IZ NASTAVNE PRAKSE

Simulacije u nastavi vjerojatnosti

Marija Damijanić[1], Ivana Slamić[2]

Mnoge pojave iz svakodnevnog života mogli bismo zvati *slučajnima*. Mnoge od tih pojava htjeli bismo kontrolirati, na primjer, htjeli bismo predvidjeti prirodne katastrofe ili u poslovanju kontrolirati gubitke i smanjiti rizik. Intuitivno, svakoj je osobi jasno što predstavlja vjerojatnost pa bismo tako, već prema intuiciji, rekli da ukoliko nasumično odgovaramo na pitanje s dva ponuđena odgovora od kojih je samo jedan točan, „imamo 50 % šanse" da na to pitanje odgovorimo točno. *Teorija vjerojatnosti* je grana matematike koja se razvila iz potrebe za modeliranjem slučajnih pojava, u svrhu boljeg razumijevanja, kontroliranja te mogućeg predviđanja ponašanja u budućnosti. To je dio matematike s velikom primjenom u prirodnim, ali i društvenim znanostima, na primjer u medicini, fizici, biologiji, sociologiji, ekonomiji i drugdje. Iz tog je razloga važno da su teme iz vjerojatnosti zastupljene na svim razinama obrazovanja. Međutim, praksa pokazuje da učenici teško savladavaju gradivo teorije vjerojatnosti, a poteškoće s kojima se učenici najčešće susreću su sljedeće:

- primjena formule bez razumijevanja dobivenih rezultata,
- neuspješno izračunata vjerojatnost nekog događaja zbog nepoznavanja činjenica iz područja kombinatorike,
- nerazumijevanje veze između relativnih frekvencija dobivenih na temelju velikog broja pokusa i izračunate vjerojatnosti nekog događaja,
- nepouzdana procjena vjerojatnosti nekog događaja dobivena na temelju malog broja slučajnih pokusa.

Jedan od razloga zbog kojeg se ovakve poteškoće javljaju je taj što se proces učenja kod velikog dijela učenika često sastoji samo od pamćenja i primjene pravila bez dubljeg razumijevanja osnovnih koncepata. Ako se složimo da je vjerojatnost dio matematike s izrazito širokom primjenom i pojam koji je intuitivno blizak svakome, postavlja se pitanje koji je to trenutak u kojem gradivo koje bi učenici trebali učiti s posebnim interesom postaje nezanimljivo, daleko i teško.

Danas je gradivo vjerojatnosti moguće upotpuniti na različite načine primjenom računala, budući da mnogi računalni programi imaju opciju generiranja slučajnih

[1]Marija Damijanić, Gimnazija i strukovna škola Jurja Dobrile Pazin
[2]Ivana Slamić, Sveučilište u Rijeci, Odjel za matematiku

brojeva. Provođenjem eksperimenata, učenici mogu bolje razumjeti pojam vjerojatnosti, sami izvoditi zaključke i postavljati pitanja. Time učenik postaje aktivan subjekt procesa učenja jer samostalno sudjeluje, zaključuje i analizira u suradnji s drugim učenicima, razvija kritičko mišljenje i stječe nova znanja. Tako stečena znanja trajnija su i primjenjivija od znanja stečenih klasičnim načinom poučavanja, ona se mogu dalje unapređivati te pobuđuju radoznalost i motiviranost za daljnji nastavak obrazovanja. U takvom okruženju uloga nastavnika jest voditi, poticati i usmjeravati učenika, a nastavne metode i oblike rada prilagoditi učenicima.

Cilj ovog članka je ilustrirati moguću primjenu računala na nekoliko primjera riješenih pomoću programa *MS Excel*. Članak je nastao na temelju diplomskog rada *„Primjena računala u poučavanju vjerojatnosti i statistike u srednjoj školi”,* [3]. Upotrebom tehnologije žele se postići sljedeći ciljevi nastave:

- bolje razumijevanje pojma vjerojatnosti uočavanjem veze relativne frekvencije i vjerojatnosti, kao i važnosti velikog broja ponavljanja pokusa,
- upoznavanje s različitim načinima na koje se mogu koristiti računalni programi za izračun vjerojatnosti i povezivanje gradiva s primjerima iz svakodnevnog života,
- poticanje razvoja općih kompetencija učenika kao što su: zainteresiranost za samostalna otkrića, sudjelovanje u timskom radu, kreativnost putem osmišljavanja različitih primjera, modeliranje problema iz svakodnevnog života.

