

## Reološko modeliranje istezanja pređe

Prof.dr.sc. **Dragan T. Stojilković**, dipl.ing.

Doc.dr.sc. **Vasilije Petrović**, dipl.ing.\*

Dr.sc. **Maja Đurović-Petrović**, dipl.ing.\*\*

Tehnološki fakultet, Leskovac, Srbija

\*Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin" u Zrenjaninu

Zrenjanin, Srbija

\*\*Ministarstvo nauke i zaštite životne sredine

Beograd, Srbija

e-mail: dragansto@yahoo.com

Prispjelo 29.09.2006.

UDK 677.022:539.5

Izvorni znanstveni rad

*Na temelju eksperimentalnih podataka dobivenih za istezanje pređe u standardnim uvjetima ispitivanja, kombinacijom poznatih elementarnih reoloških modela, postavljenih reoloških modela istezanja pređe, izvedene su i riješene odgovarajuće diferencijalne jednačbe za ispitivane pređe. Time je dobivena ovisnost između jedinične sile (naprezanja) i relativnog istezanja. Modeli su postavljeni za tri vrste pređe: vunena pređa finoće 21 tex prosječnog broja uvoja 1646 m<sup>-1</sup> uz koeficijent varijacije 6,78%, pamučna pređa finoće 10 tex prosječnog broja uvoja 1020 m<sup>-1</sup> uz koeficijent varijacije 16,7 i pređa od mješavine vuna/PES 76/24% finoće 12,5 tex prosječnog broja uvoja 1080 m<sup>-1</sup>.*

**Ključne riječi:** pređenje, istezanje pređe, diferencijalne jednačbe istezanja, pamučna pređa, vunena pređa, pređa od mješavine vuna/PES

### 1. Uvod

Mehanička svojstva pređe polazni su parametri pri projektiranju tehnoloških procesa i pri podešavanju radnih parametara u tekstilnoj industriji. U procesima prerade, pređa je izložena različitim opterećenjima čiji je karakter najčešće promjenjiv ili impulzivan. Ovakva opterećenja najčešće izazivaju kidanje pređe ili pojavu nepoželjnih viskoelastičnih ili plastičnih deformacija. Takve deformacije su nepoželjne jer se nepoželjni efekti, loša kvaliteta gotovog proizvoda, npr. tkanine, mogu uočiti tek u završnim fazama prerade, odnosno nakon oplemenjivanja i bojadisanja. Zbog toga se dobra kvaliteta gotovog proizvoda postiže ako se tijekom prerade pređe osiguraju takvi uvjeti u kojima će deformacije biti u granicama elastičnog područja.

Do sada su se preporuke o veličini kretanja dozvoljene sile naprezanja

pređe u različitim procesima obrade kretale u širokim granicama od 10 do 25% od vrijednosti prekidne sile pređe. Međutim, zahvaljujući ispitivanju mehaničkih svojstava pređe, postavljanju odgovarajućih reoloških modela i dobroj analizi promjene opterećenja u različitim procesima prerade pređe, dozvoljene vrijednosti sile naprezanja pređe trebaju se kretati u granicama pojave elastičnih deformacija, i na temelju te vrijednosti sile vrši se optimizacija i potpuna automatizacija odgovarajućih procesa. Kod suvremenih procesa prerade pređe zahtijeva se visoka proizvodnost, odgovarajuća kvaliteta gotovog proizvoda i što veći stupanj automatizacije procesa prerade pređe a to zahtijeva istovremeno praćenje većeg broja radnih parametara. Stoga se suvremena istraživanja u ovom području usmjeravaju na razvoj već raspoloživih komponenata [1-5]:

- mikroprocesorsko upravljanje strojevima,
- senzora i sustava za kvalitetna mjerenja odgovarajućih parametara u procesu proizvodnje (radnih parametara koji karakteriziraju stanje objekata i rada stroja),
- usklađivanje radnih parametara stroja s mehaničkim svojstvima pređe, potpuna optimizacija procesa tijekom samog procesa prerade pređe,
- radna sposobnost računalnog sustava za nadzor i upravljanje procesom.

U budućnosti će ovi zahtjevi biti još stroži i ogledat će se u povećanju inteligencije stroja, a to znači u razvoju sustava komunikacije sa sustavom upravljanja. Ovakav sustav naziva se *sustavom za vođenje* [3] i on automatski registrira i otklanja uzroke kvarova i zastoja (npr. razvoj i poboljšanje postojećeg elektroničkog čuvara potke i razvoj sustava koji može otklanjati uzroke prekida potke, razvoj sustava koji

može na osnovu prethodno određenih karakteristika pređe automatski podesiti svoje radne parametre, razvoj sustava za registriranje prekida niti osnove i uklanjanje uzroka prekida osnove tijekom rada tkalačkog stroja, razvoj sustava za tehničku dijagnostiku pojedinih sklopova tkalačkog stroja itd.

Za ispunjenje ovih zahtjeva neophodno je paralelno pratiti mogućnost dobivanja pređe visoke kvalitete, odnosno, pređe koja može izdržati velika dinamička opterećenja i u skladu s tim razvijati sustave odgovarajućih mehanizama i sustave upravljanja.

Međutim, kako je proizvodnja visokokvalitetne pređe vrlo skupa [2], dalja istraživanja usmjerena su ispitivanju i modeliranju mehaničkih karakteristika pređe, usavršavanju mehanizama i stroja te njihovom prilagođavanju mehaničkim karakteristikama pređe, čija kvaliteta odgovara sadašnjem stupnju razvoja tehnologije prerade pređe.

## 2. Pregled osnovnih reoloških modela

Reologija je znanost koja se bavi fizikom deformacija i osnovni joj je cilj uspostavljanje veze između sila, odnosno, naprežanja i njihovih derivacija po vremenu, te nastalim deformacijama uslijed djelovanja tih sila i njihovih derivacija po vremenu.

