# VIŠE RAZNIH DOKAZA JEDNOG ZADATKA O KVADRATU

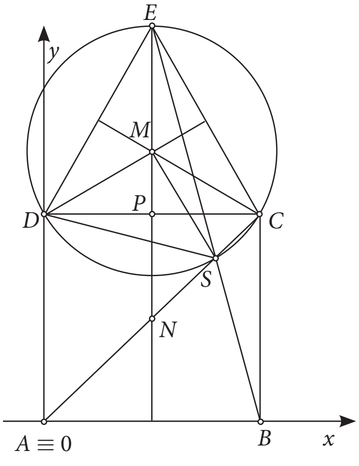
Šefket Arslanagić, Sarajevo

U prošlom broju objavljen je članak pod nazivom Četiri rješenja zadatka o jednakokračnom trokutu. U ovom članku pokazat ćemo više raznih dokaza jednog zadatka o kvadratu. Pri tome ćemo koristiti više važnih činjenica iz geometrije, kao što su: osna simetričnost trokuta, jednakost obodnih kutova nad istom tetivom (lukom) kružnice, poučak o vanjskom kutu trokuta, Talesov poučak, poučak o simetrali unutarnjeg kuta trokuta te na kraju jednadžba pravca kroz jednu te dvije točke, rješavanje sustava linearnih jednadžbi, izračunavanje udaljenosti između dvije točke, itd.

Riječ je o sljedećem zadatku:

Nad stranicom $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ konstruiran je jednakostranični trokut $\Delta CDE$ (kao na slici). Neka je točka $M$ središte ovom trokutu opisane kružnice, a točka $S$ presjek pravaca $BE$ i $AC$. Dokažimo da je trokut $\Delta CMS$ jednakokračan.

**Dokaz 1**.




Trokuti $\Delta BSC$ i $\Delta DSC$ su osnosimetrični u odnosu na pravac $AC$, stoga vrijedi da je

$$|\angle SBC| = |\angle SDC|. \tag{1}$$

Očito je:

$$|\angle SBC| = |\angle EBC|, \tag{2}$$

kao i

$$|\angle SBC| = |\angle CBE| \tag{3}$$

(jer je trokut $\Delta BCE$, zbog $|BC| = |CE|$, jednakokračan), a odavde je

$$|\angle SBC| = |\angle SEC|. \tag{4}$$

Sada iz (1), (2), (3) i (4) slijedi da je

$$|\angle SEC| = |\angle SDC|. \tag{5}$$

Iz (5) slijedi da točke $E$ i $D$ pripadaju istoj kružnici (nad tetivom $\overline{CS}$) koja je opisana trokutu $\Delta DSC$, a čije je središte u točki $M$. Dakle, vrijedi:

$$|MS| = |MC|,$$

što znači da je trokut $\Delta CMS$ jednakokračan, a to je i trebalo dokazati.

**Dokaz 2**. Imamo $|\angle DCB|=90°$ te $|\angle ACB|=|\angle BAS|=45°$ i $|\angle ECD|=60°$. Dalje slijedi da je $|\angle ECB|=90°+60°=150°$, a kako je trokut $\Delta BCE$ jednakokračan, vrijedi da je

$$|\angle CBE|=|\angle BEC|=\frac{1}{2}\left(180°-|\angle ECB|\right)=\frac{1}{2}\left(180°-150°\right)=15°.$$

Kut $\angle CDE$ je vanjski kut trokuta $\Delta BSC$ pa imamo:

$$|\angle CSE|=|\angle CBS|+|\angle SCB|=|\angle CBE|+|\angle SCB|=15°+45°=60°=|\angle CDE|.$$

Odavde opet slijedi da točke $S$ i $D$ pripadaju istoj kružnici nad tetivom $\overline{CE}$ koja je opisana trokutu $\Delta DSC$ čije je središte u točki $M$. Dakle, vrijedi:

$$|MS| = |MC|,$$

što znači da je trokut $\Delta CMS$ jednakokračan, a to je i trebalo dokazati.

**Dokaz 3**. Ne umanjujući općenitost, uzet ćemo da je $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |CE| = |DE| = 1$. U tom slučaju redom dobivamo:

$$|EP|=\frac{\sqrt{3}}{2},\ |PN|=\frac{1}{2},\ |ME|=|MC|=\frac{2}{3}|EP|=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$|NM|=|MP|+|PN|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}\ \text{ i }\ |NE|=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Zbog $NE \parallel BC$, $S \in AC$; $S \in BE$, na temelju Talesovog poučka, vrijedi da je

$$\frac{|NS|}{|CS|}=\frac{|NE|}{|CB|}=\frac{|NE|}{1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Odavde, zbog $|NM|=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ i $|ME|=\frac{\sqrt{3}}{3}$, vrijedi da je

$$\frac{|NS|}{|CS|}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{6}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{|NM|}{|ME|},\ \text{tj.}$$

$$MS \parallel EC,$$

odakle na temelju Talesovog poučka slijedi:

$$\frac{|MS|}{|EC|}=\frac{|NM|}{|NE|}\Rightarrow|MS|=|EC|\cdot\frac{|NM|}{|NE|}=1\cdot\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{6\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}=|MC|,\ \text{tj.}$$

$$|MS| = |MC|,$$

što znači da je trokut $\Delta CMS$ jednakokračan, a to je i trebalo dokazati.