Monte Carlo metoda je postupak kojim se pomoću velikog broja simulacija slučajnih pokusa nastoji predvidjeti ponašanje složenih problema čija se rješenja ne mogu odrediti analitički te stoga ima veliku primjenu u različitim područjima, kao što su fizika, kemija, ekonomija i financije. Mogući rezultati eksperimenta ispituju se na temelju slučajnih brojeva generiranih računalom. No, ako znamo da te brojeve generira računalo, prirodno se javlja pitanje: mogu li takvi brojevi uistinu biti *slučajni*? I ta je sumnja točna – ti su brojevi dobiveni primjenom odgovarajućeg algoritma. Međutim, pojam slučajnosti mnogo je složeniji nego što mislimo i mnoge od pojava na koje smo pomislili čitajući prvu rečenicu smatramo slučajnima samo iz razloga što nemamo potpunu informaciju o njima. Tako bi, primjerice, velik dio ljudi uočio da se brojevi 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 odnosno 1, 11, 6, 9, 7, 8, 7 javljaju prema određenom pravilu pa bi vjerojatno zaključili da ti brojevi nisu generirani *slučajno*, za razliku od primjera 7, 16, 19, 33, 27, 35, 10, gdje bi teže uočili pravilo. S druge strane, izvlačimo li nasumično listiće s brojevima od 1 do 35, vjerojatnosti da bude izvučena kombinacija brojeva kao u prvom, odnosno kao u trećem nizu su jednake. Stoga je, promatrajući neki niz brojeva, vrlo teško reći je li on zaista nastao *slučajno*. Ipak, razumno je smatrati slučajnim nešto što posjeduje određena svojstva temeljena na zakonima teorije vjerojatnosti. Brojevi generirani računalom koje ćemo koristiti nazivaju se *pseudoslučajni brojevi* i bez obzira na to što nisu nastali „slučajno” nego su rezultat algoritma, oni po nekim svojim karakteristikama u dovoljnoj mjeri odgovaraju nizu „pravih” slučajnih brojeva, a te su karakteristike temeljene na svojstvima uniformne razdiobe.

Za nastavak rada i na razini srednje škole nije potrebno dublje razumijevanje ovog pojma kao ni svojstava algoritama u pozadini.

Monte Carlo simulacije u nastavi matematike mogu se primijeniti za eksperimentalno određivanje vjerojatnosti nekog događaja kao relativne frekvencije pojavljivanja tog događaja, što je opravdano *Zakonom velikih brojeva*. Prisjetimo se Zakona velikih brojeva na primjeru slučajnog pokusa bacanja igraće kocke i događaja: „pala je šestica". U ovom slučaju, interpretacija Zakona velikih brojeva je sljedeća: ako se bacanja kocke izvode uz jednake uvjete i ne ovise jedno o drugom, tada će relativna frekvencija događaja „pala je šestica" za dovoljno velik broj bacanja biti približno jednaka 1/6, što predstavlja vjerojatnost tog događaja. No, ova metoda ne mora samo služiti za izračun vjerojatnosti, kao što ćemo vidjeti u petom primjeru. Između ostalog, slučajni brojevi mogu poslužiti za računanje površine lika (na primjer, omeđenog elipsom), a ova metoda može se koristiti i za složenije projekte.

Primjer 1. Bacanje dvije igraće kocke.

Simulirajmo bacanje dvije igraće kocke 10, 100, 1000, odnosno 10000 puta pomoću računalnog programa *MS Excel* te bilježimo koliko se često ostvaruju sljedeći događaji:

A =„oba dobivena broja na kockama su parna",

B =„zbroj dobivenih brojeva manji je od 9",

C =„umnožak dobivenih brojeva djeljiv je s 5."

Postupak provođenja simulacija:

(1) Simulirat ćemo bacanje dvije igraće kocke 10000 puta (na primjer, u stupcu A za prvu kocku, a u stupcu B za drugu kocku).

Naredba za simulaciju jednog bacanja jedne kocke glasi: **=RANDBETWEEN(1;6).**

Primjenom ove naredbe, svi cijeli brojevi u rasponu od 1 do 6 imaju jednaku vjerojatnost pojave, što odgovara slučajnom pokusu bacanja igraće kocke. Navedenom naredbom dobije se rezultat jednog bacanja jedne igraće kocke. Kako bi se dobili rezultati velikog broja bacanja, tu je naredbu potrebno kopirati pomoću miša do odgovarajućeg retka Excel tablice. Nakon što u stupcu A dobijemo ishode za prvu kocku, postupak ponovimo u stupcu B.

(2) U sljedećem slobodnom stupcu potrebno je primjenom IF naredbe provjeriti jesu li oba dobivena broja parna (odnosno provjerava se je li ostvaren događaj A) te se ispisuje odgovarajuća poruka („DA", odnosno „NE"). Broj je paran ako pri dijeljenju s dva daje ostatak nula. Naredba MOD(broj1;broj2) ispisuje ostatak pri dijeljenju broj1 s broj2.

Naredba glasi: **=IF(AND(MOD(A2;2)=0;MOD(B2;2)=0);"DA";"NE").**

Tom se naredbom uvjet zadatka provjerava samo za jedan slučajni pokus bacanja dvije igraće kocke te ga je potrebno kopirati i u ostale redove.

(3) U idućem slobodnom stupcu, primjenom naredbe COUNTIF prebrojeno je koliko puta je događaj A ostvaren u prvih 10, 100, 1000, odnosno 10000 „bacanja kocki".