Pri izradi reoloških modela polazi se od osnovnih, elementarnih modela koji opisuju elastične, viskoelastične i plastične deformacije. Elastične deformacije predstavljaju se Hookovom oprugom, viskozno tečenje predstavlja se Newtonovim

tijelom i plastične deformacije tijekom Saint Venanta. Kombiniranjem ovih tijela, odnosno modela mogu se opisati viskoelastične i viskoelastične deformacije [1].

Najpoznatiji modeli koji se često koriste u kombinaciji s ostalim modelima su Maxwellov model, koji predstavlja rednu vezu između Hookove opruge i Newtonovog viskoznog prigušivača ( $\mathbf{M} = \mathbf{H} - \mathbf{N}$ ), te Kelvinov model koji predstavlja paralelnu vezu između Hookove opruge i Newtonovog tijela ( $\mathbf{K} = \mathbf{H} \mathbf{I} \mathbf{N}$ ). Kelvinov model često se susreće u literaturi i kao Kelvin-Voightov model. Ova dva modela prikazana su na sl.1 i 2.

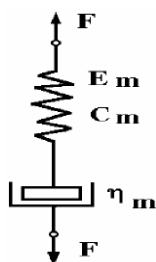
Veza između naprežanja i deformacije prikazana je sljedećom jednačicom (1):

$$r_n \cdot \sigma^{(n)} + r_{n-1} \cdot \sigma^{(n-1)} + \dots + r_1 \cdot \dot{\sigma} + r_0 \cdot \sigma = q_n \cdot \varepsilon^{(n)} + q_{(n-1)} \cdot \varepsilon^{(n-1)} + \dots + q_1 \cdot \dot{\varepsilon} + q_0 \cdot \varepsilon \quad (1)$$

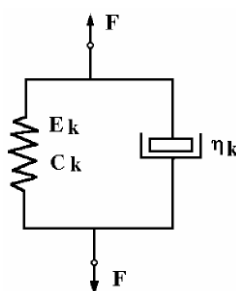
gdje je:  $r_i$ ,  $q_i$  - različiti koeficijenti,  $\varepsilon^{(n)}$ ,  $\varepsilon^{(n-1)}$ ,  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon$  - deformacije i derivacija deformacija po vremenu,  $\sigma^{(m)}$ ,  $\dot{\sigma}$ ,  $\sigma$  - naprežanje (jedinčna sila) i derivacija naprežanja po vremenu.

Ako su u jednačici (1) samo koeficijenti  $q_0$  i  $r_0$  različiti od nule, dobiva se model Hookove opruge, kod koje je modul elastičnosti  $E = q_0/r_0$  i  $\sigma = E \varepsilon$ .

Ako su koeficijenti  $q_1$  i  $r_0$  različiti od nule, dobiva se model Newtonovog tijela, odnosno  $\eta = q_1/r_0$ ,  $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$ . U slučaju kada su koeficijenti  $q_0$ ,  $r_0$  i  $r_1$  različiti od nule, dobiva se Maxwellov model, gdje je  $E = q_1/r_1$  - modul elastičnosti,  $\eta = q_1/r_0$  - koeficijent viskoznosti,  $\tau = r_1/r_0$  - relaksacijska konstanta,  $\dot{\varepsilon} = \sigma/\eta + \dot{\sigma}/E$ .



Sl.1 Maxwellov model



Sl.2 Kelvin-Voightov model

Kada su koeficijenti  $q_0$ ,  $q_1$  i  $r$  različiti od nule dobiva se Kelvin-Voightov model, gdje je  $E_0 = q_0/r$  - modul elastičnosti,  $\eta = q_1/r_0$  - koeficijent viskoznosti,  $\tau = q_1/r_0$  - relaksacijska konstanta,  $\sigma = E \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}$ .

Prvi reološki model vunenog vlakna postavio je Feughelman [6-8] i na njemu se zasnivaju svi modeli vlakana koji su kasnije postavljeni.

Prvi reološki modeli pređa prikazani su u radovima [1,9,10,13,15].

## 3. Eksperimentalna istraživanja

Eksperimentalna istraživanja krivulja sila-deformacija ( $F-\varepsilon$ ) provedena su u laboratoriju tvornice Zevelon u Leskovcu (Srbija) na automatskom tenzometru tvrtke Textechno, koji registrira podatke u obliku zakrivljenog i pravocrtnog dijagrama. Dužina ispitivane epruvete prema standardu (JUS F.S2.052) iznosi  $500 \pm 1$  mm, dok je vrijeme prekida uzorka 20 s, pri čemu se hvataljke tenzometra kreću konstantnom brzinom, te se može ustvrditi da je brzina deformacije konstantna. Ispitivanja su izvedena u standardnoj atmosferi pri temperaturi  $293 \pm 2$  °K i relativnoj vlažnosti  $65 \pm 2\%$ . Da bi se postigla uravnotežena vlažnost, pređa je prije ispitivanja stajala 24 h u standardnim uvjetima.

Izvedeno je mjerenje na 120 uzoraka. Uzorak je tijekom ispitivanja uziman u proizvoljnim razmacima, ali ne manjim od 2 m. Korišteno je područje statističke sigurnosti od 95%. Ispitivane su tri vrste pređe:

- vunena pređa finoće 21 tex s prosječnim brojem uvoja  $T_m = 1\ 646\ m^{-1}$  uz  $CV = 6,78\%$ ,
- pamučna pređa finoće 10 tex s prosječnim brojem uvoja  $T_m = 1020\ m^{-1}$  uz  $CV = 16,7\%$ ,
- pređa od mjašavine vune/PES 76/24% finoće 12,5 tex s prosječnim brojem uvoja  $T_m = 1080\ m^{-1}$ .

### 3.1. Eksperimentalni rezultati

Na automatskom tenzometru dobivene su krivulje  $F-\varepsilon$  i pravocrtni

dijagram prekidnih sila i prekidnih istezanja. Eksperimentalni rezultati su statistički obrađeni i izračunate su srednje vrijednosti sile za svakih 0,5% ili za 1% relativnog istezanja. Dobiveni rezultati prikazani su u tab.1.

