Matka 28 (2019./2020.) br. 111

Nikol Radović, Sisak

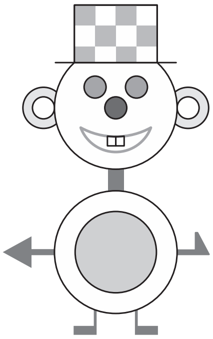
KRUŽNICA I KVADRAT
Nove zgode geometrijske družbe

Grupa ljubitelja geometrije koju čine Eva, Lukas, Maja, Petra i Šimun, učenici jedne osnovne škole, dobila je nove članove koji dolaze iz stranih zemalja. Na početku još jednog druženja oni se predstavljaju:

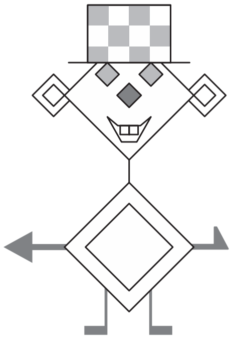
– Zovem se Krugoslav – započeo je predstavljanje novi član geometrijske družbe i nastavio – dolazim iz Euklidije, zemlje u kojoj vrijede pravila euklidske geometrije.

– Dobro nam došao – pozdravio je pridošlicu profesor Kosinus. Ostali članovi geometrijske družbe pridružili su se profesorovoj dobrodošlici kucanjem po klupama. Bubač je u čast novog člana zazujao i zamahnuo krilima.

– Moj prijatelj zove se Kvadratoslav – nastavio je Krugoslav – neka on sam kaže nekoliko riječi o sebi.



Slika 1.



Slika 2.

– Pozdravljam vas sve, sretan što se mogu pridružiti vašoj geometrijskoj družbi – započeo je Kvadratoslav. – Dolazim na preporuku profesora Abakusa koji je prijatelj vašeg profesora Kosinusa. Za razliku od Krugoslava, koji dolazi iz Euklidije u kojoj se možete kretati/*šetati bez nekih uvjeta, u* Nigdjezemskoj, iz koje stižem, kretati/*šetati* možete lijevo ↔ desno ili gore ↔ dolje.

– Uh, to baš nije dobro – prekinuo ga je Lukas. – To su ograničenja, zar ne?

MATKA 111.indd 206 18.2.2020. 13:22:39

Neki od članova družbe složili su se s Lukasom, a ostali su začuđeno okretali glavama.

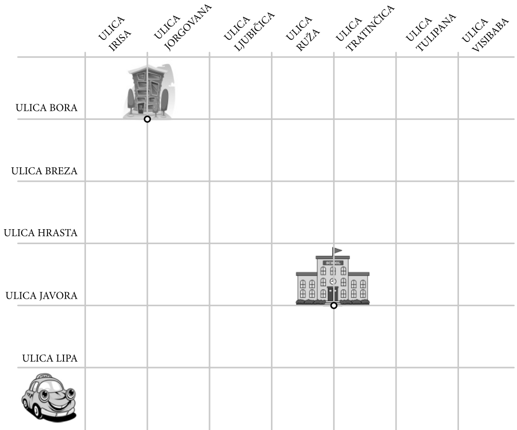
– Kako to da ste došli baš u našu školu? – znatiželjna je Maja.

– Ah, Majo – zazujao je Bubač – Kvadratoslav je rekao da je došao na preporuku profesora Abakusa, zar to nisi čula?

– Ja sam došao na preporuku profesora Limesa. Naime, naši profesori – nastavljao je objašnjavati Krugoslav – zajedno su proveli studijsku godinu. Znate ono, razmjena studenata... ali zaboravio sam kako se zove sveučilište.

Profesor Kosinus samo se nasmijao i sa sjetom dodao: – To je bilo davno, kada smo nas trojica bili mladi i zeleni, i nismo znali da ćemo raditi s radoznalim učenicima. Drago mi je da su nam se pridružili Krugoslav i Kvadratoslav, zajedno ćemo proučavati geometriju i neke nove, do sada nepoznate činjenice. Krenimo! Za početak, pogledajte ovaj zadatak.