Naredba za prebrojavanje u prvih 100 bacanja kocki glasi: **=COUNTIF(C2:C101;"DA").**

(4) Kako bismo provjerili koliko se puta ostvario događaj B, za svako bacanje zbroje se brojevi koji se pojave na prvoj i drugoj kocki primjenom naredbe SUM te se rezultati upišu u idući slobodni stupac.

Naredba glasi: **=SUM(A2:B2)** ili **=A2+B2.**

(5) Potom se primjenom IF naredbe provjeri je li dobiveni zbroj manji od broja 9 te se ispiše odgovarajuća poruka („DA", odnosno „NE").

Naredba glasi: **=IF(G2<9;"DA"; "NE").**

(6) U idućem slobodnom stupcu primjenom naredbe COUNTIF prebrojeno je koliko puta je događaj B ostvaren u prvih 10, 100, 1000, odnosno 10000 „bacanja kocki". Za umnožak brojeva na prvoj i drugoj kocki koristi se naredba PRODUKT, a potom se korištenjem naredbe MOD može provjeriti je li dobiveni broj djeljiv s 5 (tj. provjerava se je li ostvaren događaj C) te se primjenom IF naredbe ispiše odgovarajuća poruka („DA", odnosno „NE").

Naredbe glase: **= PRODUKT(A2:B2)** ili **= A2*B2; =IF(MOD(L2;5)=0;"DA";"NE").**

(7) Primjenom naredbe COUNTIF, potrebno je prebrojati koliko puta je ostvaren događaj C.

Pri određivanju je li umnožak dobivenih brojeva djeljiv s pet, može se razmišljati i na drugačiji način. Naime, umnožak dvaju brojeva bit će djeljiv s 5 ako je barem jedan od njih djeljiv brojem 5. Budući da se na kocki pojavljuju brojevi manji od broja šest, kako bi se ostvario događaj C, potrebno je da se pojavi barem jedna petica pa se u skladu s tim postavi odgovarajući uvjet.

U ovom primjeru, primjenom računala želimo istaknuti vezu vjerojatnosti i relativne frekvencije. Primjenom naučenih pravila, računski se dobiju vjerojatnosti promatranih događaja: P(A)=0.25, P(B)=0.7222, P(C)=0.305555. Tablica 1 prikazuje frekvencije i relativne frekvencije za svaki promatrani događaj u prvih 10, 100, 1000 i 10000 bacanja dvije kockice. Usporedimo li relativne frekvencije iz tablice 1 sa izračunatim vjerojatnostima, možemo uočiti da se za veći broj pokusa relativne frekvencije svakog događaja sve više „približavaju" vrijednosti koja predstavlja vjerojatnost tog događaja. Pritiskom na tipku F9, dobili bismo relativne frekvencije za novih 10, 100, 1000, odnosno 10000 bacanja. Ponavljanjem postupka, mogli bismo uočiti da dobivamo različite vrijednosti, ali te će vrijednosti za velik broj bacanja (1000 i 10000) uvijek biti vrlo blizu izračunatim vjerojatnostima.

Tablica 1. Rezultati provođenja slučajnog pokusa bacanja dvije igraće kocke

Događaj	Broj bacanja kockica	Frekvencija	Relativna frekvencija
„oba dobivena broja na kockama su parna"	10	3	0.3
	100	24	0.24
	1000	251	0.251
	10000	2536	0.2536
„zbroj dobivenih brojeva manji je od 9",	10	7	0.7
	100	84	0.84
	1000	733	0.733
	10000	7184	0.7184
„umnožak dobivenih brojeva djeljiv je s 5."	10	4	0.4
	100	31	0.31
	1000	303	0.303
	10000	3058	0.3058

Provođenjem opisane aktivnosti na nastavi matematike može se postići bolje razumijevanje pojma vjerojatnosti. Pritom je potrebno naglasiti da se na temelju malog broja provođenja slučajnog pokusa ne mogu donijeti ispravni zaključci o vjerojatnosti nekog događaja. Isto tako, bitno je znati da na temelju vjerojatnosti ne možemo predvidjeti ishod jednog bacanja, bez obzira je li to prvo ili 100001. bacanje kockica. Međutim, ukoliko se kockice bacaju velik broj puta te znamo koliko iznosi vjerojatnost promatranog događaja, tada će broj ostvarivanja tog događaja biti približno jednak umnošku izračunate vjerojatnosti i ukupnog broja ponavljanja pokusa. Relativan je pojam što je veliko, a što malo te je to primjedba koja većini učenika najčešće nije jasna. Simulacije pomažu kako bi učenici uvidjeli da je aproksimacija vjerojatnosti nekog događaja bolja što veći broj puta ponavljamo pokus (veći broj slučajnih pokusa → precizniji rezultat). Također mogu shvatiti da će odgovor na pitanje što je dovoljno velik broj ovisiti o zadatku i o tome koliku preciznost želimo.

