Osječki matematički list 20 (2020), 9–22

Neke zanimljive nejednakosti za trokut

Šefket Arslanagić*, Daniela Zubović†

Sažetak

U radu su prezentirane neke zanimljive nejednakosti koje su vezane za trokut i točku unutar trokuta. Svakako najpoznatija takva nejednakost je čuvena Erdös -Mordellova nejednakost. Nejednakost je objavio P. Erdös 1935. godine u američkom časopisu American Mathematical Monthly, a iste godine je L. J. Mordell dao njen dokaz. Osim ove nejednakosti u radu se nalaze još neke zanimljive nejednakosti i njihovi dokazi.

Ključne riječi: *nejednakosti, trokut, Erdös-Mordellova nejednakost, opisana kružnica trokuta, upisana kružnica trokuta*

Some interesting inequalities for a triangle

Abstract

In this paper, we present some interesting inequalities for a triangle and a point inside the triangle. At all events, the most well-known of these inequalities is the famous Erdös-Mordell inequality. In 1935, Erdös published the inequality in the journal American Mathematical Monthly, and Mordell gave his proof in the same year. This inequality as well as some interesting inequalities and their proofs are presented in this paper.

Keywords: *inequalities, triangle, Erdös-Mordell's inequality, inscribed circle, circumscribed circle*

*Odsjek za matematiku, Univerzitet u Sarajevu, email: asefket@pmf.unsa.ba
†Odsjek za matematiku, Univerzitet u Sarajevu, email: dzubovic@pmf.unsa.ba

1 Erdös-Mordellova nejednakost i još neke njoj slične nejednakosti

Neka je M proizvoljna točka u trokutu ABC, R_1, R_2, i R_3 udaljenosti točke M od vrhova A, B i C redom, a r_1, r_2 i r_3 udaljenosti točke M od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom, gdje je P površina trokuta, R polumjer trokutu opisane kružnica, a r polumjer trokutu upisane kružnice.

U [2, str. 145–152] su dani dokazi sljedećih nejednakosti:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3), \tag{A}$$

$$aR_1 + bR_2 + cR_3 \geq 4P, \tag{B}$$

gdje su a, b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC.

$$R_1r_1 + R_2r_2 + R_3r_3 \geq 2(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1), \tag{C}$$

$$(R_1 + R_2 + R_3)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) \geq 18, \tag{D}$$

$$R_1R_2R_3 \geq (r_1 + r_2)(r_2 + r_3)(r_3 + r_1), \tag{E}$$

$$R_1R_2R_3 \geq 8r_1r_2r_3, \tag{F}$$

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 \geq 4(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1). \tag{G}$$

Paul Erdös (1913.–1996.), mađarski matematičar

Najpoznatija od ovih nejednakosti je svakako nejednakost (A) koja se u matematičkoj literaturi zove Erdös-Mordellova nejednakost. Četiri razna dokaza ove nejednakosti se nalaze u [1, str. 280–287] i kao što smo rekli u [2, str. 145–152]. Njeni dokazi se također nalaze u [4, str. 338, 352–353], [5, str. 63–64], u [6, str. 120–121], u [7, str. 257] i u [8, str. 148–149].

L. J. Mordell (1888.–1972.), engleski matematičar

2 Razne nejednakosti u vezi trokuta i točke koja se nalazi unutar tog trokuta

Nejednakost 1. Neka je M proizvoljna točka koja se nalazi unutar trokuta ABC. Neka su x, y i z udaljenosti točke M od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta

ABC redom i neka je R polumjer opisane kružnice tog trokuta. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq 3\sqrt{\frac{R}{2}}. \tag{1}$$

Dokaz. Neka je $|BC|=a$, $|CA|=b$ i $|AB|=c$. Na osnovu nejednakosti Cauchy-Buniakovski-Schwarza imamo

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\leq (ax+by+cz)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \tag{2}$$

Kako je $ax+by+cz=2P$ i $abc=4RP$, to iz (2) dobivamo

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\leq 2P\cdot\frac{bc+ac+ab}{abc}&=2P\cdot\frac{ab+bc+ca}{4RP}\\&=\frac{ab+bc+ca}{2R},\end{aligned}$$

tj.

