nije više ili manje bavio. Imao je sva sredstva pri ruci da istraži kontinuiran pomak točke E kad se kontinuirano mijenja točka i, dosljedno, točka D. Očito je da su dužine AD i DE u međusobnoj ovisnosti, a ta se ovisnost lako može algebarski izraziti uvjetima zadatka. Evo postupka koji je Getaldiću bio posve na dohvatu ruke. Mi ćemo, radi lakšeg izražavanja, postaviti ove oznake:

$$AD = x \qquad AB = c$$
$$DE = y \qquad BE = a$$
$$EA = b$$

Uvjeti zadatka izraženi su ovim relacijama:

$$x - (c - x) = 2(b - a) \tag{3}$$

$$b - a = 2(b - c). \tag{4}$$

Prema Pitagorinu poučku imamo:

$$b = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5}$$

Iz (3) eliminirati veličine a i b uvrstivši u (3) njihove izraze iz (5) i (4). Dobivamo iracionalnu jednadžbu:

$$2x + 3c = 4\sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

Kvadriranjem jednadžbe (6) oslobađamo se iracionaliteta i zatim dovedemo jednadžbu u kanonski oblik:

$$\frac{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2}{c^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}\,c}{2}\right)^2} = 1 \qquad (7)$$

Promjenljive veličine x i y uvijek su u ovom odnosu kako god se mijenjale, pa je jednadžba (7) važna za skup svih točaka E koje, kao treći vrh trokuta, uz zadane točke A i B, predstavljaju rješenje zadatka. Taj skup sačinjava elipsu kojoj je središte u polovištu zadane osnovice c, velika joj je poluos c, a malena poluos $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, kako nam je danas na prvi pogled očito iz dobivene jednadžbe. Slika 6 pokazuje da točka D može pasti i izvan osnovice AB. To je slučaj kada točka C dijeli dužinu AB — ne na unutarnji način, padajući unutar dužine, nego — na izvanjski način, padajući izvan dužine AB. U tom slučaju je odsječak CB negativan (—CB), pa je razlika odsječaka:

(V. sl. 6.)

$$AB - (-CB) = AB + BC.$$

Ovo je jedan dokaz više da algebarska analiza dohvaća sve slučajeve, pa i one do kojih geometrijski način teže dolazi.

Osnove analitičke geometrije, to jest koordinate točke E u ovom zadatku i koordinate točke G u prethodnom, te jednadžbe (2) i (7), kao algebarski izrazi krivulja, u ova dva zadatka nisu uvedeni nimalo nasilno, nego posve spontano, tako da otkriće analitičke metode ne bi Getaldiću bilo moglo izbjeći da se ovim zadacima zabavio s posebnog stajališta, kako smo izložili.

Da bi se zadobila slava otkrivača analitičke metode, nije bilo dovoljno samo to. Upotrijebiti novu metodu u nekoliko slučajeva, kao slučajno, a ne biti svjestan da je to način koji općenito može služiti u nauci, još ne bi značilo otkriti novu metodu. Novost treba shvatiti i prikazati kao novu metodu koja vrijedi općenito.

Ali, ne treba misliti da je i Descartes pošao tako daleko. Analitička metoda izbija na vidjelo nešto jasnije kao općenita metoda tek u drugom dijelu Descartesove »Geometrie«. Naslov toga djela glasi: »De la nature de courbe — o naravi krivulje«. Tu se zabacuje stara razdioba krivulja na loci plani, loci solidi i loci plano-plani ili lineares, te se određuje narav krivulje po stupnju jednadžbe koja daje pojedine točke krivulje. O nekoj općoj pojmovnoj odredbi koordinatnog sustava i koordinata točaka nema ni u Descartesovoj »Geometrie« nigdje govora. Navedena je samo misao, vrlo sretna misao, da se pojedine točke čunjosječica mogu odrediti u ravnini pomoću jednadžbe i parova brojnih vrijednosti, te se nije potrebno pozivati na čunj. To je otprilike sve što se u Descartesovu djelu odnosi na kasniju analitičku geometriju kao općenitu metodu. On se bavi posebnim krivuljama, s četiri ovala, koji su ostali poznati kao Descartesovi ovali, te istražuje njihova svojstva iz njihovih jednadžbi. Treća knjiga »Geometrie« ne obrađuje geometrijske probleme, nego opširno razlaže nauku o jednadžbama, jer su se jednadžbe pokazale važnima za novu metodu obrade krivulja.

Vidimo, dakle, da je Getaldić vrlo blizu Descartesu već time što je — skupa s Vièteom — općenito uveo algebru kao metodu za rješavanje geometrijskih zadataka. To su njegove algebarske analize koje mu služe za konstruktivne sinteze onoga što zadatak traži. Najviše se, pak, približio Descartesu u petoj knjizi djela »De resolutione et compositione mathematica«, gdje u trećem poglavlju, poimence u IV i V zadatku, dolazi na sam prag ideje o prikazivanju krivulje u ravnini pomoću jednadžbe. Da je tim zadacima posvetio samo malo više pažnje, bio bi u IV zadatku došao do jednadžbe hiperbole, a u V zadatku do jednadžbe elipse, kako je u ovoj radnji pokazano.

Košljun, 12. svibnja 1972.

Andrija Bonifačić

WHERE WAS MARIN GETALDIĆ THE CLOSEST TO DESCARTES

Summary

Marin Getaldić (1586—1626), the Dubrovnik nobleman, improved mathematical science by applying algebra in solving geometrical problems. He followed the method of Francois Viete, who was his acquaintance and friend. These his works were published four years after his death in 1630 under the title *De Resolutione et Compositione Mathematica.* It was 7 years before the publication of Descartes's Geometrie (1637).
Descartes found out that geometrical figures — curves in general — could be demonstrated with algebraic terms treating them in that way.

He is considered, with all reason, the founder of analytic geometry. Getaldić was not so lucky to find out the algebraic term for a curve, but however he came very close to it. Where could it be seen?

The 5th book of the mentioned work »*De Resolutione*« deals with final and additional works which are not important from the point of view of the main intention. The third chapter deals with aritmmetical problems with innumerable results. The author calls them Trifling und Unimportant problems, Problemata Vana et Nugatoria. Very important problems are the 4 th and the 5th which have countless results, but not every result can be satisfactory. The point, which represents the result, is changing continuously and so it forms in the 4th problem a hyperbola and in the 5th it forms an ellipse when we change at will a certain length, independent variable, on which the point depends and length which is the result.

In these two problems Getaldić prepared everthing to demonstrate a curve in the form of an Equation which determines the functional correlation of two variables. Getaldić had only to find out that correaltion which he anticipated. In that way he would out do Descartes in discovering the analytic method as he out did Descartes's Geometrie with his posthumous work.