Primjer 2. Igra s kockama

Promotrimo sada igru s kockicama u kojoj su pravila postavljena na sljedeći način:

- igrač baca tri igraće kocke čije strane su označene brojevima od 1 do 6;
- ako zbroj dobivenih brojeva na kockama iznosi 7 ili 11, igrač pobjeđuje;
- ako zbroj dobivenih brojeva na kockama iznosi 3, 4, 5, 16, 17, ili 18, igrač gubi;
- za bilo koji drugi ishod igrač ponovno baca kockice te se igra nastavlja na prethodno opisani način.

Postavlja se pitanje koliko iznosi vjerojatnost da će igrač pobijediti.

Zadatak možemo riješiti tako da uočimo da se pobjeda dogodi ako se dogodi neki od događaja P, IP, IIP, IIIP..., gdje P označava pobjedu, a I ishod „igraj ponovno". Nakon što izračunamo da je vjerojatnost da se dogodi pobjeda prilikom jednog bacanja (odnosno da je suma na kockicama 7 ili 11) jednaka $\frac{42}{216}$, a vjerojatnost ishoda „igraj ponovno" jednaka $\frac{154}{216}$, vjerojatnost pobjede u igri biti će jednaka

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{42}{216}\left(\frac{154}{216}\right)^{j} = \frac{42}{216} \cdot \frac{1}{1-\frac{154}{216}} \approx 0.0,6774\,.$$

Primjenom Zakona velikih brojeva, vjerojatnost pobjede može se približno izračunati ponavljanjem igre velik broj puta, pri čemu za aproksimaciju uzimamo omjer broja povoljnih ishoda (pobjeda) i ukupnog broja odigranih igri. U nastavku je opisan postupak provođenja simulacije igre pomoću programa *MS Excel.*

(1) Generirajmo broj od 1 do 6 naredbom RANDBETWEEN(1;6). Budući da se u igri pojavljuju tri kocke, tu je naredbu potrebno ponoviti u tri različita stupca jedan do drugog (npr. u ćelije A2, B2, C2). Simulirajmo sada 50 takvih bacanja, tako da se rezultati prve kockice nalaze u ćelijama A2-A51.

(2) U jednom od slobodnih stupaca (na primjer, u stupcu E), primjenom funkcije SUM potrebno je zbrojiti brojeve koji su se pojavili na kockama.

Naredba glasi: **=SUM(A2:C2).**

(3) U idućem slobodnom stupcu, na primjer F, primjenom IF naredbe provjeravaju se uvjeti koje igrač mora zadovoljiti za pobjedu, gubitak ili ponovno bacanje kocki te se ispiše odgovarajuća poruka. Više različitih uvjeta za pobjedu, odnosno gubitak navodi se uz pomoć logičkog operatora OR.

Naredba glasi:

=IF(OR(E2=7;E2=11);"POBJEDA";IF(OR(E2=3;E2=4;E2=5;E2=16;E2=17;E2=18); "GUBITAK"; "IGRAJ PONOVNO")).

(4) Primjenom naredbe COUNTIF, na primjer u ćeliji H2, prebroji se ukupan broj pobjedi, odnosno gubitaka.

Naredba glasi: **=COUNTIF(F2:F51;„POBJEDA")**

(5) Svakim pritiskom na tipku F9, provode se nove simulacije. Naredba *Data Table* omogućava da ovaj postupak provedemo koliko god puta želimo te da u svakom koraku pamtimo broj pobjeda. Uočimo da svako takvo ponavljanje znači da ili nastavljamo igru u retku gdje smo dobili vrijednost „IGRAJ PONOVNO", ili pokrećemo novu igru u recima gdje smo dobili preostale dvije vrijednosti. Ako želimo

taj postupak provesti 5000 puta, u neki slobodni stupac upisat ćemo vrijednosti od 1-5000 (to se može napraviti jednostavno pomoću naredbe *Fill Series* koja se nalazi u izborniku koju otvara klik desnom tipkom miša). Recimo da smo te brojeve upisali u ćelije I2-I5001. Sada u ćeliju J2 napišemo vrijednost =H2 kako bi se pamtio broj pobjeda. Nakon toga, obuhvatimo ćelije I2-I5001, J2-J5001 te pokrenemo naredbu *Data Table* (koja se nalazi pod *Data* → *What-If Analysis*). Sada na mjesto *Column Input Cell* stavimo vrijednost bilo koje slobodne ćelije.

(6) U ćelijama J2-J5001 nalazit će se broj pobjeda za svako od ponovljenih 50 bacanja kockica. Ukupan broj pobjeda biti će jednak zbroju svih vrijednosti u tom stupcu, što dobijemo naredbom =SUM(J2:J5001).

(7) Potrebno je još pronaći broj odigranih igri. Uočimo da igra staje kad dobijemo vrijednosti „POBJEDA" ili „GUBITAK". To znači da ćemo morati za svako od 50 bacanja pamtiti koliko puta se dogodila pobjeda ili gubitak, pa ćemo još jednom morati primijeniti naredbu *Data Table* na način da u K2 napišemo vrijednost =H3, a na mjesto H3 ukupan broj gubitaka, tj. naredbu =COUNTIF(F2:F51;„GUBITAK"). U L2 stavimo naredbu =SUM(J2;K2) kako bismo dobili ukupan broj pobjeda i gubitaka.