**Dokaz 4**. Ne umanjujući općenitost, uzet ćemo opet da duljine stranica kvadrata $ABCD$ i duljine stranica jednakostraničnog trokuta $\Delta DEC$ iznose 1.

Tada vrijedi da je $|NP|=\frac{1}{2}$, $|MP|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $|ME|=|MC|=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Budući da je $NE \parallel BC$ i $|BC| = |CE| = 1$, na temelju Talesovog poučka dobivamo:

$$\frac{|NS|}{|CS|}=\frac{|NE|}{|CB|}=\frac{|NE|}{|CE|},$$

što znači da točka $S$ dijeli stranicu $\overline{NC}$ trokuta $\Delta NEC$ u omjeru ostalih dviju stranica $\overline{NE}$ i $\overline{CE}$; dakle pravac $ES$ simetrala je unutarnjega kuta $\angle NEC$ trokuta $\Delta NEC$ pa vrijedi

$$|\angle MES|=\frac{1}{2}|\angle MEC|=\frac{1}{4}|\angle DEC|=15^\circ.$$

Dalje imamo:

$$\frac{|NM|}{|MC|}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{3}}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{|NE|}{|CE|}=\frac{|NS|}{|SC|}.$$

Odavde zaključujemo da je $\overline{MS}$ simetrala unutarnjeg kuta $\angle NMC$ trokuta $\Delta NMC$, te da je $|\angle NMS|=\frac{1}{2}|\angle NMC|=30^\circ$. Dalje je

$$|\angle SME|=180^\circ-|\angle NMS|=180^\circ-30^\circ=150^\circ.$$

Sada iz trokuta $\Delta SME$ slijedi:

$$|\angle ESM|=180^\circ-150^\circ-15^\circ=15^\circ=|\angle MES|,$$

što znači da je trokut $\Delta EMS$ jednakokračan s osnovicom $\overline{ES}$ pa je $|MS|=|ME|=|MC|$, tj. trokut $\Delta CMS$ je jednakokračan, što je i trebalo dokazati.

**Dokaz 5**. Za ovaj dokaz koristit ćemo koordinatnu metodu. Uzet ćemo da je $O\equiv A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$, $D(0,a)$, tj. $Ox\equiv AB$, $Oy\equiv AD$. Dalje imamo da je $E\left(\frac{a}{2},a+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(\frac{a}{2},a+\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$. Ne umanjujući općenitost, možemo uzeti da je $a = 6$. Tada je: $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(6,6)$, $D(0,6)$, $E\left(3,6+3\sqrt{3}\right)$ i $M\left(3,6+\sqrt{3}\right)$. Pravac $AC$ simetrala je kuta od 90° pa jednadžba pravca $AC$ glasi:

$$y = x.$$

Pravac $BE$ ima jednadžbu oblika $y = kx + n$. Budući da točke $B$ i $E$ pripadaju tome pravcu, vrijedi:

$$0 = 6k + n$$

i

$$6+3\sqrt{3}=3k+n\,,$$

a odavde je redom:

$$6+3\sqrt{3}=3k-6k$$

$$3k=-\left(6+3\sqrt{3}\right)/:3$$

$$k=-\left(2+\sqrt{3}\right),\ \text{te}$$

$$n=-6k=6\left(2+\sqrt{3}\right)=12+6\sqrt{3}\,.$$

Dakle, jednadžba pravca *BE* glasi:

$$y=-\left(2+\sqrt{3}\right)x+12+6\sqrt{3}\,.$$

Budući da je točka *S* presjek pravaca *AC* i *BE*, to su koordinate točke *S* rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{cases} y=x \\ y=-\left(2+\sqrt{3}\right)x+12+6\sqrt{3}\,. \end{cases}$$

Odavde, nakon kraćeg računanja, dobivamo:

$$y=3+\sqrt{3}\,,$$

te zbog $y = x$ slijedi $x=3+\sqrt{3}$ . Dakle, imamo da je $S\left(3+\sqrt{3},3+\sqrt{3}\right)$.

Sada imamo:

$$\left|MC\right|^2=\sqrt{\left(6-3\right)^2+\left(6-6-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\,,$$

$$\left|MS\right|^2=\sqrt{\left(3+\sqrt{3}-3\right)^2+\left(3+\sqrt{3}-6-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\,,$$

a odavde slijedi:

$$|MS| = |MC|,$$

što znači da je trokut $\Delta CMS$ jednakokračan, a to je i trebalo dokazati.

## Literatura


1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. A. Bašić, *Primena metode koordinata u planimetriji i stereometriji, 1. dio,* Nastava matematike, Društvo matematičara Srbije, Vol. LXI, Br. 4, Beograd, 2016
3. A. Marić, *Planimetrija – zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.
4. V. Stošić, *Planimetrija – Odabrani zadaci za osnovnu školu*, Element, Zagreb, 2017.