Dinamične ideje Mongea u 21. stoljeću[1]

Petar Mladinić[2] i Nikol Radović[3]

Sažetak: Svijet u kojem živimo neprestano se i neumoljivo mijenja pojavom novih tehnologija. Promjene utječu na način učenja i poučavanja tradicionalnih predmeta, pa i matematike, a napose deskriptivne geometrije. Tvorac deskriptivne geometrije G. Monge još je u 18. stoljeću definirao temeljne metode vizualizacije trodimenzijskih geometrijskih figura u dvodimenzijskom okružju. Iako su te metode prvih 10 godina bile vojna tajna, Monge nije mogao predvidjeti da će s vremenom te metode postati standardni jezik grafičke komunikacije građevinara, arhitekata, kartografa, brodara, slikara, dizajnera, art-street umjetnika... No, treba li i danas, u 21. stoljeću, poučavati na isti način, i kako pri tome zadovoljiti nove izazove poučavanja / učenja? Kako naći dobru mjeru između tradicionalnog poučavanja i primjene tehnologije? Kako primijeniti tehnologiju kao alat kojim se usvajaju nove vještine u kombinaciji s klasičnim kompetencijama deskriptivne geometrije, a ne se služiti tehnologijom radi tehnologije? Da bi se odgovorilo na sva ta pitanja, treba imati na umu da učenici imaju problema s vizualizacijom na relaciji prostor – ravnina, što je posljedica života u virtualnom svijetu – svijetu igara. Naša je ideja pokazati kako povezati klasično (Mongeovih metoda projiciranja na tri ortogonalne ravnine) - dinamičnu vizualizaciju uporabom programa dinamične geometrije na modelu aksonometrijske kocke u cilju približavanja „teških" odnosno klasičnih metoda u okružju koje je učenicima blisko. Aksonometrijska kocka ima za cilj „kopiranja" poznatog okružja iz igrica u kojemu je prostor zatvoren i ograničen. Dinamičnost osigurava istovremenu promjenu na aksonometrijskoj kocki (trodimenzijskom okružju) i ravnini (dvodimenzijsko okružje – Mongeov svijet) pa se tako učenici nalaze u poznatoj situaciji kao i u igricama te bez većih problema usvajaju dinamično-klasične Mongeove metode vizualizacije.

Ključne riječi: deskriptivna geometrija, vizualizacija, grafička komunikacija, aksonometrijska kocke, program dinamične geometrije *Sketchpad*

Poznavanje Mongeovih metoda nacrtne geometrije pomaže nam u analiziranju, opisivanju i razumijevanju trodimenzijskog svijeta u kojemu živimo. To je jedan razloga zašto bi trebalo biti dijelom školskog obrazovanja naših učenika kroz mate-

[1]Predavanje i radionica održani na 8. kongresu nastavnika matematike RH, 2018. godine u Zagrebu
[2]Petar Mladinić, Zagreb
[3]Nikol Radović, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb

matiku/geometriju. Pri poučavanju nastavnici pomažu učenicima u razumijevanju umjetničke i logičke komponente matematike / geometrije, njenom prepoznavanju i primjeni u rješavanju različitih problemskih situacija.

Danas se postavlja poučak, nacrtna geometrija ne treba: *Uzmeš si dobar računalni program i imaš rješenje*. U ovakvom razmišljanju pogrešno je miješati poučavanje / učenje i primjenu naučenog u novonastaloj situaciji. Kada naučite osnove nacrtne geometrije na klasičan način ili dobrom kombinacijom klasike i tehnologije, vi ste osposobljeni rješavati probleme vizualizacije u nekom od programa koji nisu edukativni već mijenjaju nešto što se zove „tehničko crtanje". Ako želimo biti realni, klasično izvođenje neke elementarne kontrukcije (olovkom, papirom, priborom za crtanje) puno je lakše nego u nekim programima koji mogu zakomplicirati proces crtanja / konstruiranja ako nemate dovoljno znanja geometrije. Osnovna karakteristika koju edukativni programi moraju imati je što jednostavnija komunikacija na relaciji korisnik – program / računalo. Naravno, kada je učenik naučio temelje Mongeovih metoda, prijelazak na neki „crtajući" program samo će mu olakšati svladavanje novih koncepata vještina kao i primjenu naučenih u novom okružju.

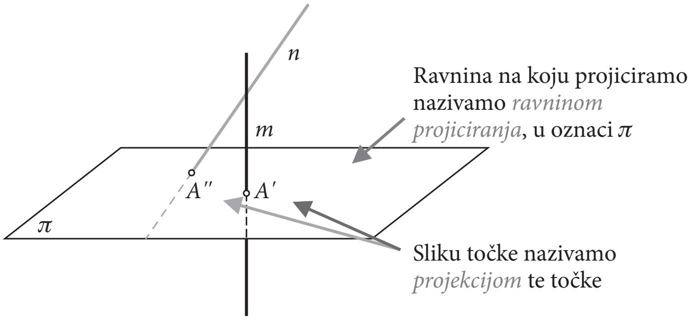
Poučavanje i učenje nacrtne geometrije kao matematičke discipline uključuje stjecanje znanja, vještina i sposobnosti vizualizacije prostora.

Matematički pristup problemima obuhvaća odabir i pravilnu primjenu osnovnih matematičkih vještina, otkrivanje pravilnosti u oblicima, izradu modela, te prepoznavanje i komunikaciju s njima povezanih ideja. Rješavanje problema nacrtne geometrije zahtijeva kreativnost i sustavan pristup, što ima glavnu ulogu u inovacijama te znanstvenim i tehničkim otkrićima kao što su dronovi, roboti, 3D printeri... Sva ta čuda tehnologije 21. stoljeća bila bi bez matematike/geometrije samo neuporabljiva hrpa „kutija".

Želeći učenicima (različitog matematičkog/geometrijskog znanja) približiti Mongeove metode, tj. projiciranje na tri međusobno okomite ravnine, došli smo do zaključka da klasični način *zamislite ravnine u prostoru koje su međusobno okomite koje „zalijepimo" u ravninu nije primjeren*. Učenicima je takav pristup preapstraktan! Oni to ne vide. Ništa čudno! Učenici različite dobi velik dio vremena provode na računalima igrajući različite igrice. Prostor u kojemu se odigravaju kojekakve (najčešće dinamične) situacije ograničen je ili veličinom ekrana ili podjelom ekrana na manje dijelove koji predstavljaju okružje odvijanja akcije. Što tada? Odustati ili se pokušati „ubaciti" u njima normalno okružje? Ideja je bila da nastava bude dinamična, individualna, da poveća interes, motiviranost i kreativnost u rješavanju postavljenih zadaća iz vizualizacije prostora (primjenom dinamičnog Mongea). Pokazalo se da je uvođenje dinamične, aksonometrijske kocke čije strane „glume" ravnine projiciranja uz dinamičnu povezanost na dva nivoa s projekcijama pravo rješenje. Prva povezanost očituje se u primjeni dinamičnosti, tj. kocku možemo okretati i zakretati, ali i postaviti tako da pokazuje baš onu projekciju koja nas zanima. Drugi povezuje dinamičnu aksonometrijsku kocku i dvodimenzijski prikaz. Kroz idućih nekoliko primjera, koji se mogu provesti kao Aktivnosti u učionici, prikazat ćemo kako klasične metode Mongea prikazati dinamično. Aktivnosti su pripremljene kao dinamične datoteke – bilježnice koje svaki od učenika ima na računalu na kojemu radi. Radi tempom koji mu odgovara. Učenik se u radu na računalu može vratiti unazad pogledati neki od riješenih primjera, primijeniti i nadograditi u rješavanju novog problema. Nastavnik je moderator koji „vodi” do rješavanja, a istovremeno ima mogućnost ispravljanja „krivih” zaključaka i razmišljanja.