(8) Nakon što smo izračunali ukupan broj odigranih igara (N6) te broj pobjeda (N5), izračunamo omjer te dvije veličine (N7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	1. kocka	2. kocka	3. kocka		Zbroj	Rezultat				Pobjede	Gubici	Pobjede+gubici			
2	6	4	3		13	IGRAJ PONOVNO		12	1	12	2	14			
3	3	1	4		8	IGRAJ PONOVNO		2	2	9	3	12			
4	5	5	2		12	IGRAJ PONOVNO			3	8	5	13			
5	5	4	2		11	POBJEDA			4	11	1	12		48553	
6	2	5	1		8	IGRAJ PONOVNO			5	12	5	17		71639	
7	3	2	5		10	IGRAJ PONOVNO			6	15	3	18		0,677745	
8	6	6	3		15	IGRAJ PONOVNO			7	11	4	15			
9	5	4	4		13	IGRAJ PONOVNO			8	14	4	18			
10	2	4	6		12	IGRAJ PONOVNO			9	8	6	14			
11	2	3	3		8	IGRAJ PONOVNO			10	7	5	12			
12	3	2	2		7	POBJEDA			11	9	6	15			
13	3	4	4		11	POBJEDA			12	11	5	16			
14	1	1	6		8	IGRAJ PONOVNO			13	10	6	16			
15	5	6	3		14	IGRAJ PONOVNO			14	13	4	17			
16	3	1	2		6	IGRAJ PONOVNO			15	10	6	16			
17	4	1	5		10	IGRAJ PONOVNO			16	14	1	15			
18	2	3	2		7	POBJEDA			17	17	4	21			
19	4	2	6		12	IGRAJ PONOVNO			18	12	2	14			
20	1	2	4		7	POBJEDA			19	10	1	11			
21	4	5	2		11	POBJEDA			20	7	2	9			
22	1	6	5		12	IGRAJ PONOVNO			21	4	7	11			
23	3	6	3		12	IGRAJ PONOVNO			22	9	6	15			

Sheet1

Slika 1. Rezultati simulacija

Ovakvu igru s kockicama možemo modificirati na različite načine. Još zahtjevniji zadatak bio bi kada bismo postupak u četvrtoj točki (slučaj „igraj ponovno") zamijenili sa sljedećim:

- za bilo koji dobiveni ishod igrač igra ponovno, pri čemu uvjeti za pobjedu, gubitak i ponovno bacanje ostaju isti, osim što igrač pobjeđuje još i u slučaju da dobije sumu koja se pojavila prilikom prvog bacanja.

Ovakvu igru možemo simulirati tako da u prva tri stupca generiramo brojeve od 1 do 6, a u stupcu E računamo sumu te bilježimo koji ishod se dogodio – „pobjeda", „gubitak" ili „igraj ponovno". U sljedećem retku simuliramo ponovljeno bacanje ukoliko se u prvom dogodio ishod „igraj ponovno". U ovom retku također mijenjamo uvjet za pobjedu. Nakon toga, kopirat ćemo naredbe do određenog retka što će predstavljati ponovljena bacanja do ishoda „pobjeda" ili „gubitak" (dovoljno je, na primjer, uzeti 100 redaka jer je vjerojatnost da se 100 puta zaredom dogodi ishod „igraj ponovno" vrlo mala i ukoliko bi se i javio takav događaj, ne bi bitno utjecao na rezultat). Sada je za svaku takvu igru bitno pamtiti je li krajnji rezultat pobjeda ili gubitak. Postupak ponavljamo pomoću naredbe Data Table, simulirajući, na primjer, 10000 takvih igara te, na temelju broja pobjeda u tih 10000 igara, procijenimo vjerojatnost pobjede. Detalje ostavljamo čitatelju, a jedan takav postupak prikazan je na Slici 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	N	O	P	Q	R
1	1.kockica	2. kockica	3. kockica		suma	pobjeda	gubitak	igraj ponovno			Igra	Pobjeda u igri			
2	5	3	1		9	FALSE	FALSE	TRUE			1	1		Broj pobjeda	Rel. frek.
3	6	5	4		15	FALSE	FALSE	TRUE		1	2	1		7345	0,7345
4	2	4	1		7	TRUE	FALSE	FALSE			3	1			
5					0	FALSE	FALSE	FALSE			4	1			
6					0	FALSE	FALSE	FALSE			5	1			
7					0	FALSE	FALSE	FALSE			6	1			
8					0	FALSE	FALSE	FALSE			7	0			
9					0	FALSE	FALSE	FALSE			8	0			
10					0	FALSE	FALSE	FALSE			9	1			
11					0	FALSE	FALSE	FALSE			10	1			
12					0	FALSE	FALSE	FALSE			11	0			
13					0	FALSE	FALSE	FALSE			12	1			
14					0	FALSE	FALSE	FALSE			13	1			
15					0	FALSE	FALSE	FALSE			14	1			
16					0	FALSE	FALSE	FALSE			15	1			
17					0	FALSE	FALSE	FALSE			16	0			
18					0	FALSE	FALSE	FALSE			17	1			
19					0	FALSE	FALSE	FALSE			18	1			
20					0	FALSE	FALSE	FALSE			19	1			
21					0	FALSE	FALSE	FALSE			20	1			
22					0	FALSE	FALSE	FALSE			21	1			
23					0	FALSE	FALSE	FALSE			22	1			