Zadatak 1. U Matkogradu, glavnom gradu Nigdjezemske, ulice su međusobno usporedne ili okomite i jednako razmaknute/udaljene, Slika 3. Kvadratoslav živi u kući na križanju Ulice jorgovana i Ulice bora, a bolnica je na križanju Ulica javora i Ulice tratinčica. Kvadratoslav ima visoku temperaturu i kašlje. Hitno mora doktoru. Kvadratoslavova mama zove taksi. Koji će putem najbrže doći do cilja?



Slika 3.

– Kvadratoslav je tek došao, a već je u zadatku? – negoduje Bubač.

– Uh, tu je sve zeleno! Očito zdravo žive! Nema „mekića”! – komentirala je Maja. Na taj njezin komentar svi su se nasmijali, pa i Kvadratoslav.

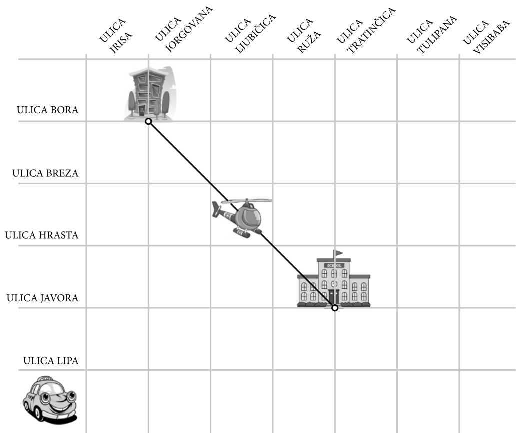
– Uvijek misliš na jelo – bocnula ju je Eva.

– Ali, mislim da nije važno kako se ulice zovu, zar ne? – na glas je komentirao Šimun.

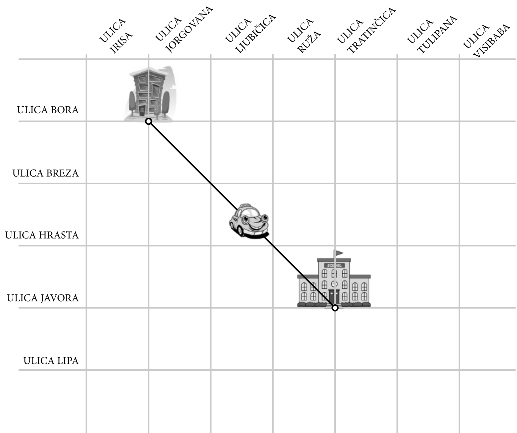
– U zadatku se naglašava *jednako razmaknute/udaljene ulice*, to mora biti važno – dodala je Petra.
– Ne zaboravite da su ulice međusobno okomite/usporedne – opet se javila Maja.
– Dobro i manje dobro – uključio se profesor Kosinus i iznad ruba naočala znakovito pogledao Krugoslava i Kvadratoslava koji su krenuli rješavati znani im problem. No, no! Pustite družbu da malo razmišlja i uključi male sive stanice.

Svi su se uozbiljili i počeli rješavati zadatak. Čulo se klikanje miševa i poneki uzdah. Nakon nekog vremena, Šimun prilazi računalu na katedri kako bi prezentirao svoje razmišljanje i rješenje: – Ja sam sliku problema „ubacio" u *Sketchpad* dokument i pokušao na slici nacrtati rješenje. Mislim da sam uspio, Slika 4. Imam dvije mogućnosti.

Sav sretan nastavio je objašnjavati: – Na Slici 4.a) ubacio sam helikopter i animirao ga od početne točke (Kvadratoslave kuće) do krajne točke (bolnica), dok sam na Slici 4.b) ubacio leteći automobil. To sam vidio u nekom crtiću. Ludo, zar ne?



Slika 4.a



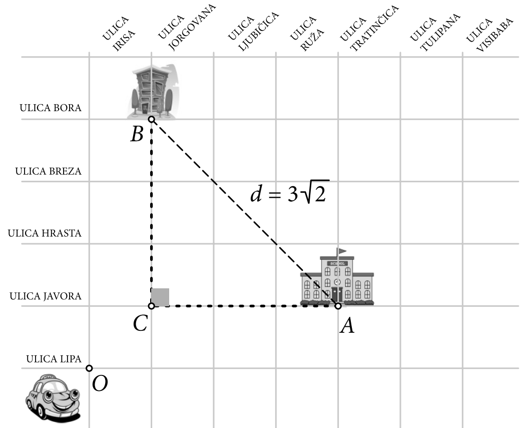
Slika 4.b

Neki su i zapljeskali na Lukasovo rješenje, no Petra nije bila pretjerano oduševljena Lukasovom umotvorinom, te je počela komentirati: – Ne bih se baš složila s ovim rješenjem. Naime, ovo nije situacija iz crtanog ili akcijskog filma. Ovo je sitacija iz života, vožnja taksijem. Ovo rješenje značilo bi da možemo letjeti kroz zgrade na putu. Ne znam baš...