#### 4. Postavljanje reoloških modela istezanja prede

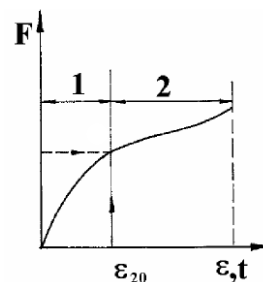
##### 4.1. Reološki model istezanja vunene prede

Na temelju eksperimentalno dobivenih srednjih vrijednosti sile,

odnosno napreznja, za odgovarajuću vunenu pređu (21 tex), kombinacijom elementarnih reoloških modela, postavljen je reološki model koji relativno dobro opisuje ponašanje prede pri njenom istezanju u standardnim uvjetima ispitivanja, krivulja ( $F-\varepsilon$ ), odnosno ( $\sigma-\varepsilon$ ), sl.3.

Na sl.4 prikazani su modeli kojima su predstavljena ova područja.

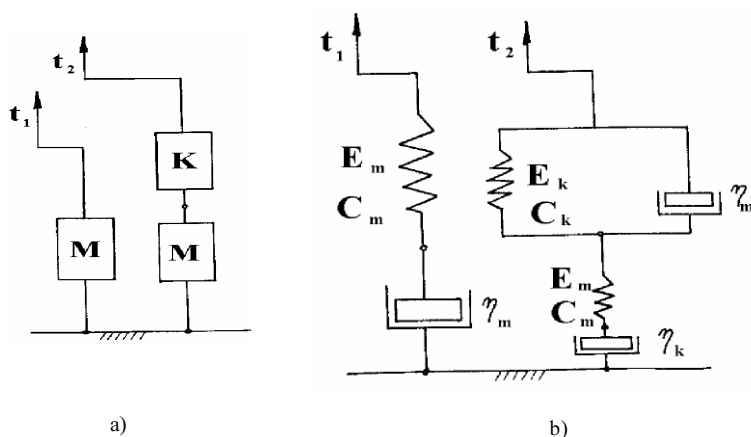
Prvo, elastično područje može se predstaviti Maxwellovim modelom, dok se drugo područje može predstaviti Burgerovim modelom koji nastaje rednom vezom Maxwellovog i Kelvinovog modela [1].



Sl.3 Krivulja  $F-\varepsilon$  može se podijeliti na dva područja: 1 - elastično područje, do deformacije od 3%, i 2 - viskoelastično područje gdje je deformacija 3% i više

Tab.1 Eksperimentalni i teoretski rezultati ispitivanja preda i relativne pogreške

Pređa od mješavine vuna/PES				Pamučna pređa				Vunena pređa		
Relativno istezanje (%)	Izmjerene vrijednosti jedinične sile (cN)	Teoretske vrijednosti jedinične sile (cN)	Relativna pogreška (%)	Relativno istezanje (%)	Izmjerene vrijednosti jedinične sile (cN)	Teoretske vrijednosti jedinične sile (cN)	Relativna pogreška (%)	Izmjerene vrijednosti jedinične sile (cN)	Teoretske vrijednosti jedinične sile (cN)	Relativna pogreška (%)
1	43,17	35,547	17,659	0,5	16,3	15,219	-7,105	12,73	11,797	7,326
2	78,58	70,003	10,915	1	33,15	30,195	-9,786	22,04	23,495	-6,601
3	117,4	103,403	11,923	1,5	48,1	44,933	-7,048	33,53	35,093	-4,661
4	153,6	135,778	11,603	2	59,35	59,437	0,146	46,32	46,592	-0,588
5	185,7	167,161	9,984	2,5	71,3	73,709	3,269	58,89	57,994	1,521
6	216,6	197,580	8,781	3	82,9	87,755	5,532	69,25	69,300	-0,072
7	243,3	227,067	6,672	3,5	95,5	101,576	5,982	77,54	73,065	5,771
8	266,5	255,650	4,071	4	109,5	115,178	4,930	81,79	78,454	4,079
9	286,2	283,356	0,994	4,5	123,8	128,563	3,705	83,67	81,550	2,534
10	305,8	310,212	-1,443	5	138,3	141,736	2,424	86,2	84,923	1,481
11	324,2	336,244	-3,715	5,5	153,5	154,698	0,774	88,04	89,077	-1,178
12	341,8	361,478	-5,757	6	167,4	167,454	0,032	89,82	90,539	-0,800
13	348,5	385,938	-10,743	6,5				91,35	91,539	-0,206
14	373,9	409,648	-9,561	7				92,34	93,146	-0,873
15	389,8	432,631	-10,988	7,5				92,66	93,950	-1,392
16	407,2	454,909	-11,716	8				94,02	96,152	-2,268
17	423,9	476,503	-12,409	8,5				96,93	98,352	-1,467
18	441,2	497,436	-12,746	9				97,62	98,956	-1,369
19	478,6	517,726	-8,175	9,5				100	99,633	0,367
20	498,8	537,394	-7,737							
21	524,3	556,459	-6,134							
22	548,3	574,939	-4,858							



Sl.4 Shematski prikaz a) Maxwellovog i b) Burgerovog modela

#### 4.1.1. Područje 1

Reološka jednačba Maxwellovog modela ima oblik (2):

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_m} + \frac{\sigma}{\eta_m}, \quad \sigma + \frac{E_m}{\eta_m} \cdot \sigma = \dot{\varepsilon} \cdot E_m \quad (2)$$

Rješenje diferencijalne jednačbe (2) ima oblik (3):

$$\sigma = \exp\left(-\frac{E_m}{\eta_m} \cdot t\right) \cdot \left[ \sigma_o + E_m \int_0^t \dot{\varepsilon} \cdot \exp\left(\frac{E_m}{\eta_m} \cdot t\right) \cdot dt \right] \quad (3)$$

gdje je:  $\sigma_o$  - početno naprezanje,  $E_m$  - modul elastičnosti Maxwellovog modela, i  $\eta_m$  - koeficijent viskoznosti Maxwellovog modela.