Sheet1

Slika 2. Relativna frekvencija pobjede izračunata na temelju 10000 igara

Primjer 3. Igra s novčićima

Osmišljena igra sastoji se u sljedećem. Igrač baca pet simetričnih novčića. Nakon prvog bacanja ponovno baca one novčiće koji pokazuju pismo. Igrač osvaja nagradu ako novčići nakon drugog bacanja zadovoljavaju određeni uvjet. Neki od uvjeta za pobjedu su sljedeći:

- prilikom drugog bacanja novčića past će 3 grba,
- prilikom drugog bacanja novčića past će manje od 3 pisma,
- prilikom drugog bacanja novčića past će manje pisma nego grbova.

Koristeći se računalnim programom *MS Excel*, prikažimo opisanu igru na sljedeći način.

(1) Bacanje pet simetričnih novčića simuliramo naredbom RANDBETWEEN(0;1) koju upišemo u pet različitih ćelija u istom retku, pri čemu 0 predstavlja pojavu grba, a 1 pojavu pisma. Vjerojatnosti pojave pisma (tj. 1) i grba (tj. 0) su jednake i iznose 0.5.

(2) U nekom od slobodnih stupaca (na primjer, G do K) primjenom IF naredbe vrši se provjera koji novčići pokazuju pismo (odnosno 1) te se oni „bacaju” ponovno na već opisani način.

Naredba glasi: **=IF(A3=1;RANDBETWEEN(0;1);” “).**

(3) Primjenom COUNTIF naredbe prebrojava se koliko novčića pokazuje pismo nakon drugog bacanja, a koliko ih pokazuje grb te se rezultat pohranjuje u neki od slobodnih stupaca.

Naredba za prebrojavanje pisma glasi: **=COUNTIF(G3:K3;1).**

(4) Primjenom IF naredbe provjerava se je li zadovoljen neki od navedenih uvjeta za pobjedu te se ispiše odgovarajuća poruka.

Naredba za provjeru trećeg uvjeta igre glasi: **=IF(M5<N5; “DA”; “NE”).**

(5) Na temelju jedne odigrane igre ne može se predvidjeti vjerojatnost pobjede pa je i u ovom primjeru opisani postupak potrebno napraviti velik broj put. To se napravi kopiranjem napisanih formula pomoću miša iz prvog retka do, na primjer, 1000. retka.

(6) U nekom od slobodnih stupaca primjenom naredbe COUNTIF može se prebrojiti koliko puta je zadovoljen svaki od navedenih uvjeta u prvih 10, 100, odnosno 1000 „bacanja novčića”. Zatim se za svaki uvjet izračuna relativna frekvencija pobjede, odnosno omjer broja pobjeda i ukupnog broja odigranih igri.

Iz tablice 3. može se uočiti da se manje od tri pisma u drugom bacanju pojavljuje mnogo puta, dok se tri grba pojavljuju vrlo rijetko.

Tablica 2. Rezultati provođenja igre s novčićima 1000 puta

Događaj	Broj odigranih igri	Frekvencija	Relativna frekvencija
„prilikom drugog bacanja novčića past će 3 grba”	10	0	0
	100	8	0.08
	1000	93	0.093
„prilikom drugog bacanja novčića past će manje od 3 pisma”	10	1	0.1
	100	93	0.93
	1000	897	0.897
„prilikom drugog bacanja novčića past će manje pisma nego grbova”	10	0	0
	100	38	0.38
	1000	376	0.376

Tražene vjerojatnosti mogu se izračunati primjenom formule potpune vjerojatnosti. Vjerojatnosti pobjede za svaki od navedenih uvjeta redom iznose 0.0879, 0.8965, 0.377. Iz tablice vidimo da su za provedenu simulaciju relativne frekvencije promatranih događaja već za 1000 igara vrlo blizu tim vrijednostima, a pritiskom na tipku F9 možemo dobiti aproksimacije za novih 1000 igara.

Primjer 4. Rođendanski paradoks

Problem rođendana ili *rođendanski paradoks* jedan je od poznatih problema koji se pojavljuje u teoriji vjerojatnosti. Riječ je o sljedećem. Pitamo se kolika je vjerojatnost da će u grupi od $n(n \in \mathbb{N})$ ljudi barem dvije osobe imati rođendan na isti datum (bez obzira na godinu rođenja). Radi jednostavnosti računanja, pretpostavimo da promatrana godina nije prijestupna te da u odabranoj grupi ljudi ne postoje blizanci. Promatrajmo grupu od 23 ljudi, tj. neka je $n = 23$. Zanima nas kolika je vjerojatnost da će barem dvije osobe iz odabarane grupe imati rođendan isti datum. Primjenom znanja iz teorije vjerojatnosti i kombinatorike, može se izračunati da tražena vjerojatnost iznosi 0.507297. Izračunamo približno vjerojatnost pomoću programa *MS Excel*.