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\leq\frac{ab+bc+ca}{2R}. \tag{3}$$

Kako je

$$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2 \tag{4}$$

jer je ekvivalentno s

$$\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)\geq 0,$$

a iz [3, 5.13, str. 52] vrijedi

$$a^2+b^2+c^2\leq 9R^2, \tag{5}$$

to iz (4) i (5) dobivamo

$$ab+bc+ca\leq 9R^2. \tag{6}$$

Sada iz (3) i (6) imamo:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\leq\frac{9R^2}{2R},$$

a odavde

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq 3\sqrt{\frac{R}{2}}.$$

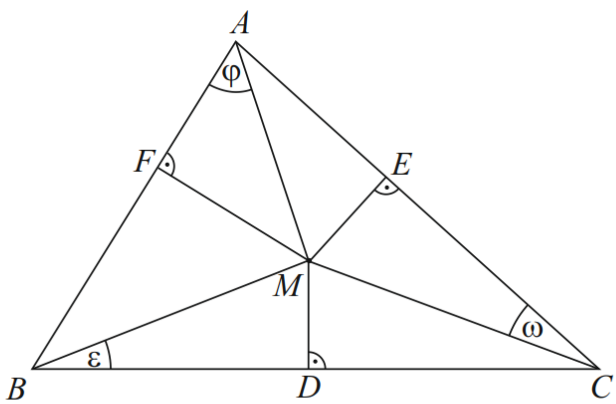
□

Vrijedi jednakost u (1) ako i samo ako je $a = b = c$ što je ekvivalentno s $x = y = z = \frac{a}{6}\sqrt{3} = r$, gdje je r polumjer upisane kružnice trokutu ABC, tj. ako je u pitanju jednakostranični trokut, a točka M je težište trokuta.

Nejednakost 2. Neka je M proizvoljna točka koja se nalazi unutar trokuta ABC. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$|MA|\cos\frac{\alpha}{2} + |MB|\cos\frac{\beta}{2} + |MC|\cos\frac{\gamma}{2} \geq \frac{a+b+c}{2}, \tag{7}$$

gdje su a, b i c duljine stranica trokuta ABC, a α, β i γ unutrašnji kutovi trokuta ABC.



Slika 1:

Dokaz. Neka su točke D, E i F nožišta okomica iz točke M na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC te $\angle MAF = \varphi$, $\angle MBD = \varepsilon$ i $\angle MCE = \omega$ (slika 1).

Koristit ćemo nejednakost

$$\cos x + \cos y \leq 2\cos\frac{x+y}{2} \tag{8}$$

koja vrijedi za sve pozitivne x i y za koje vrijedi $x + y < \pi$ jer je nejednakost (8) ekvivalentna s

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \leq 2\cos\frac{x+y}{2}, \text{ tj.}$$

$$\cos\frac{x-y}{2} \leq 1$$

što je točno. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y$.
Sada, zbog (8), imamo:

$$\begin{aligned}a+b+c &= (|AE|+|AF|)+(|BD|+|BF|)+(|CD|+|CE|)\\ &= |MA|(\cos\varphi+\cos(\alpha-\varphi))+|MB|(\cos\varepsilon+\cos(\beta-\varepsilon))\\ &+|MC|(\cos\omega+\cos(\gamma-\omega))\\ &\le 2\Big(|MA|\cos\frac{\alpha}{2}+|MB|\cos\frac{\beta}{2}+|MC|\cos\frac{\gamma}{2}\Big),\end{aligned}$$

tj.