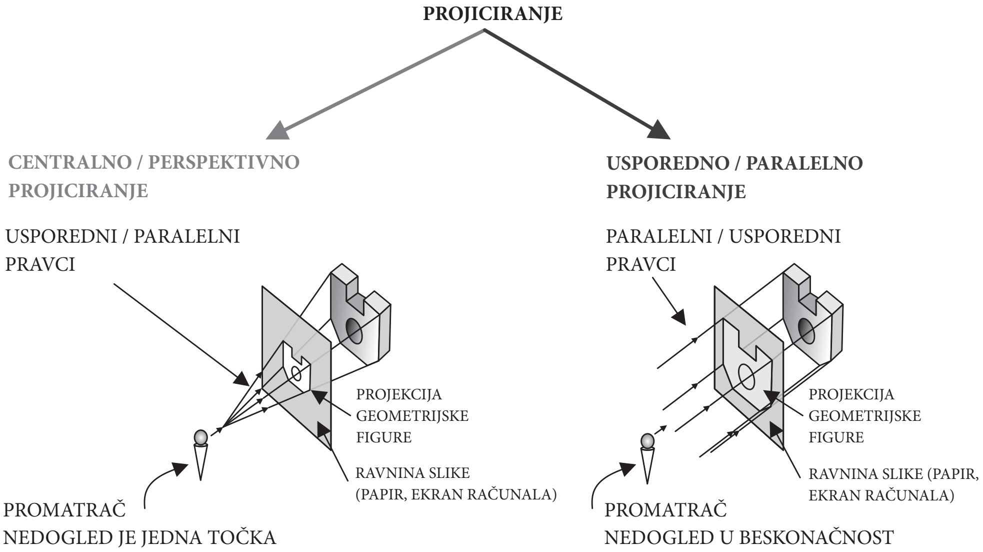
Prisjetimo se.

Projiciranje je svako bijektivno preslikavanje nekog skupa točaka ili geometrijske figure prostora na skup točaka ili geometrijsku figuru neke ravnine π.



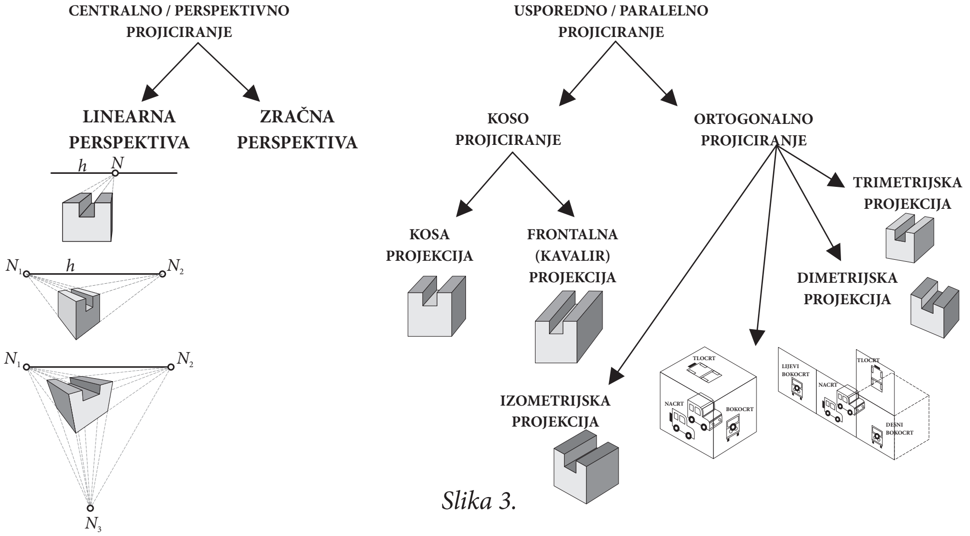
Slika 1.

Projiciranja se dijele na centralno i usporedno projiciranje, Slika 2.



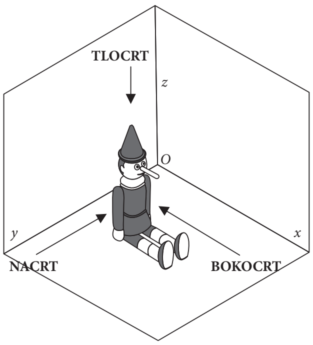
Slika 2.

Nadalje, svako od preslikavanja ima svoju podpodjelu, Slika 3.



Slika 3.

Od interesa će biti Mongeova metoda ili vizualizacija trodimenzijskih figura na međusobno okomite ravnine, Slika 4.

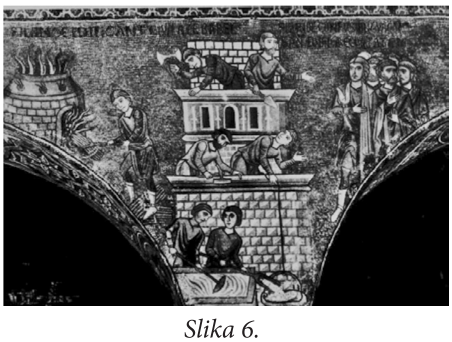


Slika 4.

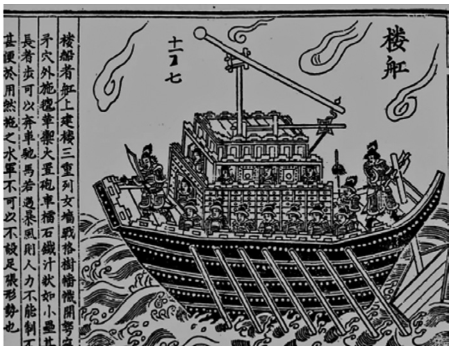
Izvornik_Radović et al (2010) Vizualizacija prostora u izometrijskoj mreži točaka, Zbornik radova 5. kongresa nastavnika matematike, 3. – 5. 7. 2012., Zagreb.

Paralelno projiciranje, čija je Mongeova metoda podvrsta, može se naći na klasičnim grčkim vazama iz 4. st. pr. Kr., Slika 5., na bizantskom mozaiku iz 12. st., Slika 6., te na slici ratnog broda iz 1510. godine, Slika 7.

Slika 5.



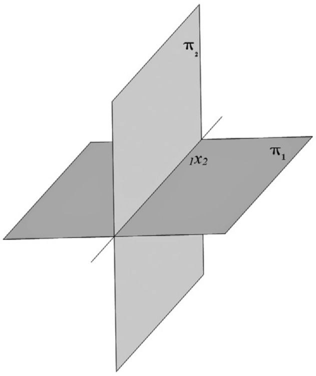
Slika 6.



Slika 7.
Wujing Zongyao

Više od 2000 godina geometrijske figure prikazivane su na ovaj način. Važna metoda vizualizacije prostora je dvocrtni postupak ili dvocrtno projiciranje ili Mongeova metoda.