(1) Napravimo listu od 23 slučajno odabranih datuma primjenom naredbe **=RANDBETWEEN(DATE(2019;1;1),DATE(2019;12;30)).** Ti se datumi mogu pohraniti, primjerice unutar istog retka u raspon ćelija A2 –W2.

(2) Provjerimo ponavlja li se neki od generiranih datuma barem dva puta. Provjera se može izvršiti u rasponu ćelija Z2 – AV2 primjenom IF naredbe oblika: **=IF(COUNTIF($A2:A5;A5)>1; "Duplikat"; "OK").** Navedena naredba nam omogućava da se u zadanom rasponu ćelija (na primjer, $A2-A5) prebrojava (naredba COUNTIF) koliko puta je došlo do ponavljanja određene vrijednosti (na primjer, datum koji je pohranjen u ćeliju A5) te se ispisuje odgovarajuća poruka. Kada se neki datum ponovi više od jednom (tj. kada je zadovoljen uvjet COUNTIF($A2:A5;A5)>1) dobiva se poruka „Duplikat", a inače „OK" što označava da je u određenom rasponu promatrani datum jedinstven. Oznaka $A2 znači da je adresa stupca A apsolutna, a adresa retka 2 relativna. Takva adresa nam omogućuje da kopiranjem naredbi u nove ćelije fiksiramo oznaku stupca, a mijenjamo broj retka. Na taj se način datum iz svake ćelije (jednog retka) usporedi sa svim ostalim datumima tog retka počevši od datuma koji je pohranjen u stupcu A.

(3) Bitno je zaključiti da samo na osnovi jedne liste datuma ne možemo predvidjeti traženu vjerojatnost. Potrebno je napraviti što veći broj lista po 23 slučajno generiranih datuma koji predstavljaju rođendane 23 različite osobe. Napravimo 1000 grupa po 23 osobe kopiranjem formule povlačenjem miša iz prvog retka do 1000. retka te promotrimo koliko ima povoljnih lista za prvih 10, 100, odnosno 1000 grupa ljudi. Broj povoljnih lista može se prebrojati naredbom COUNTIF. Povoljna lista je ona lista koja sadrži barem dva jednaka datuma (odnosno ona koja sadrži „Duplikat").

(4) Iz prikupljenih podataka, računa se omjer broja povoljnih lista i ukupnog broja generiranih listi. Na Slici 3. prikazan je jedan dio provedene simulacije.

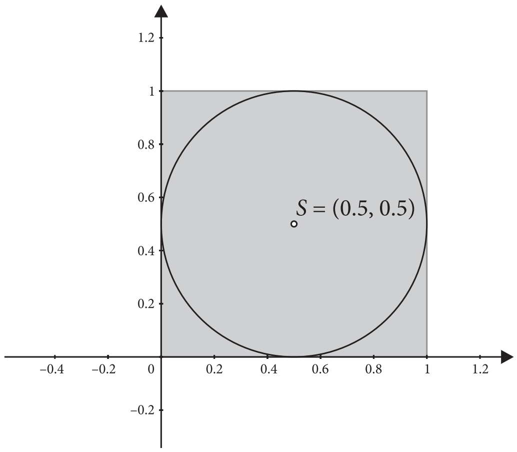
10.12.2019	3.1.2019	6.8.2019	13.11.2019		OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
28.4.2019	10.10.2019	3.10.2019	24.9.2019		OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
9.4.2019	18.9.2019	13.8.2019	14.6.2019		OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
13.2.2019	9.4.2019	21.1.2019	20.6.2019		OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
3.3.2019	6.9.2019	9.11.2019	10.4.2019		OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
11.5.2019	1.5.2019	7.5.2019	11.4.2019		OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
21.6.2019	26.6.2019	31.1.2019	1.12.2019		OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
8.3.2019	4.5.2019	2.2.2019	18.6.2019		OK	OK	OK	OK	OK	OK	OK
23.8.2019	7.4.2019	21.11.2019	28.8.2019		OK	OK	OK	OK	OK	Duplikat	OK
		Broj povoljnih lista	Relativa frekvencija								
	Prvih 10	6	0,6								
	Prvih 100	53	0,53								
	Prvih 1000	494	0,494								

Slika 3. Prikaz rođendanskog paradoksa pomoću Excela

Sa Slike 3. vidi se da je od 10 grupa ljudi 6 povoljnih, od 100 grupa 53 povoljnih, dok je od njih 1000, 494 grupa povoljna. Na opisani način može se provesti taj eksperiment s proizvoljno velikom grupom ljudi proizvoljan broj puta. Zaključak bi trebao biti da, što je broj ljudi veći, tražena vjerojatnost raste.

Primjer 5. Aproksimacija broja π.