– Lukas, ti si pretpostavio da helikopter leti po najkraćoj spojnici točaka (Kvadratoslavova kuća i bolnica), tj. po dužini. No, u tom slučaju prelaziš preko građevina na putu, a to nije moguće – dodala je Eva.

– Ovo je rješenje filmofila – komentirao je profesor Kosinus – koji primjenjuje Pitagorin teorem.

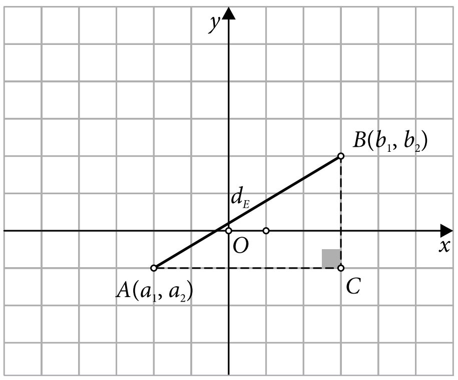
– Ja sam izračunao udaljenost primjenom Pitagore, javio se Šimun. – Pretopstavio sam da ulice Matkograda definiraju koordinatni sustav, što je moguće zbog uvjeta okomite/usporedne ulice i jednako udaljene tako da su Kvadratoslava kuća i bolnica određene pridruženim točakama *B* i *A, tj.* njihovim koordinatama. Primjenom Pitagorina poučka, Slika 5., računamo najkraći put.



Slika 5.

– Ako bolje gledamo tvoje rješenje, najkraća je udaljenost jednaka duljini hipotenuze zamišljnog pravokutnog trokuta *ABC* – gledajući Lukasovo rješenje komentirala je Petra i nastavila: – No to nije moguće jer opet prešutno prelazimo preko svih građevina na putu.

– Ja bih se uključio – javio se Krugoslav. Neka su točke *A* i *B u* Kartezijevu pravokutnom koordinatnom sustavu xOy zadane koordinatama, Slika 6. Tada je duljina dužine jednaka $d_E(A,B) = |AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ (tako ju definiramo u euklidskoj geometriji).



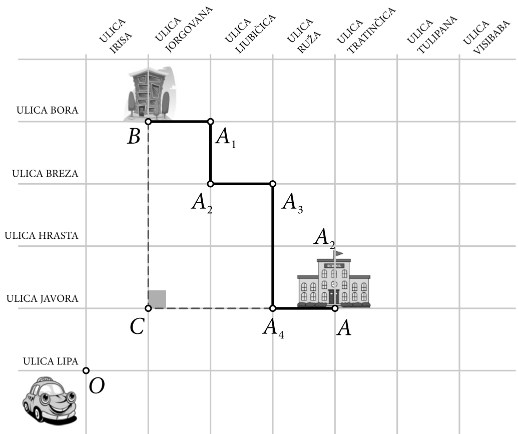
Slika 6.

– Eva i ja smo to malo drugačije riješile, uz pretpostavku da smo u taksiju/automobilu. Mogući pomaci su lijevo ↔ desno odnosno gore ↔ dolje, slično pravilima koje nam je u predstvljanju rekao Kvadratoslav.

– Imajući to na umu, rješenje je prikazano na Slici 7. – uključila se u objašnjavanje Eva. Budući da među vama može biti onih koji ne vjeruju da je samo to rješenje, na sljedećoj Slici 7.a) prikazale smo drugo rješenje. Vrijedi da je udaljenost jednaka zbroju duljina kateta zamišljenog pravokutnog trokuta *ABC*.

