

# MATEMATIČKO PUTOVANJE – ŠVICARSKA

Sanja Janeš, Čabar



Matka 28 (2019./2020.) br. 111

Švicarska je država u srednjoj Europi, a po državnom je uređenju konfederacija koja graniči s pet država: Njemačkom, Francuskom, Austrijom, Italijom i Lihtenštajnom. Prema podacima iz 2015. godine Švicarska ima približno 8 327 126 stanovnika. Glavni grad je Bern koji ima 131 554 stanovnika, a ako se gleda područje koje mu gravitira, taj broj raste i do 406 900 stanovnika.



Slika 1. Autor: David Liuzzo

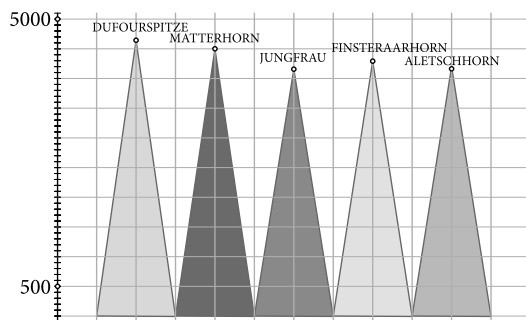
Većinu stanovništva čine Švicarci (75.3 %), a ostalo su stranci – Nijemci, Portugalci, Talijani, Francuzi...

1. Koliko stanovnika Švicarske čine stranci?

Oko  $\frac{2}{3}$  ukupnoga stanovništva naseljava područja Švicarske visoravni. Tamo se nalaze najveća gradska središta: Bern, Zürich, Lausanne, Luzern i Sankt Gallen u kojima živi više od 30 % stanovništva Švicarske. Gusto je naseljen i kraj uz Ženevsko jezero s gustoćom 1 718 stanovnika/km<sup>2</sup>. U gradovima Švicarske živi 84.5 % stanovništva.



- Švicarska na sjeveru graniči s Njemačkom (duljina granice 334 km), na sjeverozapadu i jugozapadu s Francuskom (573 km), na jugu i jugoistoku s Italijom (740 km), a na istoku s Lihtenštajnom (41 km) i Austrijom (164 km). Kružnim dijagramom prikažite udio duljine granice svake od pet zemalja koje graniče sa Švicarskom.
- Vrijednost iz izraza  $2^2 \cdot 10^4 + 10^3 + 2^1 \cdot 10^2 + 2^3 \cdot 10^1 + (2^2 + 2^0) \cdot 10^0$  jednaka je površini Švicarske izražene u kvadratnim kilometrima. Kolika je ta površina?
- Švicarska je izrazito planinska zemlja. Na grafičkom je prikazu pet najviših vrhova Švicarske. Procijenite njihove visine.



Vrh Matterhorn nalazi se na granici između Švicarske i Italije. Planinu je prva osvojila ekspedicija koju je vodio Edward Whymper. Veći dio te ekspedicije smrtno je stradao prilikom silaska. U pokušaju osvajanja Matterhorna, od prvog uspona pa do 1995. godine, ukupno je poginulo oko 500 alpinista.



Slika 2. Čokolada Toblerone



Slika 3. Matterhorn

Jedna od najpoznatijih čokolada na svome pakiranju nosi motiv Matterhorna.

5. Oblika kojeg je geometrijskog tijela Matterhorn?
6. Koji je točan matematički naziv geometrijskog tijela pakiranja čokolade Toblerone?



Slika 4. Autor: Dirk Beyer

U švicarskim Alpama nalaze se mnogobrojni ledenjaci. Ledenjak je veliko postojano tijelo od leda. Na kopnu ledenjak polako putuje zbog naprezanja koje izaziva njegova težina. Ledenjaci se stvaraju na mjestima gdje je skupljanje snijega veće od njegovog topljenja. Nakon desetljeća i stoljeća zbijeni se snijeg pretvara u led.

Ledenjaci su najveći spremnici slatke vode na Zemlji. Znanstvenici ih smatraju najosjetljivijim pokazateljima klimatskih promjena i globalnog zatopljenja.