Približna vrijednost broja π može se odrediti primjenom Monte Carlo simulacija pomoću programa *Excel* na sljedeći način. Promatrajmo kvadrat sa stranicom duljine $2r$, $r > 0$, koji je smješten u pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Površina takvog kvadrata iznosi $4r^2$ kvadratnih jedinica. U konstruirani se kvadrat upiše krug radijusa r kako je prikazano na Slici 4.



Slika 4. Kvadrat s upisanim krugom

Površina tog kruga iznosi $r^2\pi$ kvadratnih jedinica. Nadalje, omjer površina jednak je $\frac{r^2\pi}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$. Taj omjer predstavlja vjerojatnost da će neka točka iz promatranog kvadrata pripadati upisanom krugu te se može dobiti eksperimentom na sljedeći način. Unutar konstruiranog kvadrata odabere se velik broj različitih točaka (na primjer, 1000 i više) te se prebroje one koje su pale unutar kruga. Tada je vjerojatnost da će točka pripadati krugu približno jednaka omjeru broja točaka koje se nalaze unutar kruga (oznaka: n) i ukupnog broja točaka unutar kvadrata (oznaka: N). Ako izjednačimo te dvije veličine, dobivamo:

$$\frac{n}{N} \approx \frac{\pi}{4}, \text{ tj. } \pi \approx 4\frac{n}{N},$$

i to nam daje aproksimaciju broja π.

Opisani se eksperiment može provesti pomoću programa *MS Excel* na sljedeći način.

(1) Svaka točka u koordinatnom sustavu određena je uređenim parom brojeva (x, y). Budući da promatrane točke moraju pripadati kvadratu (na primjer, sa stranicom duljine 1), možemo staviti da su x i y slučajni brojevi iz segmenta $[0, 1]$ koji se mogu generirati primjenom naredbe RAND() (u stupcu A za broj x, a u stupcu B za broj y).

(2) Krug koji je upisan u promatrani kvadrat ima radijus 0.5, a središte mu je u sjecištu dijagonala kvadrata (točka s koordinatama (0.5, 0.5), odnosno to je skup točaka (x, y) čije koordinate zadovoljavaju nejednadžbu $(x-0.5)^2+(y-0.5)^2 \leq 0.25$. Taj uvjet provjerit ćemo primjenom IF naredbe te ispisati odgovarajuću poruku.

Naredba glasi: **IF((A2-0,5)^2+(B2-0,5)^2<=0,25;"DA";"NE").**

(3) Kako bi se dobila što preciznija aproksimacija broja π, opisani postupak potrebno je ponoviti velik broj puta (na primjer, 1000 ili više) kopiranjem napisanih naredbi u nove retke Excel tablice.

(4) Primjenom naredbe COUNTIF, mogu se prebrojati točke koje pripadaju krugu.

Na Slici 5. je prikazan jedan dio provedenog eksperimenta prilikom kojeg dobivena aproksimacija broja π iznosi 3,136.

x	y	UNUTAR KRUGA?	BROJ TOČAKA UNUTAR KRUGA	APROKSIMACIJA BROJA PI
0,343616	-0,0887	DA	1568	3,136
0,473457	-0,2991	NE	UKUPAN BROJ TOČAKA	
-0,1852	-0,14583	DA	2000	
0,176401	-0,43994	DA		
-0,43345	-0,42813	NE		
0,189172	-0,09281	DA		
-0,38142	-0,08608	DA		
0,291539	-0,46307	NE		
0,299482	0,054868	DA		
0,030602	0,490704	DA		
0,467254	-0,22874	NE		
0,007873	0,436797	DA		

Slika 5. Eksperimentalno određivanje broja π

Literatura:

1. Kiet, B. A., Lagrange, J.-B.: Using Simulation by Excel and R in the Teaching of Probability and Statistics for Non-Math Major Students, Journal of Mathematics and Statistical Science, 210-220, Science Signpost Publishing
2. Creating a Monte Carlo Simulation Using Excel, Investopedia, URL: https://www.investopedia.com/articles/investing/093015/create-monte-carlo-simulation-using-excel.asp (16. 11. 2019.)
3. Damijanić, M.: Primjena računala u poučavanju vjerojatnosti i statistike u srednjoj školi, diplomski rad, 2019.
4. Limić, N.: Monte Carlo simulacije slučajnih veličina, nizova i procesa, Element, 2009.
5. Lecture 17: The Law of Large Numbers and the Monte-Carlo method, URL: https://people.math.umass.edu/~lr7q/ps_files/teaching/math456/lecture17.pdf (16. 11. 2019.)
6. Matotek, J. - Stipančić Klaić, I.: Rođendanski paradoks, Poučak : časopis za metodiku i nastavu matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2017.
7. Miller, M: Free probability simulations for 7th grade, Math Mammoth, URL: https://www.mathmammoth.com/lessons/probability_simulations.php (16. 11. 2019.)
8. Pangburn, M: Intro to Simulation (using Excel), URL: https://pages.uoregon.edu/pangburn/dsc340notes/Simulation.pdf (16. 11. 2019.)
9. Sarapa, N.: Vjerojatnost i statistika 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1995.