Osječki matematički list 20 (2020), 1–7

Nekoliko formula za produkte sinusa i kosinusa kutova $1^\circ, 2^\circ, \ldots, 89^\circ$

Vladimir Volenec*

Sažetak

C. A. Laisant je izračunao nekoliko zanimljivih produkata sinusa kutova $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 89^\circ, 90^\circ$. Ovdje se istom metodom izračunavaju još neki takvi produkti.

Ključne riječi: *sinus, kosinus, komplementarni kut, adicijske formule*

Several formulae for the products of sines and cosines of angles $1^\circ, 2^\circ, \ldots, 89^\circ$

Abstract

C. A. Laisant calculated several interesting products of the sines of angles $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 89^\circ, 90^\circ$. Here, we calculate some other such products by the same method.

Keywords: *sine, cosine, complementary angle, sine and cosine addition formulae*

U [1] je C. A. Laisant izveo formule za produkte

$$\begin{aligned}
\Pi &= \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \ \ldots \ \cdot \sin 89^\circ,\\
\Pi_1 &= \sin 3^\circ \cdot \sin 6^\circ \cdot \sin 9^\circ \cdot \ \ldots \ \cdot \sin 87^\circ,\\
\Pi_2 &= \sin 9^\circ \cdot \sin 18^\circ \cdot \sin 27^\circ \cdot \ \ldots \ \cdot \sin 81^\circ,\\
\Pi_2' &= \sin 18^\circ \cdot \sin 36^\circ \cdot \sin 54^\circ \cdot \sin 72^\circ.
\end{aligned}$$

*Prirodoslovno matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu email: volenec@math.hr

pri čemu on na kraju ovih produkata dodaje i faktor $\sin 90^\circ$, kojeg ćemo mi ovdje ispustiti, jer je jednak 1, pa nije bitan. Pokazat ćemo najprije kako je to on napravio, uz neke sitne preinake. On polazi od njemu poznate formule

$$\sin 3x = 4 \cdot \sin x \cdot \sin(60^\circ - x) \cdot \sin(60^\circ + x), \tag{1}$$

koju ćemo mi ipak ovdje dokazati. Primjenom adicijske formule za sinus, formule za sinus i kosinus dvostrukog kuta, te za sinus i kosinus kuta 60° dobivamo redom

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x \\
&= 2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sin x \\
&= \sin x \cdot (3\cos^2 x - \sin^2 x) = 4 \cdot \sin x \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \cos^2 x - \frac{1}{4} \cdot \sin^2 x\right) \\
&= 4 \cdot \sin x \cdot (\sin^2 60^\circ \cdot \cos^2 x - \cos^2 60^\circ \cdot \sin^2 x) \\
&= 4 \cdot \sin x \cdot (\sin 60^\circ \cdot \cos x - \cos 60^\circ \cdot \sin x) \cdot (\sin 60^\circ \cdot \cos x + \cos 60^\circ \cdot \sin x) \\
&= 4 \cdot \sin x \cdot \sin(60^\circ - x) \cdot \sin(60^\circ + x).
\end{aligned}$$

Primjenom formule (1) na slučajeve $x = 1^\circ, 2^\circ, \ldots, 29^\circ$ dobivamo jednakosti

$$\begin{aligned}
4 \cdot \sin 1^\circ \cdot \sin 59^\circ \cdot \sin 61^\circ &= \sin 3^\circ, \\
4 \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 58^\circ \cdot \sin 62^\circ &= \sin 68^\circ, \\
&\vdots \\
4 \cdot \sin 29^\circ \cdot \sin 31^\circ \cdot \sin 89^\circ &= \sin 87^\circ,
\end{aligned}$$

a dodat ćemo i jednakost

$$4 \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}. \tag{2}$$

Množenjem ovih 30 jednakosti slijedi jednakost $4^{30} \cdot \Pi = \Pi_1 \cdot \sqrt{3}$, tj.