Pri istežanju na tenzometru tipa Textechno, brzina deformacije ima konstantnu vrijednost, te se može napisati (4):

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\Delta l}{l_o} \cdot 100 = \frac{v}{l_o} \cdot 100 = konst. \quad (4)$$

gdje je:  $l_o$  - početna dužina epruvete i  $v$  - brzina kretanja hvataljke tenzometra.

Zamjenom početnih uvjeta (za  $t=0$ ,  $\sigma_o=0$ ) dobiva se konačan izraz za promjenu naprezanja, odnosno sile u elastičnom području, jednačba (5):

$$\sigma = \eta_m \cdot \dot{\varepsilon} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E_m}{\eta_m} \cdot t\right) \right] \quad (5)$$

Nakon uvođenja koeficijenta relaksacije  $\tau_r = \eta_m / E_m$ , jednačba (5) poprima oblik (6):

$$\sigma = \eta_m \cdot \dot{\varepsilon} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right] \quad (6)$$

Zamjenom  $t = \varepsilon_o l / 100 v$ , u izrazu (6) dobiva se izraz ovisnosti  $\sigma(\varepsilon)$ , jednačba (7):

$$\sigma = \eta_m \cdot \dot{\varepsilon} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{l_o}{100 \cdot v \cdot \tau_r} \cdot \varepsilon\right) \right] \quad (7)$$

Na temelju eksperimentalnih rezultata određena je vrijednost modula elastičnosti  $E = 23,695 \text{ cN/m}^2$ , koeficijenta viskoznosti  $\eta_m = 3309,524 \text{ cNs/m}^2$  i konstante relaksacije  $\tau_r = 139,668 \text{ s}$ . U području 1, naprezanje, odnosno sila mijenja se u ovisnosti o relativnom istežanju prema sljedećem zakonu (8):

$$\sigma = 1390 \cdot [1 - \exp(-0.0170472 \cdot \varepsilon)] \quad (8)$$

#### 4.1.2. Područje 2

Područje 2, zapravo je viskoelastično područje i može se prikazati Burgerovim modelom koji predstavlja rednu vezu između Kelvinovog i Maxwellovog modela. Za područje 2 vrijede početni uvjeti  $t = t_2 = 7,143 \text{ s}$ ,  $\sigma_o = \sigma_{2o}$  i  $\varepsilon = 3\%$ . Reološka jednačba Burgerovog modela može se prikazati u obliku (9):

$$B_u = M - K = (H - N) - (H \text{ I } N) \quad (9)$$

$$\sigma = E_k \cdot \varepsilon_k + \eta_k \cdot \dot{\varepsilon}_k; \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_k}{\eta_k} - \frac{E_k}{\eta_k} \cdot \varepsilon_k \quad (10)$$

Rješenje diferencijalne jednačbe (10) ima oblik (11):

$$\varepsilon_k = \exp\left(-\frac{E_k}{\eta_k}\right) \cdot \left[ \varepsilon_o + \frac{1}{\eta_k} \cdot \int \sigma \cdot \exp\left(\frac{E_k}{\eta_k} \cdot t\right) \cdot dt \right] \quad (11)$$

gdje se indeksi  $k$  odnose na odgovarajuće vrijednosti za Kelvinovo tijelo.

Brzina deformacije Burgerovog modela  $\varepsilon_{bu}$  ima konstantnu vrijednost zbog konstantne brzine kretanja hvataljke tenzometra i jednaka je zbroju brzine deformacija Maxwellovog i Kelvinovog modela, odnosno (12):

$$\varepsilon_{bu} = \dot{\varepsilon}_m + \dot{\varepsilon}_k \quad (12)$$

Uvođenjem izraza (3) i (10) u izraz (12) dobiva se jednačba za brzinu deformacije Burgerovog modela (13):

$$\varepsilon_{bu} = \frac{\dot{\sigma}}{E_m} + \frac{\sigma}{\eta_m} + \frac{\sigma}{\eta_k} - \frac{E_k}{\eta_k} \cdot \exp\left(-\frac{E_k}{\eta_k} \cdot t\right) \cdot \left[ \varepsilon_o + \frac{1}{\eta_k} \cdot \int \sigma \cdot \exp\left(\frac{E_k}{\eta_k} \cdot t\right) \cdot dt \right] \quad (13)$$

Deriviranjem jednačbe (13) po vremenu dobiva se:

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_{bu} = & \frac{\ddot{\sigma}}{E_m} + \frac{\dot{\sigma}}{\eta_m} + \frac{E_k^2}{\eta_k^2} \cdot \varepsilon_o \cdot \exp\left(-\frac{E_k}{\eta_k} \cdot t\right) \\ & + \frac{E_k^2}{\eta_k^3} \cdot \exp\left(-\frac{E_k}{\eta_k} \cdot t\right) \cdot \int \sigma \cdot \exp\left(\frac{E_k}{\eta_k} \cdot t\right) \cdot dt \\ & - \frac{E_k}{\eta_k^2} \cdot \exp\left(-\frac{E_k}{\eta_k} \cdot t\right) \cdot \sigma \cdot \exp\left(\frac{E_k}{\eta_k} \cdot t\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Sređivanjem izraza (14) dobiva se konačna reološka jednačba Burgerovog modela, odnosno, modela vunene pređe (15):

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{E_k}{\eta_k} + \dot{\varepsilon} = & \ddot{\sigma} \cdot \frac{\eta_k}{E_m \cdot E_k} + \\ & + \dot{\sigma} \cdot \frac{\eta_k \cdot E_k + \eta_m \cdot E_m + \eta_m \cdot E_k}{E_k \cdot E_m} + \frac{\sigma}{\eta_m} \end{aligned} \quad (15)$$

