# Jedna zanimljiva trigonometrijska nejednakost za trokut i njezina primjena

Šefket Arslanagić[1]

U ovom ćemo radu dati tri dokaza jedne zanimljive trigonometrijske nejednakosti za trokut, koja glasi:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{a}{b+c}, \tag{1}$$

gdje su $a$, $b$, $c$ dužine stranica toga trokuta, a $\alpha$ njegov unutrašnji kut, kao i nekoliko njezinih primjena.

**Dokaz 1**. Prvo ćemo izvesti formulu

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \tag{2}$$

gdje je $s$ poluopseg trokuta $\Delta ABC$.

Imamo poznatu jednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

iz koje, koristeći se kosinusovim teoremom za trokut $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, dobivamo:

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}\\ &= \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{4bc}}\\ &= \sqrt{\frac{4(s-b)(s-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\end{aligned}$$

a ovo je (2).

Zbog jednakosti (2) imamo da je

$$\sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{a}{b+c}$$

[1]Šefket Arslanagić, Sarajevo

ekvivalentno

$$\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \leq \frac{a}{b+c}.$$

Kvadriranjem gornje jednakosti dobivamo

$$\frac{(s-b)(s-c)}{bc} \leq \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 .$$

Daljnjim sređivanjem dobivamo sljedeće ekvivalentne nejednakosti:

$$\begin{aligned}
\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc} &\leq \frac{a^2}{(b+c)^2} \\
4a^2bc &\geq (b+c)^2 (a+c-b)(a+b-c) \\
4a^2bc &\geq \left(b^2+2bc+c^2\right)\left[a^2-(b-c)^2\right] \\
4a^2bc &\geq a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2-b^2(b-c)^2-2bc(b-c)^2-c^2(b-c)^2 .
\end{aligned}$$

Prebacivanjem svih članova na lijevu stranu i faktoriziranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
b^4+c^4+2a^2bc-a^2b^2-2b^2c^2-a^2c^2 &\geq 0 \\
\left(b^2-c^2\right)^2-a^2\left(b^2-2bc+c^2\right) &\geq 0 \\
(b-c)^2\left[(b+c)^2-a^2\right] &\geq 0 \\
(b-c)^2(b+c+a)(b+c-a) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Za posljednju nejednakost znamo da je točna jer je $(b-c)^2 \geq 0$ i $b+c>a$. Time je i nejednakost (1) dokazana.

Očigledno vrijede analogne nejednakosti:

$$\sin\frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{a+c} \tag{3}$$

i

$$\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{a+b} . \tag{4}$$

**Dokaz 2**. Koristeći se sinusovim teoremom za trokut dobivamo da je

$$\frac{a}{b+c} \geq \sin\frac{\alpha}{2}$$

ekvivalentno sljedećim nejednakostima:

$$\frac{2R\sin\alpha}{2R\sin\beta+2R\sin\gamma}\geq\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}\geq\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Iz adicijskih formula imamo

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\geq\sin\frac{\alpha}{2},$$

odnosno

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(90^0-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\geq 1,$$

što je dalje ekvivalentno

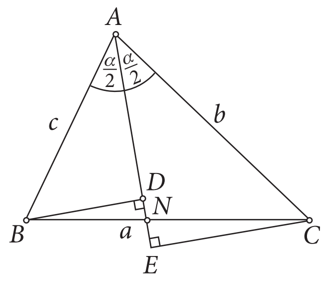
$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\geq 1$$

$$\frac{1}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\geq 1$$

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\leq 1\ .$$

Posljednja je nejednakost očigledno točna, što znači da je nejednakost (1) dokazana.

Vrijedi jednakost u (1), (3) i (4) ako i samo ako je $a=b=c$, tj. ako je u pitanju jednakostranični trokut.



**Dokaz 3**. Neka je u trokutu $\Delta ABC$ točka $N$ sjecište simetrale kuta $\alpha$ sa stranicom $\overline{BC}$, a točke $D$ i $E$ redom nožišta normala spuštenih iz točaka $B$ i $C$ na $AN$ (Slika 1).
Iz pravokutnih trokuta $\Delta ABD$ i $\Delta AEC$ imamo da je

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{|BD|}{|AB|}=\frac{|CE|}{|AC|},$$

a odavde je

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{|BD|}{|AB|}=\frac{|CE|}{|AC|}=\frac{|BD|+|CE|}{|AB|+|AC|}\leq\frac{|BN|+|CN|}{|AB|+|AC|}, \text{ tj.}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\leq\frac{|BC|}{|AB|+|AC|}$$

ili

$$\sin\frac{\alpha}{2}\leq\frac{a}{b+c}, \text{ q.e.d.}$$

Sada ćemo dati nekoliko primjera primjene nejednakosti (1), (3) i (4).
Nakon množenja nejednakosti (1), (3) i (4) dobivamo nejednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}. \tag{5}$$

Na osnovi nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine, imamo sljedeće nejednakosti:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},$$

$$\frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc},$$

$$\frac{a+c}{2}\geq\sqrt{ac},$$

a odavde, nakon njihova množenja,

$$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{8}\geq\sqrt{a^2b^2c^2}, \text{ tj.}$$

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8abc$$

te

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}\leq\frac{1}{8}. \tag{6}$$

Sada iz (5) i (6) slijedi nejednakost

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{8}. \tag{7}$$

Vrijedi jednakost u (7) ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, tj. za jednakostranični trokut.

Dat ćemo još dvije posljedice nejednakosti (7).

**Posljedica 1**. Vrijedi nejednakost

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}. \tag{8}$$

**Dokaz**: Koristeći se poznatom jednakosti

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

i nejednakosti (7), dobivamo da je

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le 1 + 4\cdot\frac{1}{8}, \text{ tj.}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}, \text{ q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (8) ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trokut.

**Posljedica 2**. Vrijedi nejednakost

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \ge \frac{3}{4}. \tag{9}$$

**Dokaz**: Koristeći se poznatom jednakosti

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\right)$$

i nejednakosti (8), tj. $-\frac{1}{2}\left(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma\right) \ge -\frac{3}{4}$, dobivamo:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \ge \frac{3}{2} - \frac{3}{4}, \text{tj.}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \ge \frac{3}{4}, \text{ q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (9) ako i i samo ako je u pitanju jednakostranični trokut.

**Napomena**: U [2] imamo nejednakost 2.9, s. 20 koja glasi:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{3}{2}.$$

## Literatura:


1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.
3. S. Mintaković, M. Franić, *Trigonometrija*, Element, Zagreb, 1999.