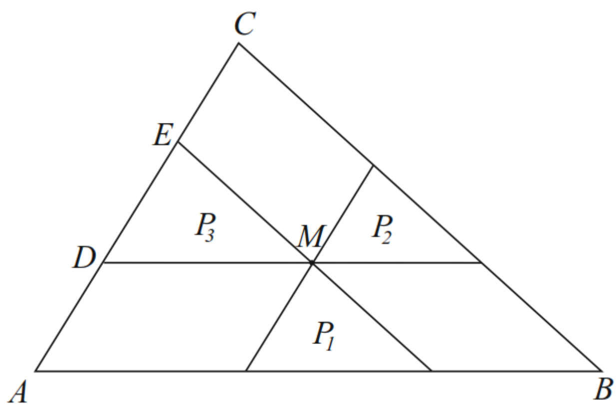
$$\Big(|MA|\cos\frac{\alpha}{2}+|MB|\cos\frac{\beta}{2}+|MC|\cos\frac{\gamma}{2}\Big) \ge \frac{a+b+c}{2}. \qquad \square$$

Vrijedi jednakost u (7) ako i samo ako je $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta$ i $\omega = \frac{1}{2}\gamma$, tj. ako i samo ako je točka M središte kružnice upisane trokutu ABC.

Nejednakost 3. Kroz točku M koja se nalazi unutar trokuta ABC, površine P, konstruirana su tri pravca paralelna stranicama trokuta koji sa stranicama trokuta određuju tri nova trokuta površine P_1, P_2 i P_3. Dokazati da vrijedi

$$P_1 + P_2 + P_3 \ge \frac{1}{3}P. \tag{9}$$

Dokaz. Uvedimo oznake kao na slici 2.



Slika 2:

Trokuti s površinama P_1, P_2 i P_3 slični su polaznom trokutu ABC površine P, pa vrijedi

$$\sqrt{\frac{P_1}{P}} = \frac{|AD|}{|AC|}, \quad \sqrt{\frac{P_2}{P}} = \frac{|EC|}{|AC|}, \quad \sqrt{\frac{P_3}{P}} = \frac{|DE|}{|AC|}.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo

$$\frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{|AD| + |EC| + |DE|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AC|} = 1,$$

pa je

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3} = \sqrt{P}. \tag{10}$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine za tri pozitivna broja slijedi

$$P_1 + P_2 + P_3 \geq \frac{1}{3}(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3})^2.$$

a odavde zbog (10) imamo

$$P_1 + P_2 + P_3 \geq \frac{1}{3}P. \qquad \square$$

Vrijedi jednakost (9) ako i samo ako je točka M središte trokutu ABC upisane kružnice.

Nejednakost 4. Ako točka M leži unutar trokuta ABC, dokazati da vrijedi nejednakost

$$s < |AM| + |BM| + |CM| < 2s, \tag{11}$$

gdje je s poluopseg trokuta ABC.

Dokaz. Neka je P točka presjeka pravaca AM i BC. Tada iz trokuta ACP dobivamo (slika 3)

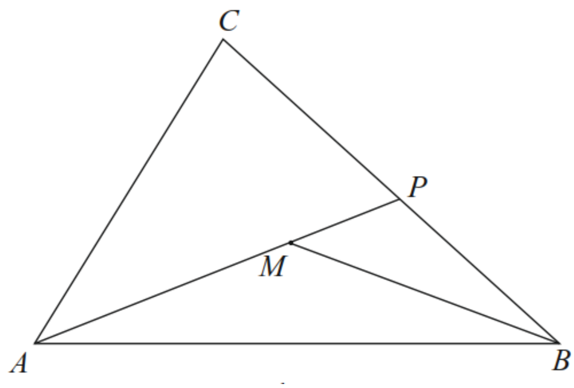
$$|AC| + |CP| > |AP|,$$

tj.

$$|AC| + |CP| > |AM| + |MP|.$$

Iz trokuta MBP imamo

$$|MP| + |PB| > |BM|.$$



Slika 3:

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$|AC| + |CP| + |MP| + |PB| > |AM| + |MP| + |BM|,$$

odnosno

$$|AC| + |CP| + |PB| > |AM| + |BM|,$$

tj.

$$|AC| + |BC| > |AM| + |BM|. \tag{12}$$

Analogno se dokazuju sljedeće nejednakosti:

$$|AB| + |AC| > |BM| + |CM|, \tag{13}$$

$$|AB| + |BC| > |AM| + |CM|. \tag{14}$$

Zbrajanjem nejednakosti (12), (13) i (14) dobivamo:

$$2(|AB| + |BC| + |AC|) > 2(|AM| + |BM| + |CM|),$$

tj.