Najveći švicarski ledenjak je Aletsch (Aletschgletscher). Godine 2014. bio je dug 23 km. Volumen mu je 2011. iznosio  $15.4 \text{ km}^3$  i prekrivao je površinu od  $81.7 \text{ km}^2$ . Kao i drugi ledenjaci, i ledenjak Aletsch smanjuje se pod utjecajem klimatskih promjena. Od 1980. do 2014. izgubio je 1.3 km svoje duljine, a od 1870. do 2016. godine čak 3.2 km svoje duljine. Također, izgubio je 320 m svoje debljine i danas se njegova debljina procjenjuje na oko 1 000 m.

7. Koliki je postotak svoje duljine izgubio Aletsch ledenjak u razdoblju od 1980. do 2014. godine?
8. Kolika bi bila približna duljina brida kocke u koju bismo mogli „pretočiti“ taj ledenjak?

Od dvanaestak švicarskih sveučilišta najstarija su u Baselu, Lausanni i Ženevi. Najveće od njih je sveučilište u Zürichu.

9. Doznajte godine osnutka najstarijih švicarskih sveučilišta. Rješenja jednadžbi predstavljaju godine njihova osnutka. Basel ( $x$ ), Lausanna ( $y$ ), Ženeva ( $z$ ).



$$\frac{(5 \cdot 2 + 2^2) \cdot 2}{5} + \frac{5x}{5^3} = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^1$$

$$10y = (5 \cdot 2^3)^2 - 9 \cdot (\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1} - y)$$

$$\frac{1}{4} - 3 \cdot \left( \frac{7}{8} - 1.125 \right) + z = 3 \cdot (5 \cdot 10^2 + 2^2 \cdot 5)$$

Službeni su jezici njemački i švicarski. Njemačkim govori  $\frac{2}{3}$  stanovništva Švicarske, francuskim  $\frac{1}{5}$ , talijanskim  $\frac{1}{8}$ , dok ostali govore retroromanskim, jednim od najstarijih europskih jezika.

10. Koliki postotak Švicaraca govori retroromanski?

11. Grafički prikazite udjele jezika u Švicarskoj.

U švicarskim gradovima živi gotovo 85 % ukupnog stanovništva. Bern, iako je glavni grad, nije i najveći brojem stanovnika. U tablici je prikazan broj stanovnika najvećih švicarskih gradova. Neki od njih, kao Bern, Zürich i Geneva, imaju puno više stanovnika ako se uzme u obzir šire gradsko područje koje mu gravitira.

	Bern	Zürich	Geneva	Basel	Lausanne	Winterthur	Luzern
Uže gradsko područje	131 554	396 955	198 072	169 916	135 629	108 268	81 295
Šire gradsko područje	406 900	1 315 700	570 200	–	–	–	–

12. Potražite hrvatske gradove koji imaju približan broj stanovnika kao uža gradska područja navedenih švicarskih gradova.

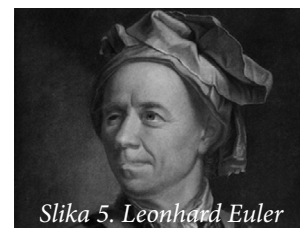
Motiv švicarske zastave i grba među najprepoznatljivijima su u svijetu. Zastava je kvadratnog oblika s centralno smještenim simbolom križa.



13. Konstruirajte, što vjernije, motiv švicarske zastave u programu računalne geometrije ili na papiru. Opišite kako ste razmišljali, što ste prvo uočili, koje zaključke donijeli. Opišite tijek konstrukcije.

14. Koliki je postotak zastave obojen bijelo?

Švicarska se može pohvaliti jednim od najvećih i najplodnijih matematičara u povijesti, Leonhardom Eulerom, koji je živio i stvarao u 18. stoljeću. Njegova aktivnost nije stala ni kada je oslijepio jer je tada diktirao svoje radove. Napisao je oko 900 radova. Uveo je u znanost mnoge oznake, pojmove i teoreme.

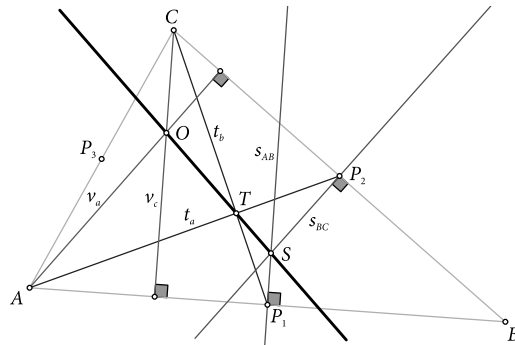


Slika 5. Leonhard Euler



## A. Eulerov pravac:

Svaki osnovnoškolac može prepoznati pojmove vezane uz Eulerov pravac, pa ga čak pokušati i konstruirati.