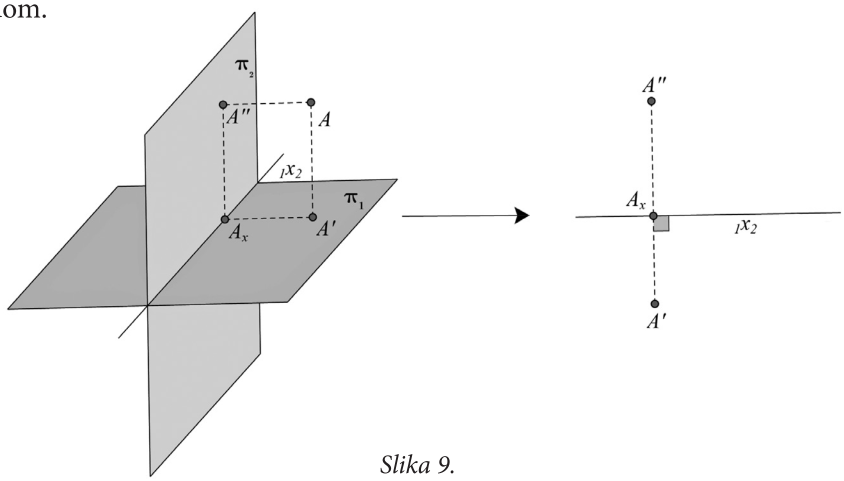
Neka su u prostoru dane dvije medusobno okomite ravnine, π_1 i π_2, Slika 8. Horizontalna ravnina projekcije zove se *prva ravnina projekcije* ili *tlocrtna ravnina*, a označava se s π_1. Ravnina okomita na tlocrtnu ravninu zove se *druga ravnina projekcije* ili *nacrtna ravnina*, a označava se s π_2. Presječnica ravnina π_1 i π_2 je pravac, tj. *os x* ili ${}_1x_2$.



Slika 8.

Primjer 1.

Na slici 9. prikazana je projekcija točke (koja se može naći u bilo kojem udžbeniku Nacrtne geometrije ili Opisnog mjerstva ili Deskriptivne geometrije) Mongeovom metodom.



Slika 9.

Točnost prikaza, Slika 9., Mongeove metode temelji se na teoremu:

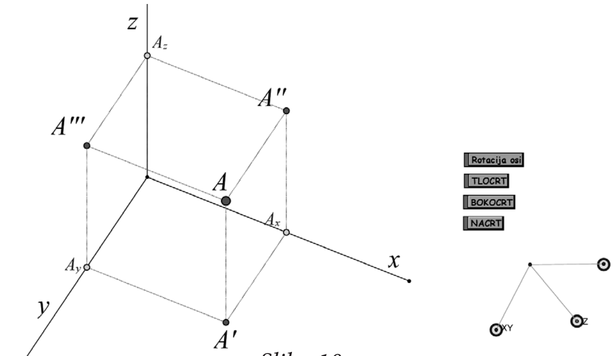
Teorem.

- Projiciranjem Φ svakoj točki prostora A jednoznačno je pridružen uređen par točaka (A', A'') ravnine π, takav da je spojnica točaka $\overline{A'A''}$ okomita na os ${}_1x_2$.
- Obratno, za bilo koji par točaka (A', A'') ravnine π, čija je spojnica $\overline{A'A''}$ okomita na os ${}_1x_2$, postoji točno jedna točka prostora A za koju vrijedi $\Phi : A \rightarrow (A', A'')$.

Dakle, svaka točka prostora *jednoznačno je određena svojim projekcijama*.

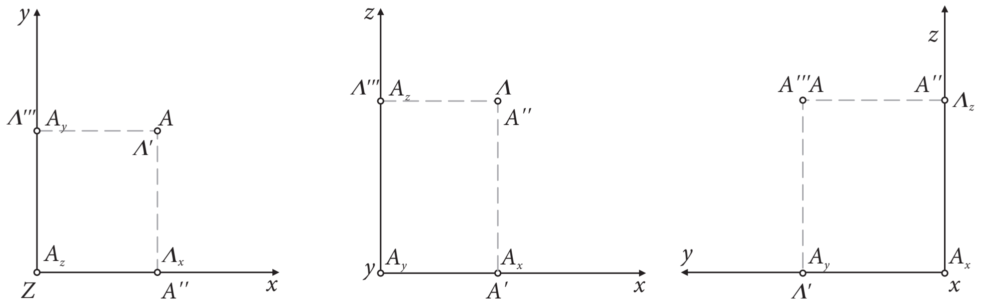
Ortogonalna projekcija točke A na ravninu π_1 je točka A' ili *prva projekcija* ili *tlocrt* A' točke A. Ortogonalna projekcija točke A na ravninu π_2 je točka A'' ili *druga projekcija* A'' ili *nacrt* A'' točke A.

No to je statično rješenje. Ako našu točku „stavimo" u aksonometrijsku rotirajuću kocku, možemo sagledati projekcije iz drugog kuta, Slika 10. Iako se bokocrtna ravnina uvodi kasnije, primjenom dinamične aksonometrijske kocke njezino je uvođenje logično. Učenici je u ovom okružju prihvaćaju bez problema. Bokocrtna ravnina je ravnina okomita i na ravninu tlocrta i na ravninu nacrta. Ortogonalna projekcija točke na ravninu π_3 je točka A''' ili *treća projekcija* ili *projekcija bokocrta.*



Slika 10.

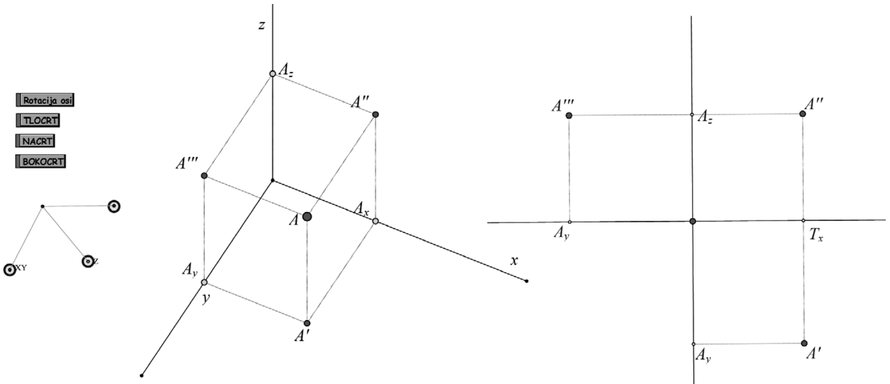
No, osim rotiranja čitave aksonometrijske kocke s točkom i njezinim projekcijama, moguće je odabrati neku od projekcija, Slika 11.



Slika 11.

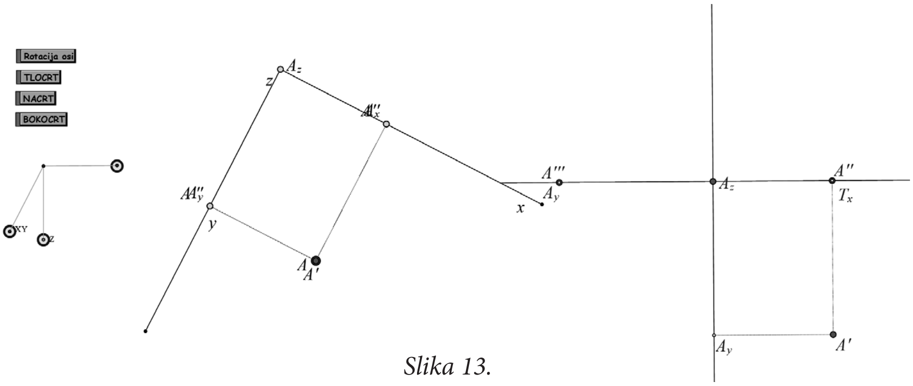
Ovakav dinamičan način ujedno olakšava vizualizaciju točke zadane koordinatama kao i zaključivanje svojstava točke zadane koordinatama.

Povezivanjem dinamične aksonometrijske kocke i dvodimenzijskih projekcija, učenicima je u potpunosti vizualizirana dinamično Mongeova metoda – projekcija točke na međusobno okomite ravnine, Slika 12.