$$2s > |AM| + |BM| + |CM|. \tag{15}$$

Iz trokuta ΔMAB, ΔMBC i ΔMCA imamo:

$$|MA| + |MB| > |AB|,$$
$$|MB| + |MC| > |BC|,$$
$$|MC| + |MA| > |AC|.$$

Nakon zbrajanja ovih nejednakosti, dobivamo:

$$2(|AM|+|BM|+|CM|) > |AB|+|BC|+|AC|, \quad \text{tj.}$$
$$|AM|+|BM|+|CM| > \frac{1}{2}(|AB|+|BC|+|AC|),$$

odnosno

$$|AM|+|BM|+|CM| > s. \tag{16}$$

Sada iz nejednakosti (15) i (16) dobivamo nejednakost (11). □

Nejednakost 5. Ako točka M leži unutar trokuta ABC i ako su x, y i z redom udaljenosti točke M od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC dokazati da vrijedi nejednakost

$$xyz \leq \frac{2P^2}{27R}. \tag{17}$$

Dokaz. Polazeći od jednakosti

$$\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2} = P, \quad \text{tj.}$$
$$ax+by+cz = 2P, \tag{18}$$

na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo

$$\frac{ax}{2P}\cdot\frac{by}{2P}\cdot\frac{cz}{2P} \leq \frac{\left(\frac{ax}{2P}+\frac{by}{2P}+\frac{cz}{2P}\right)^3}{27},$$

a odavde zbog (18) dobivamo

$$\frac{ax}{2P}\cdot\frac{by}{2P}\cdot\frac{cz}{2P} \leq \frac{1}{27},$$

odnosno

$$\frac{abc}{8P^3}xyz \leq \frac{1}{27},$$

što možemo zapisati kao

$$\frac{4RP}{8P^3}xyz \leq \frac{1}{27},$$

odakle slijedi

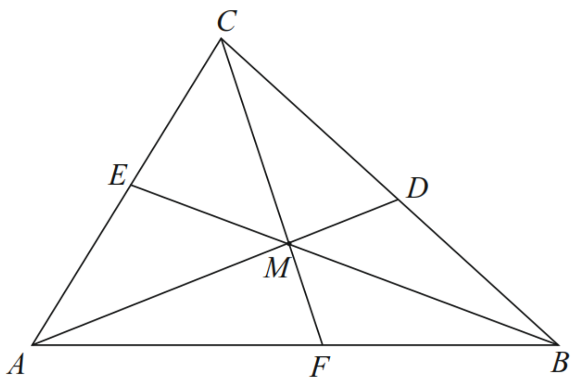
$$xyz \leq \frac{2P^2}{27R}.$$ □

Vrijedi jednakost u (17) ako i samo ako je $\frac{ax}{2} = \frac{by}{2} = \frac{cz}{2}$, tj. $P_{\Delta MBC} = P_{\Delta MCA} = P_{\Delta MAB}$, odnosno ako je točka M težište trokuta ABC.

Nejednakost 6. Neka je točka M unutar trokuta ABC. Neka su D, E i F točke presjeka pravaca AM, BM i CM sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC redom. Tada vrijedi nejednakost

$$\frac{|AM|}{|MD|} + \frac{|BM|}{|ME|} + \frac{|CM|}{|MF|} \geq 6. \tag{19}$$

Dokaz. Neka su P_1, P_2 i P_3 površine trokuta ΔMBC, ΔMCA i ΔMAB (slika 4).