$$\Pi = \frac{\sqrt{3}}{2^{60}} \cdot \Pi_1. \tag{3}$$

Primjenom formule (1) na slučajeve $x = 3^\circ, 6^\circ, \ldots, 27^\circ$ dobivamo jednakosti

$$\begin{aligned}
4 \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 57^\circ \cdot \sin 63^\circ &= \sin 9^\circ, \\
4 \cdot \sin 6^\circ \cdot \sin 54^\circ \cdot \sin 66^\circ &= \sin 18^\circ, \\
&\vdots \\
4 \cdot \sin 27^\circ \cdot \sin 33^\circ \cdot \sin 87^\circ &= \sin 81^\circ
\end{aligned}$$

i opet dodajmo jednakost (2). Množenjem ovih 10 jednakosti dobivamo jednakost $4^{10} \cdot \Pi_1 = \Pi_2 \cdot \sqrt{3}$, tj.

$$\Pi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2^{20}} \cdot \Pi_2. \tag{4}$$

Sada primijenimo formulu $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$, tj.

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \sin(90^\circ - x), \tag{5}$$

na slučajeve $x = 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ, 36^\circ$ i dobivamo jednakosti

$$\begin{aligned}
2 \cdot \sin 9^\circ \cdot \sin 81^\circ &= \sin 18^\circ, \\
2 \cdot \sin 18^\circ \cdot \sin 72^\circ &= \sin 36^\circ, \\
2 \cdot \sin 27^\circ \cdot \sin 63^\circ &= \sin 54^\circ, \\
2 \cdot \sin 36^\circ \cdot \sin 54^\circ &= \sin 72^\circ,
\end{aligned}$$

a dodajmo i jednakost

$$2 \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}.$$

Množenjem ovih 5 jednakosti dobivamo jednakost $2^5 \cdot \Pi_2 = \Pi_2' \cdot \sqrt{2}$, tj.

$$\Pi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2^5} \cdot \Pi_2', \tag{6}$$

dok množenjem samo druge i četvrte od tih jednakosti slijedi jednakost $2^2 \cdot \Pi_2' = \sin 36^\circ \cdot \sin 72^\circ$, tj.

$$\Pi_2' = \frac{1}{2^2} \cdot \sin 36^\circ \cdot \sin 72^\circ. \tag{7}$$

Ostalo je još da se izračunaju vrijednosti od $\sin 36^\circ$ i $\sin 72^\circ$, što ćemo ovdje napraviti, dok Laisant te vrijednosti koristi kao dobro poznate činjenice. Imamo najprije ovaj izvod

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \\
&= (1 - 2 \cdot \sin^2 x) \cdot \cos x - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x = (1 - 4 \cdot \sin^2 x) \cdot \cos x,
\end{aligned}$$

pa zato slijedi dalje

$$2 \cdot \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ = \sin 36^\circ = \cos 54^\circ = (1 - 4 \cdot \sin^2 18^\circ) \cdot \cos 18^\circ.$$

To znači da je $\sin 18^\circ$ pozitivno rješenje kvadratne jednadže $4 \cdot \sin^2 18^\circ + 2 \cdot \sin 18^\circ - 1 = 0$, pa lako dobivamo redom

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1), \quad \sin^2 18^\circ = \frac{1}{16}(6-2\sqrt{5}),$$
$$\sin^2 72^\circ = \cos^2 18^\circ = \frac{1}{16}(10+2\sqrt{5}),$$

$$\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \tag{8}$$

$$\sin^2 36^\circ = 4 \cdot \sin^2 18^\circ \cdot \cos^2 18^\circ = 4 \cdot \frac{1}{8}(3-\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{8}(5+\sqrt{5}) = \frac{1}{16}(10-2\sqrt{5}),$$