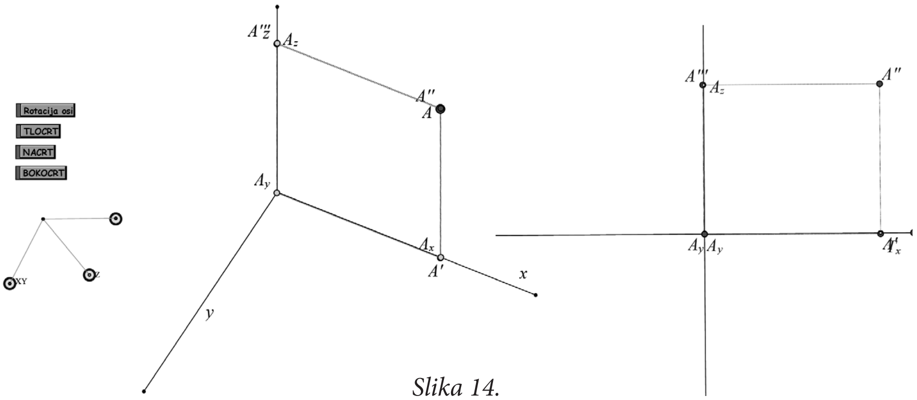


Slika 12.

Pogledajmo sada primjerice *tlocrt* točke *A*, Slika 13., ili *prošećimo* točku, Slika 14.



Slika 13.

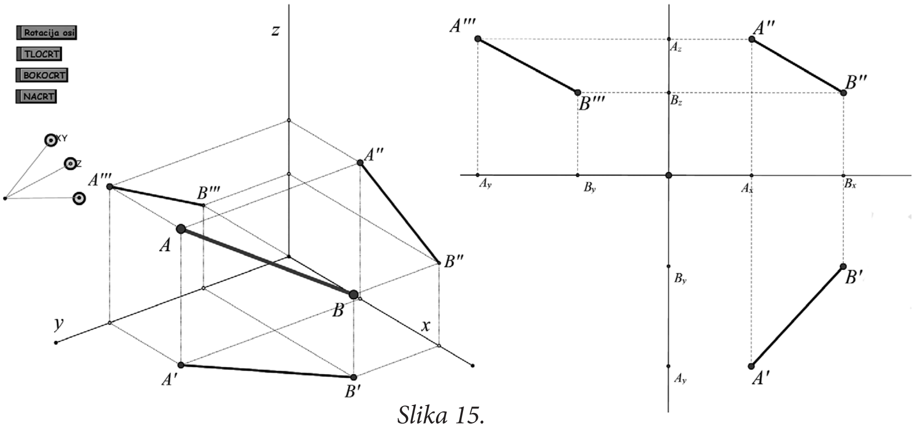


Slika 14.

Iz Slike 14. možemo zaključiti ponešto o točki A u prostoru. Projekcije A' i A''' točke A su na osima x i z, dok se točke A i projekcija A'' podudaraju. Točka A ima posebno svojstvo, *nalazi se u ravnini nacrta*. Zapamtimo, sve točke kojima su projekcija tlocrta na osi x i projekcija bokocrta na osi z nalaze se u ravnini projiciranja π_2. Nakon dinamičnog pomaka i prikaza, analogno pravilo može se bez većih poteškoća izreći i za točke u tlocrtnoj i bokocrtnoj ravnini.

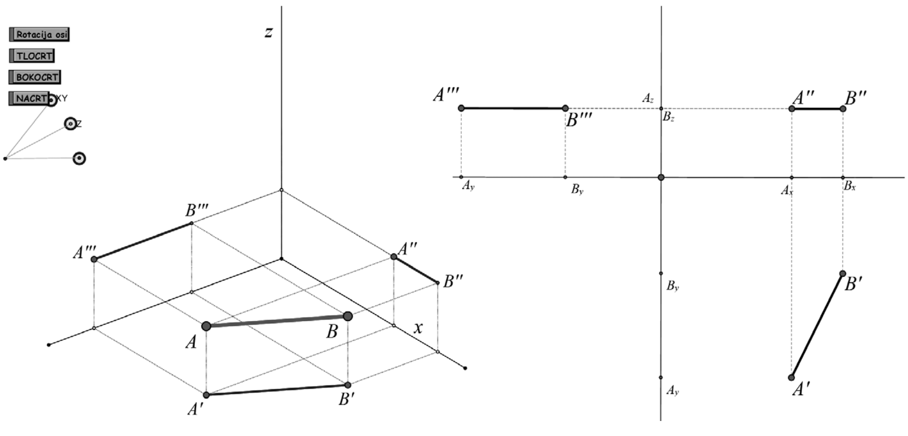
Primjer 2.

Na aksonometrijskoj dinamičnoj kocki nacrtane su projekcije dužine, Slika 15.

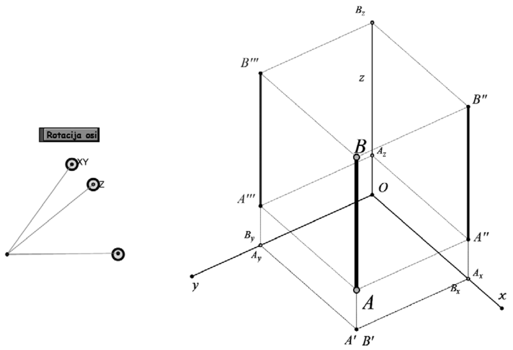


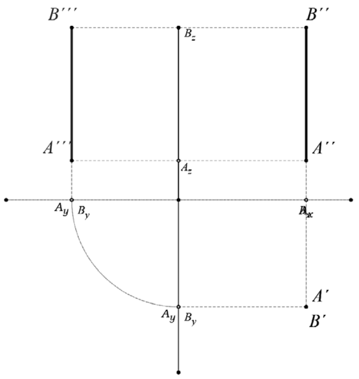
Slika 15.

Svaka dužina jednoznačno je određena projekcijama rubnih točaka. Promjenom položaja rubnih točaka (automatski se mijenjaju projekcije dužina) moguće je zaključiti ponešto o svojstvima te dužine. Zaključivanje bi bilo teže bez istovremene poveznice aksonometrijske dinamične kocke i dvodimenzijskog prikaza, Slike 16. i 17. Poopćenje zaključaka moguće je odmah provjeriti.



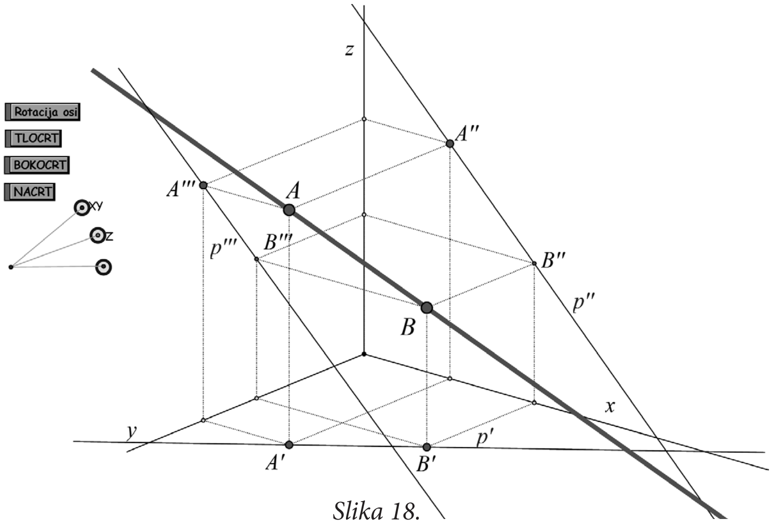
Slika 16.