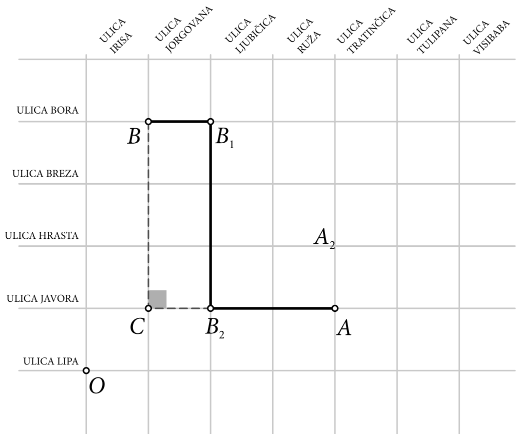
– Pogledajte ima li još koje rješenje – pripomenuo je profesor Kosinus.

– Mmmm... opet 6 – u glas rekoše Maja, Šimun i Lukas.



$d_1 = 6$

Slika 7.



$d_1 = 6$

Slika 7.a)

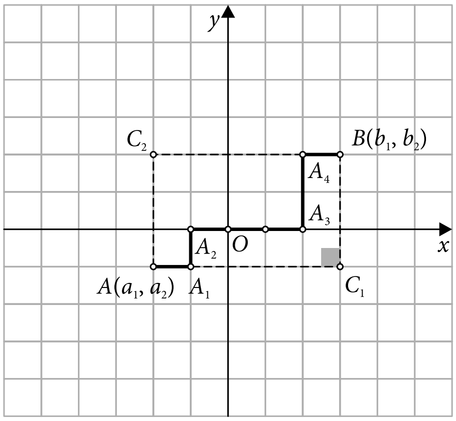
– To znači do cilja možeš doći različitim putovima, ali je rezultat isti – uključio se Kvadratoslav.

– Ako se prisjetite Krugoslavovog komentara na Lukasovo rješenje zadatka – nastavio je Kvadratoslav – onda za točke *A* i *B* u Kartezijevom pravokutnom koordinatnom sustavu *xOy* zadane koordinatama, duljina dužine jednaka je $|AB| = d_M(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$, Slika 8.

– Funkcija koja se ovdje spominje naziva se *apsolutna vrijednost*.

– Za realni broj *x* apsolutna vrijednost jednaka je

$$|x| = \begin{cases} x, & za\ x > 0, \\ 0, & za\ x = 0, \\ -x, & za\ x < 0. \end{cases}$$



Slika 8.

– No, ne smijemo zaboraviti da je ovo idealan slučaj jer su ulice grada međusobno usporedne ili okomite i jednako razmaknute – zaključio je raspravu Krugoslav.

– Točno. Geometrija u kojoj rješavamo ovaj problem naziva se taksi *taxicab geometry* (geometrija taksija) ili *Manhatan geometry* (zbog ulica u New Yorku koje su međusobno usporedne ili okomite) – objašnjava profesor Kosinus, te nastavlja: – Poznati njemački matematičar **H. Minkowski** (1865. – 1909.) prvi ju je objasnio pa je danas prema njemu nazivaju i *geometrijom Minkovskog*.

– Dakle, rješenje koje nam je prikazao filmofil Lukas rješenje je u euklidskoj geometriji, Euklidiji iz koje dolazi Krugoslav, a rješenje zadatka koje su prezentirale Petra i Eva rješenje je koje vrijedi u Nigdjezemskoj iz koje dolazi Kvadratoslav.

Literatura:

1. Divjak, B. (2000.): *Notes on Taxicab Geometry*, KOG. 5 – 9.

2. Mladinić, P.; Radović N. (2018.): *Geometrija prirode*, Proven grupa d. o. o., Zagreb.

3. Mladinić, P.; Radović, N. (2019.): Kružnica je kvadrat ili proučavanje novih geometrija, Zbronik radova Stručno – metodičkog skupa Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi – Geometrija u nastavi matematike, Pula, 14. – 16.11.2019., 261 – 269.

4. Nirode, W. (2018.): *Doing Geometry with Geometry Software*, Mathematic Teacher, Vol. 112, No. 3, November/ December, 179 – 184.-

5. Polya, G. (2003.): *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb.

6. Reynolds, B. E.; Fenton, W. E. (2005.): *College Geometry Using The Geometer's Sketchpad*, Key College Publishing, Emeryville.