Kako je  $\dot{\epsilon} = \text{konst.}$ , odnosno,  $\ddot{\epsilon} = 0$  dobiva se konačna reološka jednadžba istezanja vunene prede (16):

$$\ddot{\sigma} \cdot \frac{\eta_k \cdot \eta_m}{E_k \cdot E_m} + \dot{\sigma} \cdot \frac{\eta_k \cdot E_m + \eta_m \cdot E_m + \eta_m \cdot E_k}{E_k \cdot E_m} + \sigma = \dot{\epsilon} \cdot \eta_m \quad (16)$$

Rješenje homogenog dijela diferencijalne jednadžbe (16) može se dobiti izrazom (17):

$$\sigma_h = C_1 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + C_2 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \quad (17)$$

gdje su  $C_1$  i  $C_2$  konstante integracije, a  $\tau_1$  i  $\tau_2$  vremena relaksacije koja su određena sljedećim izrazima (18):

$$\frac{1}{\tau_{1,2}} = \frac{\eta_m \cdot E_m + \eta_k \cdot E_m + \eta_m \cdot E_k + \sqrt{(\eta_m \cdot E_m + \eta_k \cdot E_m + \eta_m \cdot E_k)^2 - 4 \cdot \eta_k \cdot \eta_m \cdot E_k \cdot E_m}}{2 \cdot \eta_k \cdot \eta_m} \quad (18)$$

Djelomično rješenje diferencijalne jednadžbe (16) ima oblik:  $\sigma_p = \eta_m \cdot \dot{\epsilon}$ , pa se opće rješenje može prikazati jednadžbom (19):

$$\sigma = \sigma_h + \sigma_p = C_1 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + C_2 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) + \eta_m \cdot \dot{\epsilon} \quad (19)$$

Konstante integracije  $C_1$  i  $C_2$  određuju se iz uvjeta:  $t = 0, \sigma = 0$  i  $t = t_2, \sigma = \sigma_{20}$

Njihovim uvrštenjem u jednadžbu (19) dobiva se izraz (20) za ovisnost napreznjanja, odnosno sile o vremenu:

$$\sigma_{(t)} = \eta_m \cdot \dot{\epsilon} \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) + \frac{\exp\left(-\frac{t_2}{\tau_2}\right) - \exp\left(-\frac{t_2}{\tau_1}\right)}{\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)} \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right] \right\} \quad (20)$$

Budući da je  $t = l_0 \cdot \epsilon / 100$  v, njegovim uvrštenjem u (20) dobiva se jednadžba (21):

$$\sigma(\epsilon) = \eta_m \cdot \dot{\epsilon} \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{l_0 \cdot \epsilon}{100 \cdot v \cdot \tau_1}\right) + \frac{\exp\left(-\frac{t_2}{\tau_2}\right) - \exp\left(-\frac{t_2}{\tau_1}\right)}{\exp\left(-\frac{t_2}{\tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{t_2}{\tau_2}\right)} \left[ \exp\left(-\frac{l_0 \cdot \epsilon}{100 \cdot v \cdot \tau_1}\right) - \exp\left(-\frac{l_0 \cdot \epsilon}{100 \cdot v \cdot \tau_2}\right) \right] \right\} \quad (21)$$

Iz rezultata prikazanih na sl.5 i u tab.1 može se uočiti da model dosta dobro prati istezanje ispitivane vunene prede, jer je relativna pogreška manja od 10%.

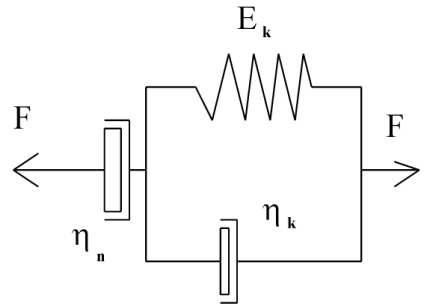
### 4.2. Reološki model istezanja pamučne prede i prede od mješavine vuna/PES

Istezanje pamučne prede može se predstaviti tijelom prema modelu Lethersich, sl.6 koje predstavlja

rednu vezu Newtonovog i Kelvinovog modela:

$$L = N - K \quad (22)$$

Brzina deformacije Lethersichovog tijela jednaka je zbroju brzina deformacije Newtonovog i Kelvinovog tijela.



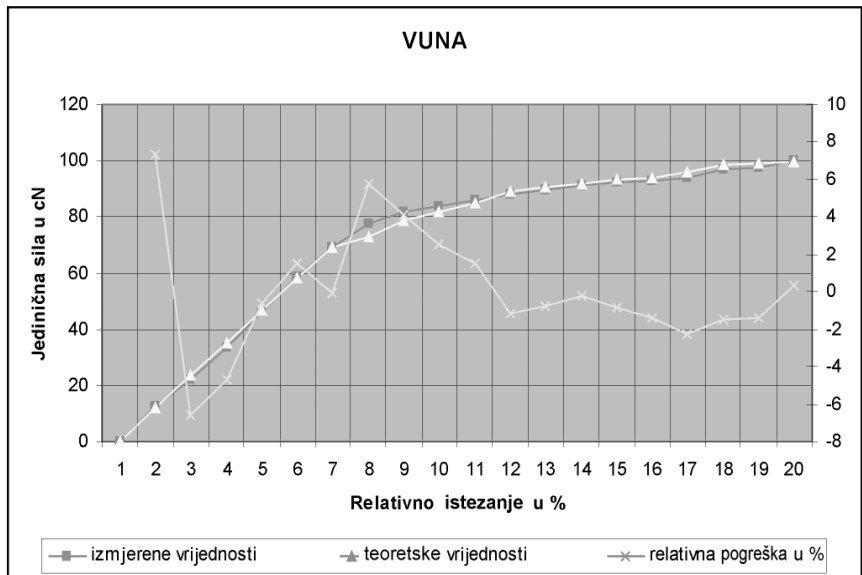
Sl.6 Lethersichov model

$$\dot{\epsilon}_l = \dot{\epsilon}_n + \dot{\epsilon}_k \quad (23)$$

Brzina deformacije Newtonovog tijela jednaka je:

$$\dot{\epsilon}_n = \frac{\sigma}{\eta_n} \quad (24)$$

Nakon derivacije izraza (3) po vremenu i njegove zamjene u (23) te nakon unošenja izraza (24) u (23)