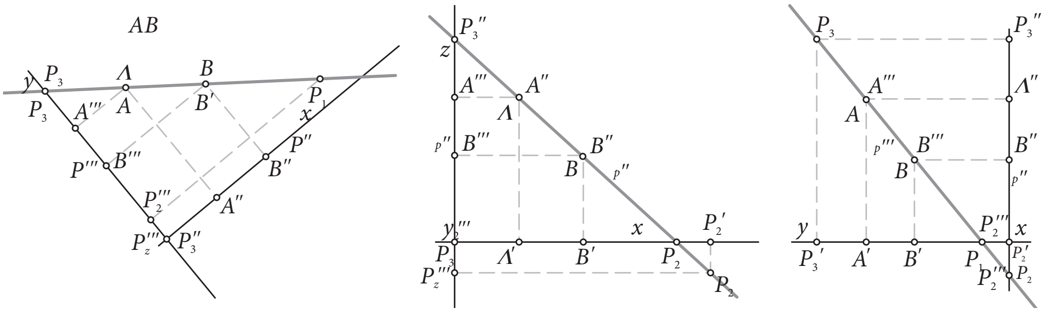
Slika 17.

Primjer 3.
Na aksonometrijskoj dinamičnoj kocki nacrtane su projekcije pravca, Slika 18.



Slika 18.

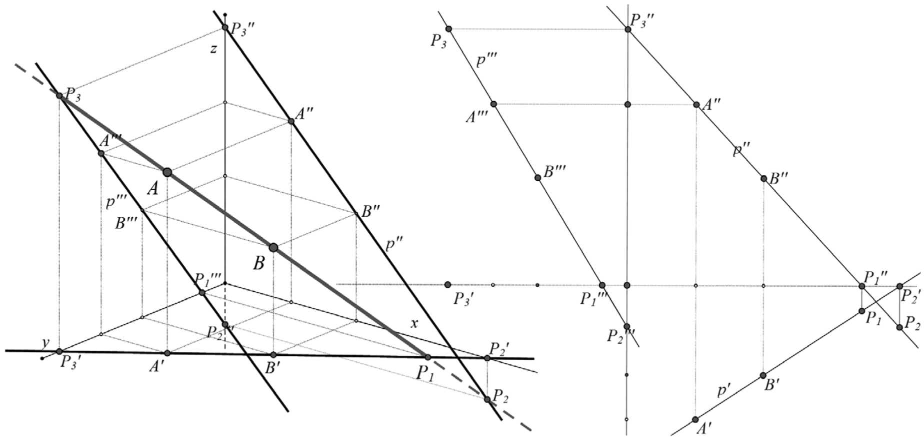
Okretanjem aksonometrijske kocke možemo uočiti specijalne točke, probodišta. To su točke u kojima pravac probada ravnine projiciranja, *probodišta* Slika 19.



TLOCRT NACRT BOKOCRT

Slika 19.

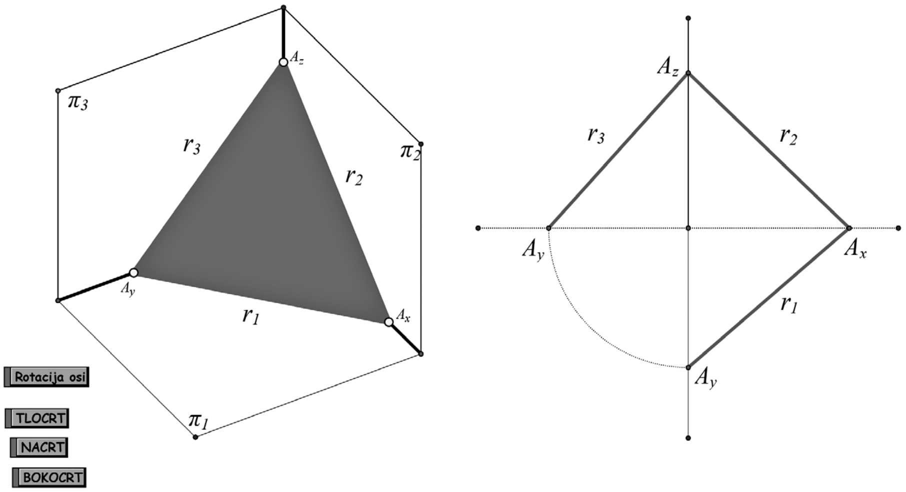
Spojanjem aksonometrijske dinamične kocke i dvodimenzijske slike, Slika 20., vizualiziramo pravac u prostoru i uočavamo svojstva probodišta pravca i ravnina projiciranja.



Slika 20.

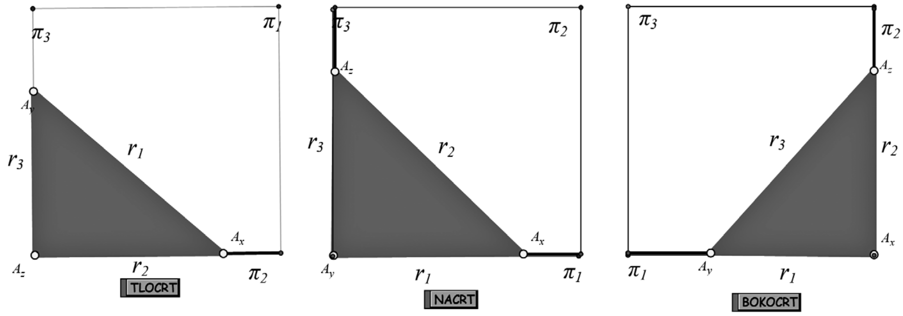
Primjer 4.

Na aksonometrijskoj dinamičnoj kocki nacrtane su projekcije ravnine, Slika 21.



Slika 21.

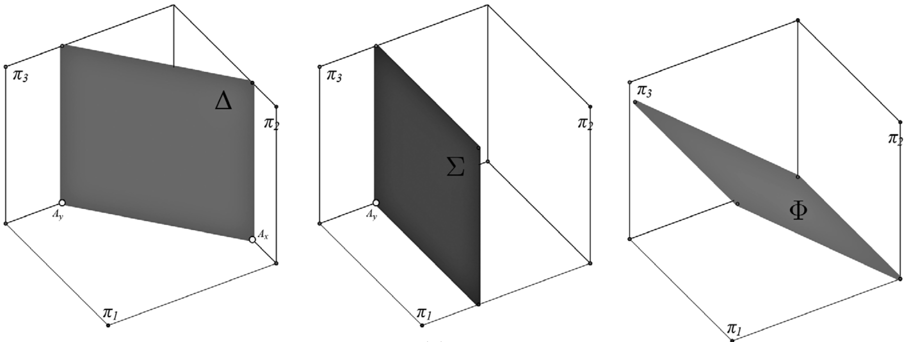
Ravninu zadajemo jednoznačno tragovima. Tragovi su presječnice zadane ravnine i ravnine projiciranja, tj. pravci čije su točke u zadanoj ravnini i ravnini projiciranja, što se može najbolje vidjeti u posebnim položajima aksonometrijske dinamične kocke, Slika 22.



Slika 22.