Slika 4:

Kako trokuti ΔABC i ΔMBC imaju zajedničku stranicu $\overline{BC}$, to imamo:

$$\frac{|AD|}{|MD|} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1},$$

odnosno

$$\frac{|AD|}{|MD|} - 1 = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1} - 1,$$

tj.

$$\frac{|AD| - |MD|}{|MD|} = \frac{P_2 + P_3}{P_1},$$

ili

$$\frac{|AM|}{|MD|} = \frac{P_2}{P_1} + \frac{P_3}{P_1}. \tag{20}$$

Analogno dobivamo još dvije nejednakosti:

$$\frac{|BM|}{|ME|} = \frac{P_3}{P_2} + \frac{P_1}{P_2}, \quad \frac{|CM|}{|MF|} = \frac{P_1}{P_3} + \frac{P_2}{P_3}. \tag{21}$$

Sada dobivamo iz (20) i (21)

$$\begin{aligned} \frac{|AM|}{|MD|} + \frac{|BM|}{|ME|} + \frac{|CM|}{|MF|} &= \left(\frac{P_1}{P_2} + \frac{P_2}{P_1}\right) + \left(\frac{P_2}{P_3} + \frac{P_3}{P_2}\right) + \left(\frac{P_3}{P_1} + \frac{P_1}{P_3}\right) \\ &\geq 2 + 2 + 2 = 6 \end{aligned}$$

(jer vrijedi poznata nejednakost $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2,\ u, v > 0$), odakle slijedi

$$\frac{|AM|}{|MD|} + \frac{|BM|}{|ME|} + \frac{|CM|}{|MF|} \geq 6. \qquad \square$$

Vrijedi jednakost u (19) ako i samo ako je točka M težište trokuta ABC.

Nejednakost 7. Neka je M točka u trokutu ABC i neka su A', B' i C' presječne točke pravaca AM, BM i CM sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom. Dokazati da tada vrijedi nejednakost

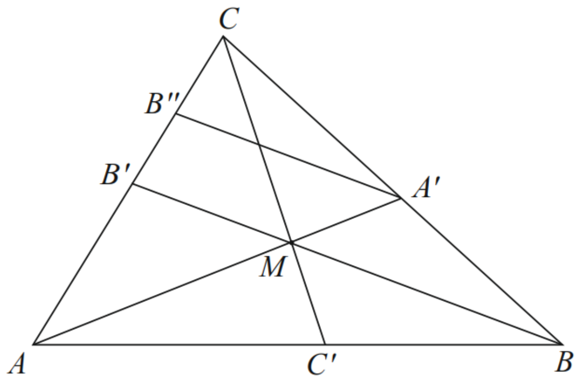
$$\frac{|AM|}{|MA'|} \cdot \frac{|BM|}{|MB'|} \cdot \frac{|CM|}{|MC'|} \geq 8. \tag{22}$$

Dokaz 1. Neka je (slika 5)

$$\frac{|BA'|}{|CA'|} = x, \quad \frac{|CB'|}{|AB'|} = y, \quad \frac{|AC'|}{|BC'|} = z.$$

Tada je na osnovu Cevinog teorema:

$$xyz = 1. \tag{23}$$



Slika 5:

Ako kroz točku A' povučemo pravac paralelan s BB' i ako je točka B'' presjek tog pravca i AC, tada vrijedi

$$\frac{|AM|}{|MA'|} = \frac{|AB'|}{|B''B'|}. \tag{24}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
|AB'| &= \frac{1}{1+y}\,|AC|\,, \\
|CB'| &= \frac{y}{1+y}\,|AC|\,, \\
|B''B'| &= \frac{x}{1+x}\cdot\frac{y}{1+y}\,|AC|\,,
\end{aligned}$$

na osnovu (23) i (24) dobivamo

$$\frac{|AM|}{|MA'|} = z + \frac{1}{y}. \tag{25}$$

Na sličan način dolazimo do jednakosti

$$\frac{|BM|}{|MB'|} = x + \frac{1}{z}, \quad \frac{|CM|}{|MC'|} = y + \frac{1}{x}. \tag{26}$$

Na osnovu (25), (26) i (23) je:

$$\frac{|AM|}{|MA'|}\cdot\frac{|BM|}{|MB'|}\cdot\frac{|CM|}{|MC'|}=\left(z+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{z}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)$$
$$=2+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right). \qquad (27)$$

Kako je $u+\dfrac{1}{u}\geq 2,$ za $u>0$ zaključujemo da iz (27) slijedi (22). □

Vrijedi jednakost u (22) ako i samo ako je $x=y=z$, tj. ako i samo ako je točka M težište trokuta ABC.