Sl.5 Grafički prikaz ovisnosti teoretskih i eksperimentalnih vrijednosti jedinične sile od relativnog istezanja vunene prede i relativne pogreške

dobiva se izraz (25) za brzinu deformacije tijela prema modelu Lether-sicha:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta_n} + \frac{\sigma}{\eta_k} - \frac{E_k}{\eta_k} \cdot \exp\left(-\frac{E_k}{\eta_k} \cdot t\right) \cdot \left[ \varepsilon_0 + \frac{1}{\eta_k} \cdot \int \sigma \cdot \exp\left(\frac{E_k}{\eta_k} \cdot t\right) \cdot dt \right] \quad (25)$$

Derivacijom po vremenu i sređivanjem izraza (25) dobiva se diferencijalna jednadžba reološkog modela pamučne i pređe od mješavine vune i PES-a u obliku:

$$\ddot{\varepsilon} \cdot \eta_k + \dot{\varepsilon} \cdot E_k \cdot \eta_n = \dot{\sigma} (\eta_n + \eta_k) + \sigma \cdot E_k \quad (26)$$

Kako je u ovom slučaju  $\dot{\varepsilon} = \text{konst.}$  i  $\varepsilon = 0$ , jednadžba (26) poprima sljedeći oblik:

$$\dot{\sigma} \cdot (\eta_k + \eta_n) + \sigma \cdot E_k = \dot{\varepsilon} \cdot E_k \cdot \eta_n \quad (27)$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (27) može se prikazati izrazom (28):

$$\sigma = -C \cdot \exp\left(-\frac{E_k}{\eta_k + \eta_n} \cdot t\right) + \eta_n \cdot \dot{\varepsilon} \quad (28)$$

Konstanta integracije C određuje se iz početnih uvjeta, za  $t = 0$ ,  $\sigma = 0$ . Ovisnost naprežanja o vremenu nakon određivanja konstante integracije može se prikazati izrazom (29):

$$\sigma = \eta_n \cdot \dot{\varepsilon} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right] \quad (29)$$

gdje je:  $\tau_r = (\eta_n + \eta_k) / E_k$  - vrijeme relaksacije. Ovisnost naprežanja i relativnog istežanja ima oblik (30):

$$\sigma = \eta_n \cdot \dot{\varepsilon} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{l_0}{100 \cdot v \cdot \tau_r} \cdot \varepsilon\right) \right] \quad (30)$$

Na temelju eksperimentalnih rezultata iz tab.1 i ovisnosti dobivenih na osnovu reološkog modela za pamučnu pređu i pređu od mješavine vuna/PES, aproksimacijom su dobivene sljedeće jednadžbe:

Pamućna pređa

$$\sigma = 956 \cdot [1 - \exp(-0.03209454 \cdot \varepsilon)] \quad (31)$$

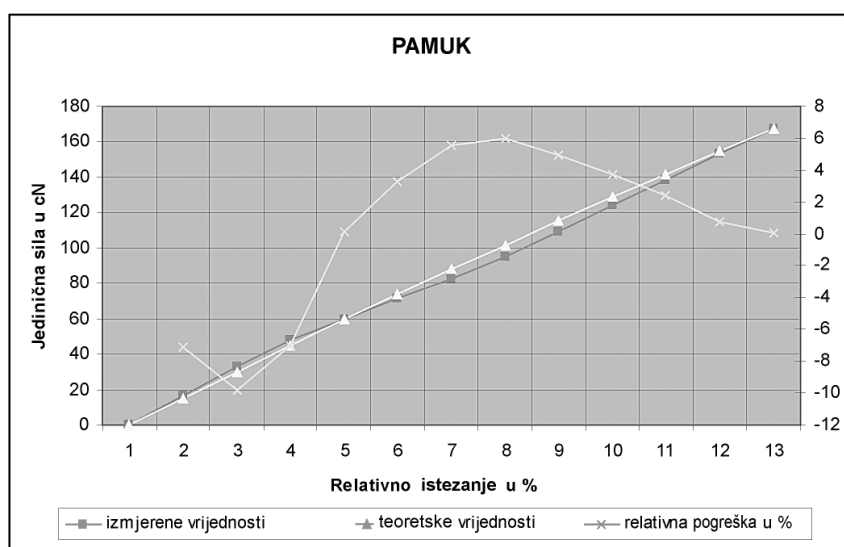
Pređa od mješavine vuna/PES

$$\sigma = 1150 \cdot [1 - \exp(-0.03115031456 \cdot \varepsilon)] \quad (32)$$

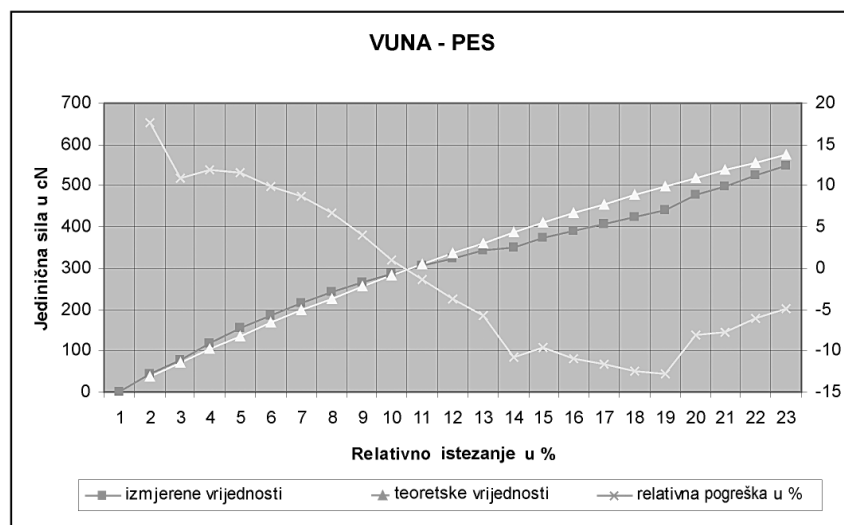
Sa sl.7 vidi se da je maksimalno relativno odstupanje stvarnih od teoretskih vrijednosti manje od 10% pa se može zaključiti da reološki model pamučne pređe dobro prati njeno ponašanje pri istežanju, dok se ovo odstupanje za pređu od mješavine vuna/PES kreće do vrijednosti oko 15% pa je neophodno poboljšanje ovog modela.