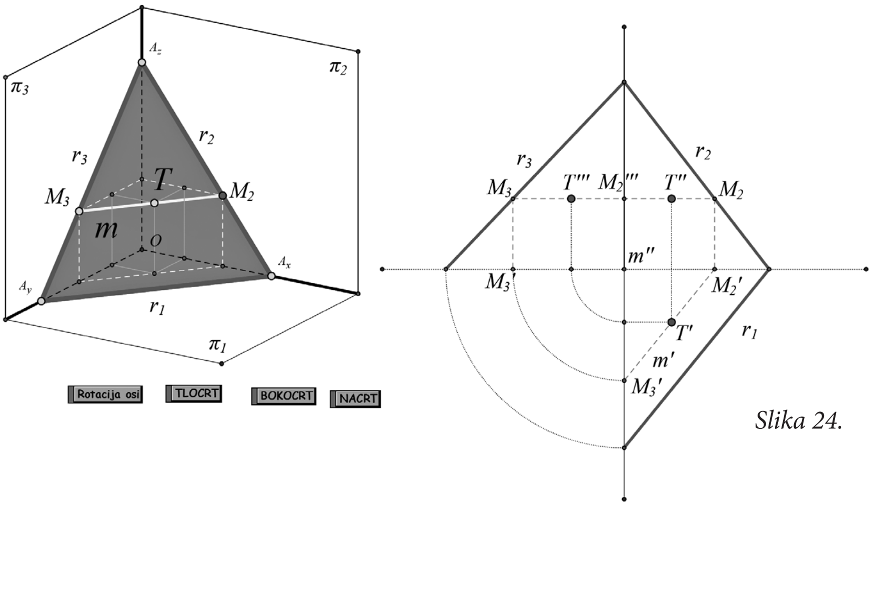
Zadatak 1.

Ravnina može biti okomita na π_1 ili π_2, usporedna s π_1 ili π_2, usporedna s osi x itd. Pogledaj sliku 23. Što možeš reći o nacrtanim ravninama? Nactaj njihove tragove u dvodimenzijskom prikazu.



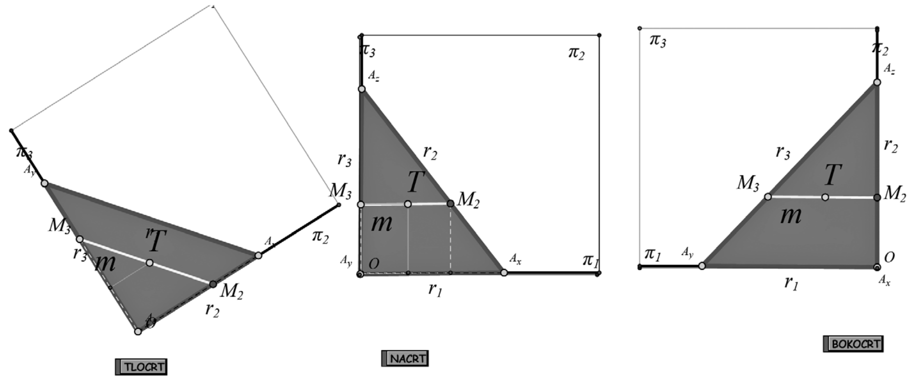
Slika 23.

Nadalje možemo jednostavno kombinacijom prikaza na dinamičnoj aksonometrijskoj kocki i dvodimenzijskog prikaza proučavati i zaključivati odnose točke, pravca i ravnine, Slika 24. Točka T je u ravnini jer je na pravcu m te ravnine Δ. Pravac



Slika 24.

m je u ravnini jer su mu istoimena probodišta na istoimenim tragovima ravnine. To se još bolje vidi na slici 25. U klasičnom poučavanju ravnine te točaka i pravaca ravnine općenito nastaju problemi vizualizacije, odnosno njihova „zamišljanja u glavi". Problem rješava dinamična aksonometrijska kocka i mogućnost sagledavanja točno određenih projekcija.

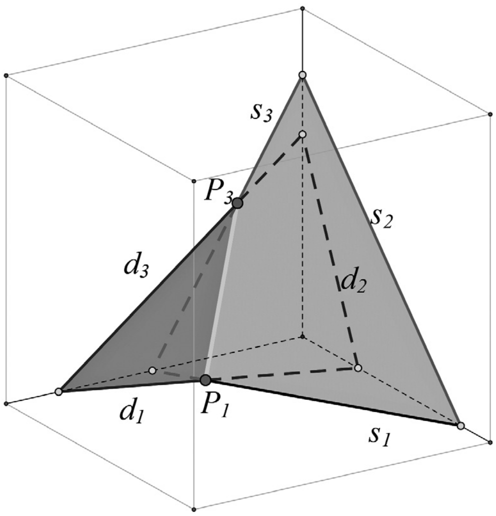


Slika 25.

U prethodnim su primjerima prikazane Mongeove metode kao spoj dinamične aksonometrijske kocke i dvodimenzijskog prikaza geometrijskih figura. Promjenom jednog položaja mijenja se prikaz, ali i dimenzije.

Primjer 5. Nacrtajmo presjek dviju ravnina.

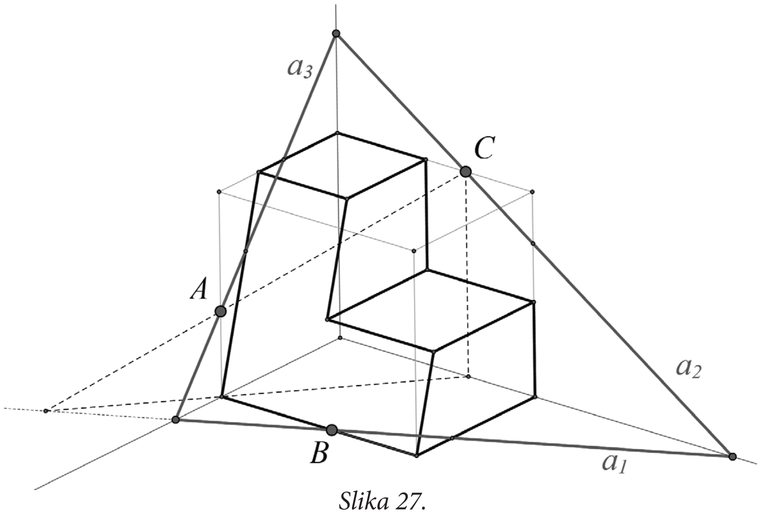
Prisjetimo se, presječnica dviju ravnina je pravac. Točke presječnice sjecišta su istoimenih tragova tih ravnina, Slika 26.



Slika 26.

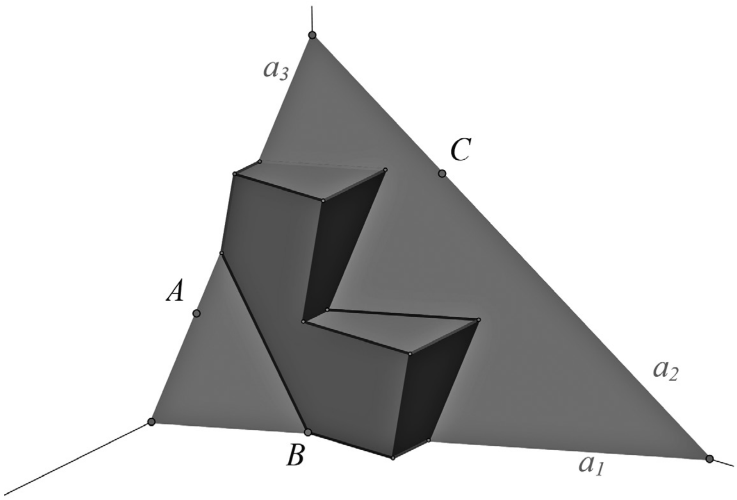
Primjer 6. Nacrtajmo presjek ravnine zadane s tri nekolinearne točke i poliedra.