Za svaki trokut ortocentar (točka  $O$ ), težište (točka  $T$ ) i središte trokutu opisane kružnice (točka  $S$ ) pripadaju istome, Eulerovom pravcu. Pri tome vrijedi omjer  $|ST| : |TO| = 1 : 2$ .

(Napomene: Ortocentar je sjecište visina trokuta. Težište je sjecište težišnica trokuta, a težišnica je spojnica vrha trokuta s polovištem nasuprotne stranice trokuta. Središte trokutu opisane kružnice je sjecište simetrala stranica trokuta.)

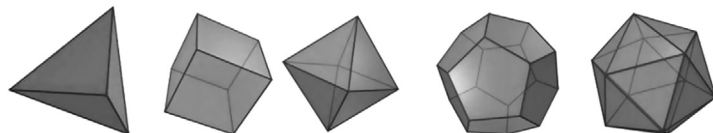
15. U programu računalne geometrije nacrtajte neki trokut, a zatim konstruirajte Eulerov pravac koji pripada tome trokutu.

## B. Eulerova poliedarska jednakost

Eulerova poliedarska jednakost koja povezuje broj vrhova ( $V$ ), broj bridova ( $B$ ) i broj strana ( $S$ ) svakog konveksnog poliedra, glasi:

$$V - B + S = 2.$$

16. Na tijelima na slici provjerite Eulerovu poliedarsku jednakost. Ta tijela zovemo Platonova tijela koja redom imaju nazive: tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar.



Slika 6. Platonova tijela  
Ta fotografija korisnika Nepoznat autor: licenca CC BY-ND

Euler ima i svoj broj. Eulerova konstanta  $e$  iznosi približno 2.718. Ta je konstanta, kao i broj  $\pi$  (s približnom vrijednošću od 3.14), iracionalna i tran-



scedentna. Euler je povezoao četiri konstante (broja)  $\pi, e, i, 1$  i  $0$  u jednakost poznatu kao *Eulerova formula*:  $e^{i\pi} + 1 = 0$ . O Eulerovoj ćete formuli učiti u srednjoj školi. Za tu jednakost kažu da je najljepša jednakost cijele matematičke znanosti.

Švicarska je između ostalog poznata po svojim čokoladama, sirevima, sklopivim nožićima...

Neke od najpoznatijih tvornica čokolade su Nestlé, Lindt i Kraft Foods koja proizvodi popularnu Milka čokoladu i Toblerone.

17. Rješenjeje  $(a, b)$  sustava 
$$\begin{cases} 2a + \frac{1}{13}b = 40 \\ b - a = 7 \end{cases}$$
 otkrit će godine osnutka proizvođa-

ča Nestlé i Milka čokolade. Godina osnutka proizvođača Nestlé ima oblik  $\overline{18a}$ , a godina osnutka proizvođača Toblerone ima oblik  $\overline{18b}$ .

Čokolada je poslastica koja se dobiva miješanjem kakaove mase s većom ili manjom količinom šećera. Ime potječe iz vremena kada se čokolada više pila kao napitak, a nastala je od riječi *xocóatl* ili *chocolatl* (*xoco* znači gorko, a *atl* voda) i podrijetlom je iz Južne Amerike. Prvi su ju počeli pripravljati Olmeci prije 2 600 godina. Maye su u travnju mjesecu imali slavlje boga kaka Ek Chuaha, tijekom kojega bi se prinosile životinjske žrtve i dijelili pokloni, a zrna kakaovca bila su prihvaćena kao sredstvo plaćanja.

No čokolada nije jedina namirnica po kojoj je Švicarska poznata. Tu je i sir, a među najpoznatijima je ementaler. Ementaler je polutvrđi sir koji izvorno potječe iz kantona Bern. Ovaj sir sadrži 45 % masnoće. Ostale poznate vrste švicarskoh sireva u Gruyere, Appenzel, Tilsit i Sbrinz.



### Literatura:

1. <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=60083>
2. <https://hr.wikipedia.org/wiki/Čokolada>
3. <https://www.coolinarika.com/clanak/mala-zemlja-velikih-sireva/>
4. <https://hr.wikipedia.org/wiki/Ledenjak>
5. <https://proleksis.lzmk.hr/20169/>
6. [https://hr.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler](https://hr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)

Rješenja zadataka provjerite na stranici 215.