## 5. Određivanje fizikalnih karakteristika istežanja pređe prema reološkom modelu

Na temelju eksperimentalnih i teoretskih rezultata određena je vrijednost modula elastičnosti - 23,695 cN/m<sup>2</sup>, koeficijenta viskoznosti - 3309,524 cNs/m<sup>2</sup> i konstante relaksacije - 139,668 s Maxwellovog modela za vunenu pređu. Pod pretpostavkom da su vrijednosti modula elastičnosti i koeficijenta viskoznosti Maxwellovog modela u elastičnom i viskoelastičnom području jednaki, određeni su parovi



Sl.7 Ovisnosti teoretskih i eksperimentalnih vrijednosti jedinične sile i relativnog istežanja pamučne pređe i relativna pogreška



Sl.8 Ovisnosti teoretskih i eksperimentalnih vrijednosti jedinične sile i relativnog istežanja pređe od vune/PES i relativna pogreška

vrijednosti vremena relaksacije  $\tau_1$  i  $\tau_2$  koje zadovoljavaju jednadžbu (18), pri čemu je maksimalno relativno odstupanje manje od 5%. Vrijednosti vremena relaksacije, modula elastičnosti i koeficijenta viskoznosti Kelvinovog modela date su u tab.2.

Veza između vremena relaksacije  $\tau_1$  i  $\tau_2$  može se aproksimirati sljedećom jednadžbom (33):

$$\tau_2 = \frac{150000}{1 + 1000049.25 \cdot \exp(-1.35219833 \cdot \tau_1)} \quad (33)$$

Pri ovoj aproksimaciji maksimalno relativno odstupanje manje je od 10%.

Veza između koeficijenta viskoznosti i modula elastičnosti, na temelju podataka iz tab.2, može se aproksimirati jednadžbom (34):

$$\eta_k = \frac{400}{1 + 1.693886619 \exp(0.025728 \cdot E_k)} \quad (34)$$

Maksimalno relativno odstupanje pri ovoj aproksimaciji manje je 4%. Pod pretpostavkom da koeficijenti dinamičke viskoznosti za Newtonov i Kelvinov model u modelu Lethersicha imaju jednaku vrijednost, dobivene su sljedeće vrijednosti koeficijenta viskoznosti, modula elastičnosti i konstante relaksacije, koje su prikazane u tab.3.

## 6. Zaključak

Na temelju eksperimentalnih rezultata dobivenih za istezanje prede u standardnim uvjetima ispitivanja, kombinacijom poznatih elementarnih reoloških modela, postavljenih reoloških modela istezanja prede, izvedene su i riješene odgovarajuće diferencijalne jednadžbe za ispitivane prede, čime je dobivena ovisnost između jedinične sile (naprezanja) i relativnog istezanja.

Reološki modeli relativno dobro opisuju proces istezanja prede u statičkim uvjetima ispitivanja. Relativna pogreška kreće se u granicama ispod 10%, osim kod prede od mješavine vuna/PES koja u pod-

Tab.2 Vremena relaksacije, modula elastičnosti, koeficijent viskoznosti Kelvinovog modela

$\tau_1$ (s)	4,5	5,0	5,5	5,75	6,0
$\tau_2$ (s)	680	1250	2260	3820	12900
$E_k$ (cN/m <sup>2</sup> )	0,271003	0,937860	1,648242	3,091321	6,299588
$\eta_k$ (cNs <sup>2</sup> )	150,1816	147,4925	144,6049	138,3335	138,6597

Tab.3 Vrijednosti koeficijenta viskoznosti, modula elastičnosti i konstante relaksacije za pamučnu pređu i pređu od mješavine vuna /PES

	Pamučna pređa (10 tex)	Pređa vuna/PES (12,5 tex)
$\eta$ (cNs/m <sup>2</sup> )	3168,67	1000,00
$E$ (cN/m <sup>2</sup> )	61,018 13	71,4569
$\tau_r$ (s)	103,86	27,915

ručju do 5% relativnog istezanja ima vrijednosti pogreške između 10% i 15%, zbog čega je potrebno poboljšanje modela u ovom području.

Za vunenu pređu određene su vrijednosti fizikalnih karakteristika prede u području koje je opisano Maxwellovim modelom i to: modula elastičnosti  $E = 23,695$  cN/m<sup>2</sup>, koeficijenta viskoznosti  $\eta_m = 3309,524$  cNs/m<sup>2</sup> i konstante relaksacije  $\tau_r = 139,668$  s. Također su određene vrijednosti za područje koje je opisano Kelvinovim modelom te je određen odnos između vremena relaksacije Kelvinovog modela (tab.3) i između koeficijenta viskoznosti i modula elastičnosti jednadžbe (33) i (34).

Za pamučnu pređu dobivene su vrijednosti  $\eta = 3168,67$  cNs/m<sup>2</sup> ·  $E = 61,018$  cN/m<sup>2</sup> i  $\tau_r = 103,86$  s, a za pređu od mješavine vuna/PES  $\eta = 1000$  cNs/m<sup>2</sup> ·  $E = 71,4569$  cN/m<sup>2</sup> i  $\tau_r = 27,915$  s.