Ravnina je zadana s tri točke *A*, *B* i *C*. Prvo konstruiramo tragove ravnine, Slika 27.



Slika 27.

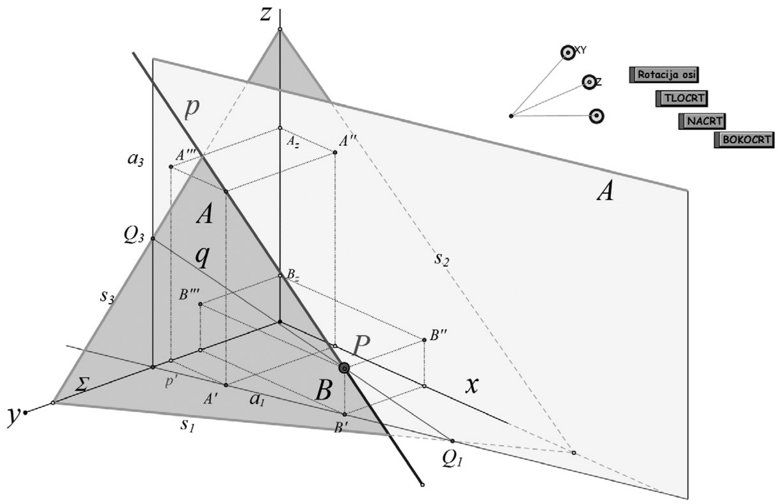
Nadalje, konstruiramo presjeke istoimenih tragova ravnine i tragova strana poliedra. Točke presjeka definiraju presječnice ravnine i poliedra. Iskoristimo mogućnost vizualizacije, tj. definiramo dijelove poliedra koji izlaze iz ravnine, kao i dijelove poliedra bliže gledatelju, Slika 28.



Slika 28.

Primjer 7. Nacrtajmo probodište pravca i ravnine.

Pravcem polažemo ravninu A. Ta ravnina je specijalna – prvi trag ravnine podudara joj se s tlocrtom p' pravca p i okomita je na ravninu tlocrta. Nacrtamo presječnicu q zadane ravnine, Σ i pomoćne ravnine, A. Točka u kojoj presječnica q siječe pravac p je traženo probodište P, Slika 29.

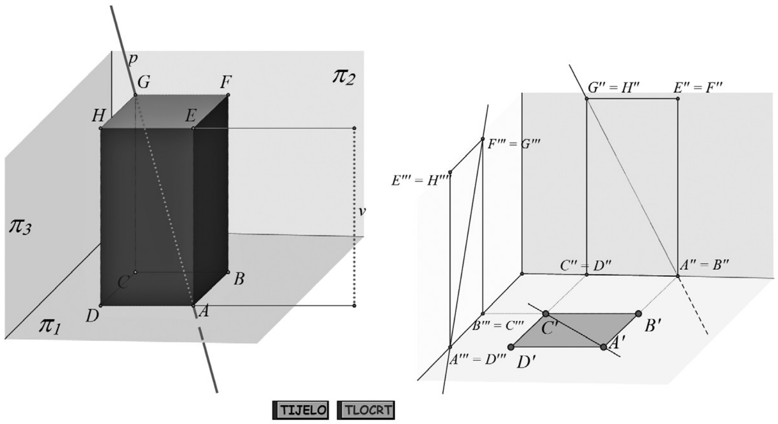


Slika 29.

Primjer 8.

Nacrtajmo projekcije (tlocrta, nacrta, bokocrta) uspravne kvadratne prizme s bazom u tlocrtnoj ravnini ako je zadani pravac $p(p', p'')$ prostorna dijagonala.

Rješavajući ovaj primjer moramo se prisjetiti nekih činjenica usvojenih rješavanjem prethodnih primjera, ali i geometrijskog znanja o uspravnoj kvadratnoj prizmi. Što znači da je baza u tlocrtnoj ravnini? Kakvi su bridovi uspravne geometrijske figure na tlocrtnu ravninu? Što je s duljinom visine?



Slika 30.

Osim što vizualiziramo, usvajamo temeljne elemente Mongeove metode. Isto tako neke klasične zadatke Nacrtne geometrije možemo rješavati izravno na dinamičnoj aksonometrijskoj kocki. Prednost izravnog crtanja na aksonometrijskoj kocki je višestruka. Analiza geometrijske figure uz rotiranje, translatiranje, povećavanje ili smanjivanje omogućava vizualizaciju u prostoru, ali i prikaz korak po korak.

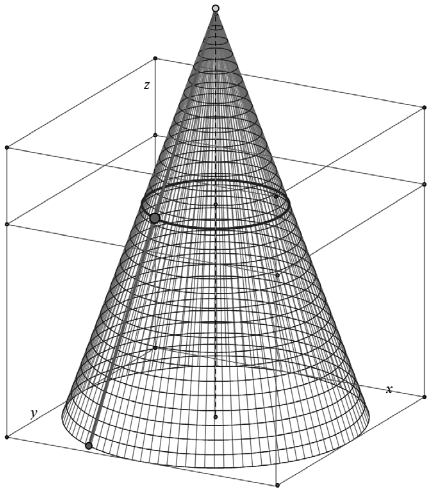
Primjer 9. Nacrtajmo uspravni stožac.

Postupak rješavanja možemo opisati kroz nekoliko koraka, čime povezujemo već usvojene vještine, ali i prednosti programa dinamične geometrije.

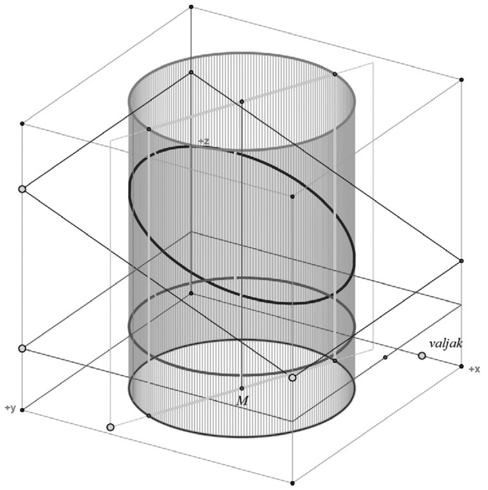
- Nacrtamo bazu uspravnog stošca elipsu koja je afina slika kružnice baze. Paralelogram baze je konstruira u aksonometriji kao afina slika kvadrata.
- Nacrtamo vrh uspravnog kružnog stošca.
- Vrhom uspravnog kružnog stošca i proizvoljne točke elipse baze nacrtamo jednu izvodnicu stošca.
- Geometrijsko mjesto ili lokus svih točaka baze i izvodnice stošca definiraju preostale izvodnice stošca, pri čemu se definira njihov broj, Slika 31.

Primjer 10. Nacrtajmo presjek ravnine i valjka.

Crtanje / konstrukcija presječne krivulje neke geometrijske figure i ravnine temelji se na konstruiranju probodišta brida / izvodnice s ravninom presjeka.



Slika 31.

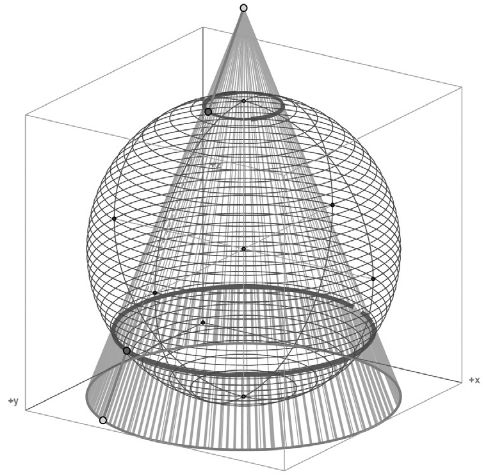


Slika 32.