Dokaz 2. Koristeći jednakosti (20) i (21) iz prethodne nejednakosti 6 imamo, uzevši da je $D\equiv A',\ \ E\equiv B',\ \ F\equiv C'$,

$$\frac{|AM|}{|MA'|}\cdot\frac{|BM|}{|MB'|}\cdot\frac{|CM|}{|MC'|}=\frac{P_2+P_3}{P_1}\cdot\frac{P_3+P_1}{P_2}\cdot\frac{P_1+P_2}{P_3},$$

a odavde na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo

$$\frac{|AM|}{|MA'|}\cdot\frac{|BM|}{|MB'|}\cdot\frac{|CM|}{|MC'|}\geq\frac{2\sqrt{P_2P_3}\cdot 2\sqrt{P_3P_1}\cdot 2\sqrt{P_1P_2}}{P_1P_2P_3}=8\frac{\sqrt{P_1^2P_2^2P_3^2}}{P_1P_2P_3}=8,$$

tj.

$$\frac{|AM|}{|MA'|}\cdot\frac{|BM|}{|MB'|}\cdot\frac{|CM|}{|MC'|}\geq 8. \qquad □$$

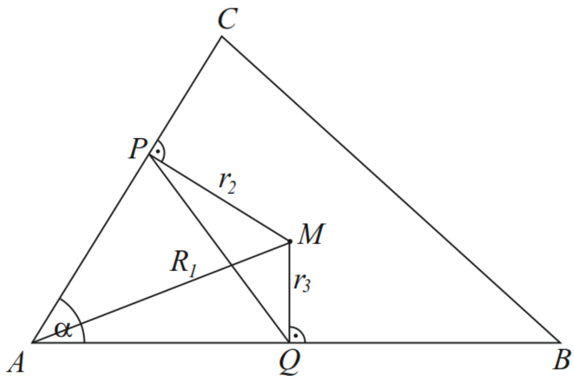
Nejednakost 8. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$8SR_1R_2R_3\geq\left(r_2+r_3\right)\left(r_3+r_1\right)\left(r_1+r_2\right), \qquad (28)$$

gdje je $S=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Dokaz. Primjenjujući sinusov i kosinusov teorem na trokut MPQ gdje su točke P i Q nožišta okomica iz točke M na stranice $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ (slika 6) dobivamo:

$$R_1^2\sin^2\left(180^0-\alpha\right)=r_2^2+r_3^2-2r_2r_3\cos\left(180^0-\alpha\right),\ \text{tj.}$$



Slika 6:

$$\begin{aligned} R_1^2 \sin^2 \alpha &= r_2^2 + r_3^2 + 2r_2 r_3 \cos\alpha \\ &= (r_2+r_3)^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} + (r_2-r_3)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \\ &\geq (r_2+r_3)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$2R_1 \sin\frac{\alpha}{2} \geq r_2 + r_3. \tag{29}$$

Analogno dobivamo i sljedeće nejednakosti

$$2R_2 \sin\frac{\beta}{2} \geq r_3 + r_1, \quad 2R_3 \sin\frac{\gamma}{2} \geq r_1 + r_2. \tag{30}$$

Nakon množenja nejednakosti (29) i (30) dobivamo

$$8 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} R_1 R_2 R_3 \geq (r_2+r_3)(r_3+r_1)(r_1+r_2), \text{ tj.}$$
$$8SR_1R_2R_3 \geq (r_2+r_3)(r_3+r_1)(r_1+r_2). \qquad \square$$

Jednakost u (28) vrijedi ako i samo ako je $r_1 = r_2 = r_3$, tj. ako i samo ako je točka M centar upisane kružnice trokuta ABC.

Literatura

[1] Š. ARSLANAGIĆ, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.

[3] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.

[4] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, *Priručnik za takmičenja srednjoškolaca u matematici, II Geometrijske nejednakosti,* Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1966.

[6] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[7] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[8] E. Specht, *Geometria-scientiae atlantis*, Otto-von-Guericke, Universität Magdeburg, 2001.