Daljnja istraživanja na ovom području treba usmjeriti postavljanju reoloških modela na temelju podataka o silama, odnosno naprezanja i relativnog istezanja tijekom dinamičkih opterećenja prede. Takva opterećenja bi trebala biti približno jednaka ili slična stvarnim opterećenjem prede tijekom njene prerade te bi se s većom preciznošću i pouzdanošću mogli odrediti radni parametri prede tijekom prerade.

## Literatura:

- [1] Stojiljković D.T.: Dinamičko ponašanje sistema mehanizam - radni objekat tkackog procesa, Doktorska disertacija, MF u Nišu, 1992.
- [2] Petrović V.M.: Modelovanje ponašanja pamučne prede pri premetavanju, Doktorska disertacija, TF "M.Pupin" u Zrenjaninu, 1996.
- [3] Huttel E.: Automatisierungsmöglichkeiten in der Weberei, Melliand Textilberichte (1987) 9, 632 - 638
- [4] Gayler J.: Die moderne Weberei und ihre Anforderungen an Kett- und Schussgarne, Vortrag in Aachen (1982), 205 - 215
- [5] Bucher R.: Budućnost tkanja, *Tekstil* **36** (1987.) 3, 139-144
- [6] Feughelman M.: A two-phase structure for keratin fibers, *Textile Research Journal* **29** (1959) 223-228
- [7] Feughelman M.: A model for the mechanical properties of the alpha-keratin cortex, *Textile Research Journal* **64** (1994) 236-239
- [8] Feughelman M.: The equilibrium between  $\alpha$  and  $\beta$  phases in keratin fibers in water, *Textile Research Journal* **38** (1968) 1136-1137
- [9] Stojiljković D.T., Ž. Živković, Ž. Tasić: Modelovanje istezanja prede, Monografija, Tehnološki fakultet, Leskovac, 1995.
- [10] Stojiljković D.T., Ž. Živković, Ž. Tasić: Modelling of Woollen Yarn Extension, *Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic, Control and Robotics VI* (1995) 5, 645-653

- [11] Stojiljković D.T., Ž. Živković, Ž. Tasić, V.M. Petrović: Analysis of the results of weft tension force measurements, *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering* **3** (1996), 321-331
- [12] Stojiljković D.T., S.T. Stojiljković: Yarn Transporting through the Shed, *Pakistan Textile Journal* **47** (1998) 4, 42-46
- [13] Stojiljković D.T.: Woollen Yarn Extension, *The Indian Textile Journal* **109**, Dezember (1998), 84-87
- [14] Stojiljković D.T., S.T. Stojiljković: Breaking of Yarn, *The Indian Textile Journal* **109** (1999) 44-49
- [15] Stojiljković D.T., M.D. Pejić, M.V. Petrović: Rheological Models and Memory Functions of Yarn Extension, *Vlakna a textil* (2001) 1, 17-24
- [16] Reiner M.: *Rheology*, Springer - Verlag, Berlin, (1958) 12-122
- [17] Beyreuther R.: *Dynamik von Fadenbildungs- und Fadenverarbeitungsprozessen*, Veb Fachbuchverlag Leipzig, (1968), 137
- [18] Stojiljković D.T., Ž. Živković: Ispitivanje početne brzine projektila, *Tekstil* (1986) 11 857-
- [19] Petronijević Ž.: Ispitivanje procesa relaksacije polimernih materijala merenjem dielektričnih karakteristika, magistarski rad, TMF, Beograd (1980) 15
- [20] Vinogradov G.V., A. Malkin: *Reologija polimerov*, Izdatelstvo "himija" (1977) Moskva
- [21] Schmitz J.: *Testing of Polymers, part I*, Interscience Publishers New York - London - Sydney (1965) 148

## SUMMARY

### Rheological Modeling of Yarn Elongation

*D.T. Stojiljković, V. Petrović\*, M. Đurović-Petrović\*\**

Based on the experimental data obtained for yarn elongation in standard test conditions, by combination of known elementary rheological models and established rheological models of yarn elongation, differential equations for the tested yarns were derived and solved. Thereby, the dependence between unit force (stress) and relative elongation was obtained. The models were established for three types of yarn: wool yarn with a count of 21 tex of an average twist level of  $1,646 \text{ m}^{-1}$  with a variation coefficient of 6.78%, cotton yarn with a count of 10 tex of an average twist level of  $1,020 \text{ m}^{-2}$  with a variation coefficient of 16.7% and wool/PES blend yarn 76/24% with a count of 12.5 tex and an average twist level of  $1,080 \text{ min}^{-1}$ .

**Key words:** rheological model, elongation, yarn, cotton, wool/PES blend

*Faculty of Technology Leskovac*

*Leskovac, Serbia*

*\* Faculty of Technology "Mihajlo Pupin" in Zrenjanin*

*Zrenjanin, Serbia*

*\*\*The Ministry of Science and Environment*

*Beograd, Serbia*

*e-mail: dragansto@yahoo.com*

*Received September 29, 2006*

### Rheologisches Modellieren der Garndehnung

Aufgrund der experimentellen Angaben erhalten für die Garndehnung unter den Standardtestbedingungen und durch die Kombination von bekannten elementaren rheologischen Modellen und ermittelten rheologischen Modellen der Garndehnung wurden Differenzialgleichungen für die geprüften Garne abgeleitet und gelöst. Dadurch wurde die Abhängigkeit zwischen der Einheitskraft (Beanspruchung) und der relativen Dehnung erhalten. Die Modelle wurden für drei Garntypen bestimmt: Wollgarn der Feinheit 21 tex, der durchschnittlichen Garndrehung von  $1646 \text{ m}^{-1}$  mit einem Variationskoeffizienten von 6,78%, Baumwollgarn der Feinheit 10 tex, der durchschnittlichen Drehung von  $1020 \text{ m}^{-1}$  und mit einem Variationskoeffizienten von 16,7% und Wolle/PES-Mischgarn 76/24% der Feinheit von 12,5tex und der durchschnittlichen Drehung von  $1080 \text{ m}^{-1}$ .