Promjenom presječne ravnine možemo uočavati koja svojstva ima presječna krivulja u nekim specijalnim položajima.

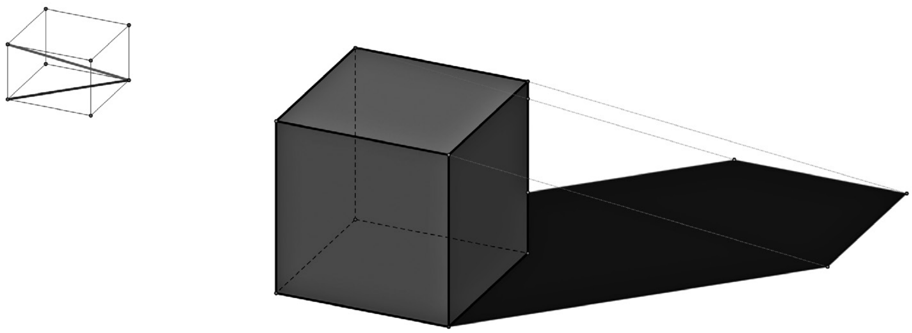
Primjer 11. Nacrtajmo prodornu krivulju kugle i stošca.

Konstrukcija prodora temelji se na konstruiranju probodišta pravca (brida ili izvodnice) jednog tijela s ravninom ili zakrivljenom plohom drugog tijela. Skup svih takvih probodišta definira zajedničku krivulju na plohama tijela koja prodiru jedno u drugo, Slika 33.

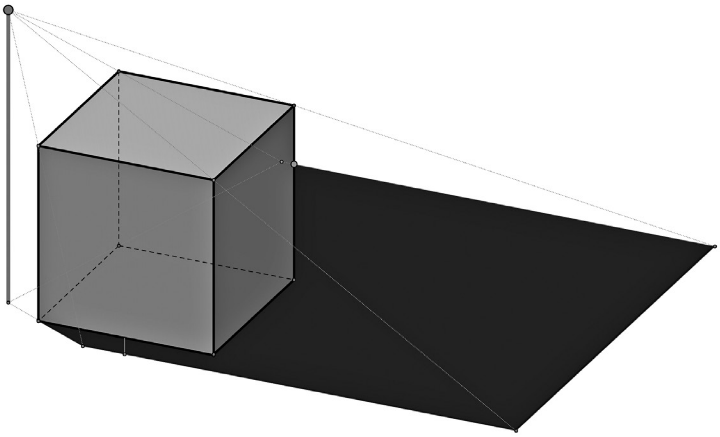


Slika 33.

Konstrukcija vlastitih sjena tijela kao i njihovih bačenih sjena na ravninu projiciranja ili na drugo tijelo važan je element za razumijevanje prostornih geometrijskih figura i prostornog zora. Čitava konstrukcija temelji se na konstrukciji probodišta zraka svjetlosti nekom točkom na ravninu. To najbolje ilustriraju Slike 34. i 35. Prikazuju konstrukciju sjene i bačene sjene kocke pri paralelnoj i centralnoj rasvjeti.

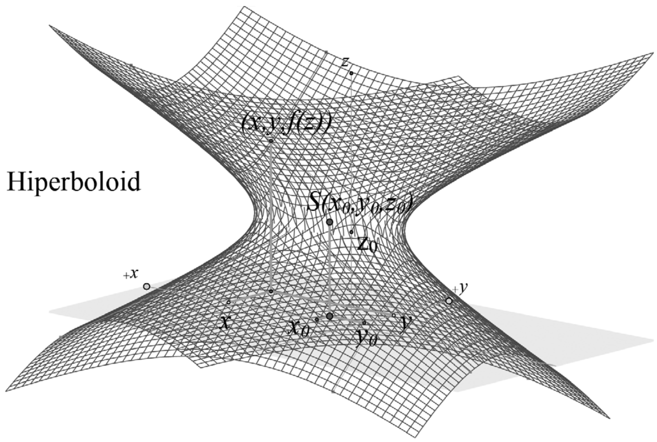


Slika 34.

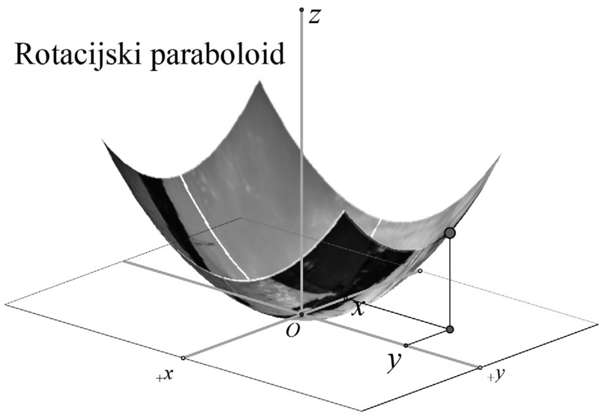


Slika 35.

Ovaj pristup omogućava „jednostavnu" vizualizaciju ploha, Slike 36. i 37.



Slika 36.



Slika 37.

Kroz prikazane primjere ilustrirali smo kako se računala (dinamični program Sketchpad 5.03 HR) kao snažan alat mogu primijeniti u učenju i poučavanju klasičnih tema nacrtne geometrije te potvrdili sljedeće riječi:

... u većini znanosti nova generacija ruši ono što su prethodne sagradile, jedino u matematici svaka nova generacija gradi novi kat na staroj strukturi...

Hankel

Literatura:

1. E. Badici. *Standards of Equality and Hume's View of Geometry*, Pacific Philosophical Quarterly 92, 2011, 448 – 467.
2. Baki, A.; Kosa, T.; Guven, B. (2011.) *A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers,* British Journal of Educational Technology Vol 42 No 2 2011 291 – 310.
3. G. Bertoline, E. N. Wiebe, N. W. Hartman, W. A. Ross. *Technical Graphics Communication*, McGraw – Hill, 2009.
4. J. Božičević. *Deskriptivna geometrija*, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1948.
5. J. D'Amelio. *Perspecive Drawing Handbook*, Dover Publications, Inc., New York, 11992.
6. I. Martinić, P. Mladinić, N. Radović - Nacrtna geometrija u IPAQ Peta projektu *** Mongeov postupak ** Aksonometrija, V. gimnazija, Zagreb, 2015.
7. P. Mladinić, N. Radović. Nacrtna geometrija *** Perspektiva ** Mongeov postupak * Aksonometrija, PROVEN grupa, Zagreb, 2016.
8. V. Niče. *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
9. D. Palman. Projiciranja i metode nacrtne geometrije, Školska knjga, Zagreb, 1982.
10. N. Radović, R. Svedrec, T. Soucie, I. Kokić, I. *Vizualizacija prostora u izometrijskoj mreži točaka*, Zbornik radova 5. kongresa nastavnika matematike, 3. – 5.07.2012., Zagreb, 461 – 480, 2012.
11. B. E. Reynolds, W. E. Fenton. College *Geometry Using The Geometer's Sketchpad*, Key College Publishing, Everyville, 2006.
12. S. Steketee, N. Jackiw, S. Chanan. Priručnik s uputama za Sketchpad, Proven, Zagreb, 2006.
13. L. B. Triglia, S. Sammarone, R. Zizzo. *Disegno Tecnico – Metodo tradicionale – uso del computer*, Zanichelli, 1992.
14. G. E. Vinson. *Essentials of Engineering Design Graphics*, Kendall/ Hunt Publishing Company, 2003.