

SAVRŠENI DAN

Ljubica Bačić Đuračković, Vukovar i Vojislav Đuračković, Negoslavci



Što je za vas savršen dan? Možda dan kada ne radite ništa, kad ste na moru ili u planini s vama dragim ljudima? Što mislite, što je za matematičara savršen dan? Da bismo došli do odgovora na ovo pitanje, prisjetimo se prvo pojma djeljivosti.

Prirodan broj djeljiv je drugim prirodnim brojem ako se pri dijeljenju dobije da je količnik prirodni broj, a ostatak 0. Pri tome kažemo da je taj drugi prirodni broj djelitelj prvog prirodnog broja. Dakle, djelitelji nekog prirodnog broja oni su brojevi kojima je on djeljiv bez ostatka. Npr. broj 8 djeljiv je brojem 2 jer je količnik 4, a ostatak 0. Lako se onda vidi da broj 8 ima četiri djeljitelja: 1, 2, 4 i 8. No, koji su od njih pravi?

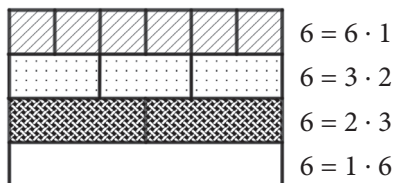
Pravi djelitelji nekog broja su svi djelitelji toga broja različiti od njega samog. To znači da su pravi djelitelji broja 8 brojevi 1, 2 i 4. Koji su pravi djelitelji broja 6? Uočavate li nešto zanimljivo?

Broj 6 ima četiri djelitelja: 1, 2, 3 i 6. Pravi su 1, 2 i 3. Koliko iznosi zbroj pravih djelitelja broja 6? To je upravo broj 6 jer je $1 + 2 + 3 = 6$. Ovakve su brojeve Pitagora i njegov učenci nazvali savršenim brojevima.

Savršeni broj je prirodan broj koji je je jednak zbroju svojih pravih djelitelja. Takvi su brojevi 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, 2305843008139952128... Sljedeći ima 37 znamenaka. Do 2014. godine pronađeno je 48 savršenih brojeva. Posljednji i najveći savršeni broj pronađen je 2013. godine i zapisuje se pomoću 34850340 znamenaka. Uočite da svi završavaju znamenkom 6 ili 8 pa su svi parni. Fibonacci je za određivanje savršenih brojeva koristio izraz

$$2^{p-1}(2^p - 1),$$

gdje je p prost broj. Zgodan je sljedeći prikaz savršenog broja 6.



Spomenimo neka zanimljiva svojstva savršenih brojeva.

1. Svaki savršeni broj može se prikazati u obliku zbroja više uzastopnih prirodnih brojeva, počevši od 1 do $2^p - 1$. Npr.

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

2. Zbroj recipročnih vrijednosti svih djelitelja savršenog broja jednak je broju 2. Npr.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2.$$

3. Osim broja 6, svi savršeni brojevi mogu se prikazati kao zbroj prvih $2^{\frac{p-1}{2}}$ kubova neparanih brojeva. Npr.

$$28 = 1^3 + 3^3.$$

Što je, dakle, za matematičara savršen dan? To je onaj dan u godini čiji datum u sebi sadrži savršene brojeve. Dakle, za matematičara je 28. lipnja tj. 28. 6. savršen dan. Šteta je samo što na taj dan više nema nastave. Možda bi se mogao organizirati savršen dan u školi te pozvati učenike i učitelje da zajedno rješavaju sljedeće zadatke:

1. Navedite sve djelitelje broja 496. Pokažite da je taj broj savršen.
2. Koji su sve djelitelji broja 8128? Je li taj broj zaista savršen?
3. Koliki je zbroj najmanjeg i najvećeg pravog djelitelja broja 8128?
4. Kolika je razlika najvećeg i najmanjeg pravog djelitelja broja 33550336?
5. Koliki je umnožak najmanjeg i najvećeg pravog djelitelja broja 8589869056?
6. Koliki je količnik najvećeg i najmanjeg pravog djelitelja broja 137438691328?
7. Sljedeće brojeve prikažite kao zbroj više uzastopnih prirodnih brojeva:
 - a) 28
 - b) 496
 - c) 8128.
8. Sljedeće brojeve prikažite kao zbroj kubova:
 - a) 496
 - b) 8128.
9. Pokažite da je zbroj recipročnih vrijednosti svih djelitelja savršenog broja 28 jednak broju 2.
10. Je li zbroj recipročnih vrijednosti svih djelitelja savršenog broja 496 jednak broju 2?



Literatura:

1. G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, Matematički izazovi 5, udžbenik iz matematike za peti razred, prvi dio, Alfa, Zagreb, 2014.
2. <https://www.opsteobrazovanje.in.rs/matematika/savršeni-brojevi/>
3. T. Novak, Mersennovi i savršeni brojevi, Završni rad, Osijek 2014.
4. J. Voight, Perfect numbers: An elementary introduction, dostupno na: <http://magma.maths.usyd.edu.au/~voight/notes/perfelem.pdf>