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}. \tag{9}$$

Zbog (8) i (9) iz (7) slijedi

$$\Pi_2' = \frac{\sqrt{5}}{2^4}, \tag{10}$$

jer je $\sqrt{\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(10-2\sqrt{5}\right)} = \sqrt{80} = 2^2\sqrt{5}$, a zatim iz (6), (4) i (3) dobivamo redom

$$\Pi_2 = \frac{\sqrt{10}}{2^9}, \tag{11}$$

$$\Pi_1 = \frac{\sqrt{30}}{2^{29}}, \tag{12}$$

$$\Pi = \frac{3\sqrt{10}}{2^{89}}. \tag{13}$$

Kako je kosinus kuta jednak sinusu njemu komplementarnog kuta, a u svakom od produkata $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_2'$ se javljaju sinusi parova komplementarnih kutova, to odmah slijedi da je na primjer produkt Π ujedno i produkt $\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 89^\circ$, a slično vrijedi i za produkte Π_1, Π_2, Π_2'.

Sada ćemo oponašajući Laisantov postupak izvesti još neke slične formule za produkte

$$\Pi_1' = \sin 6^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \sin 18^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 84^\circ = \cos 6^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 84^\circ,$$
$$P = \sin 2^\circ \cdot \sin 4^\circ \cdot \sin 6^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 88^\circ = \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 6^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 88^\circ,$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \sin 4^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 88^\circ = \cos 2^\circ \cdot \cos 6^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 86^\circ,\\
P_1' &= \sin 2^\circ \cdot \sin 6^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 86^\circ = \cos 4^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 88^\circ,\\
N &= \sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 5^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 89^\circ = \cos 1^\circ \cdot \cos 3^\circ \cdot \cos 5^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 89^\circ,\\
N_1 &= \sin 3^\circ \cdot \sin 9^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 87^\circ = \cos 3^\circ \cdot \cos 9^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 87^\circ.
\end{aligned}
$$

Primjenom formule (5) na slučajeve $3^\circ, 6^\circ, \ldots, 42^\circ$ dobivamo jednakosti

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 87^\circ &= \sin 6^\circ,\\
2 \cdot \sin 6^\circ \cdot \sin 84^\circ &= \sin 12^\circ,\\
&\vdots\\
2 \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 48^\circ &= \sin 84^\circ,
\end{aligned}
$$

a dodajmo i jednakost $2 \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. Množenjem ovih 15 jednakosti slijedi jednakost $2^{15} \cdot \Pi_1 = \sqrt{2} \cdot \Pi_1'$, odakle zbog (12) dobivamo

$$\Pi_1' = \frac{\sqrt{15}}{2^{14}}. \tag{14}$$

Primjenom formule (5) na slučajeve $x = 1^\circ, 2^\circ, \ldots, 44^\circ$ dobivamo jednakosti

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sin 1^\circ \cdot \sin 89^\circ &= \sin 2^\circ,\\
2 \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 88^\circ &= \sin 4^\circ,\\
&\vdots\\
2 \cdot \sin 44^\circ \cdot \sin 46^\circ &= \sin 88^\circ,
\end{aligned}
$$

a dodajmo i jednakost $2 \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. Množenjem ovih 45 jednakosti slijedi jednakost $2^{45} \cdot \Pi = \sqrt{2} \cdot P$, iz koje zbog (13) dobivamo

$$P = \frac{3\sqrt{5}}{2^{44}}. \tag{15}$$

Množenjem jednakosti

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 88^\circ &= \sin 4^\circ,\\
2 \cdot \sin 4^\circ \cdot \sin 86^\circ &= \sin 8^\circ,\\
&\vdots\\
2 \cdot \sin 44^\circ \cdot \sin 46^\circ &= \sin 88^\circ,
\end{aligned}
$$

dobivamo $2^{22} \cdot P = P_1$, pa zbog (15) slijedi

$$P_1 = \frac{3\sqrt{5}}{2^{22}}. \tag{16}$$

Kako je očito $P_1 \cdot P_1' = P$, to iz (15) i (16) dobivamo

$$P_1' = \frac{1}{2^{22}}. \tag{17}$$

Isto tako iz jednakosti $P \cdot N = \Pi$ zbog (13) i (15) slijedi

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2^{45}}. \tag{18}$$

Primjenom formule (1) na slučajeve $x = 1^\circ, 3^\circ, \ldots, 29^\circ$ dobivamo 15 jednakosti

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sin 1^\circ \cdot \sin 59^\circ \cdot \sin 61^\circ &= \sin 3^\circ, \\ 4 \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 57^\circ \cdot \sin 63^\circ &= \sin 9^\circ, \\ &\vdots \\ 4 \cdot \sin 29^\circ \cdot \sin 31^\circ \cdot \sin 89^\circ &= \sin 87^\circ, \end{aligned}$$

a njihovim množenjem slijedi $4^{15} \cdot N = N_1$, tj. zbog (18)

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2^{15}}. \tag{19}$$

Među onih posljednjih 15 jednakosti nalazi se (na osmom mjestu) i jednakost $4 \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 75^\circ = \sin 45^\circ$, pa odmah i bez poznavanja vrijednosti $\sin 15^\circ$ i $\sin 75^\circ$ zaključujemo da je $\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{4}$. Zanimljivo je da se te dvije vrijednosti kao i one u formulama (8) i (9) mogu naći na stranici 263 našeg malo starijeg udžbenika [2] u obliku vrlo korisne tablice, koju ovdje reproduciramo u obliku tablice 1. Nažalost u [1] nije navedeno (to i nije običaj raditi u udžbenicima!), kako je ta tablica sastavljena. To je možda preuzeto iz nekog starijeg izvora, a bilo bi tada zanimljivo saznati, koji je to izvor. Jedna takva tablica nalazi se na primjer u [3] na stranici 74.

Tablica 1. Sinusi i kosinusi višekratnika od 3° u I. kvadrantu.

stupnjevi	sinus	kosinus	
0	0	1	90
3	$s_2r_1 - t_1r_2$	$t_1r_1 + s_2r_2$	87
6	$\frac{1}{2}\left(t_2\sqrt{3} - s_1\right)$	$\frac{1}{2}\left(s_1\sqrt{3} + t_2\right)$	84
9	$\frac{1}{2}\left(s_1\sqrt{2} - t_2\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(s_1\sqrt{2} + t_2\sqrt{2}\right)$	81
12	$\frac{1}{2}\left(t_1 - s_2\sqrt{3}\right)$	$\frac{1}{2}\left(t_1\sqrt{3} + s_2\right)$	78
15	r_2	r_1	75
18	s_2	t_1	72
21	$t_2r_1 - s_1r_2$	$s_1r_1 + t_2r_2$	69
24	$\frac{1}{2}\left(s_1\sqrt{3} - t_2\right)$	$\frac{1}{2}\left(t_2\sqrt{3} + s_1\right)$	66
27	$\frac{1}{2}\left(t_1\sqrt{2} - s_2\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(t_1\sqrt{2} + s_2\sqrt{2}\right)$	63
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	60
33	$s_2r_1 + t_1r_2$	$t_1r_1 - s_2r_2$	57
36	t_2	s_1	54
39	$s_1r_1 - t_2r_2$	$t_2r_1 + s_1r_2$	51
41	$\frac{1}{2}\left(t_1\sqrt{3} - s_2\right)$	$\frac{1}{2}\left(t_1 + s_2\sqrt{3}\right)$	48
45	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	45
	kosinus	sinus	stupnjevi

Ovdje je: $r_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, $r_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $s_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$, $s_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$, $t_1 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, $t_2 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Literatura

[1] C. A. LAISANT, *Calcul du produit de tous les sinus du premier quadrant, de degré en degré*, Assoc. Franç. Avanc. Sci. **4** (1875), 159–161.

[2] Đ. KUREPA, S. ŠKREBLIN, J. BREČEVIĆ, *Geometrija za VII. razred gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb 1958.

[3] E. W. HOBSON, *Plane trigonometry*, 4. ed., Cambridge Univ. Press 1918.