Poboljšanje jedne od najpoznatijih algebarskih nejednakosti

Šefket Arslanagić[1], Daniela Zubović[2]

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja a i b koja glasi:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \tag{1}$$

jedna je od najpoznatijih nejednakosti i igra iznimno važnu ulogu kod dokazivanja drugih složenijih nejednakosti i rješavanja važnih zadataka.

Sada ćemo dati jednu novu nejednakost koja u izvjesnom smislu predstavlja poboljšanje nejednakosti (1). Riječ je o sljedećoj nejednakosti:

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}, \tag{2}$$

za $0 < a < b$.

Dokaz:

1° Imamo

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln \frac{b}{a}}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{b}{a} < \frac{\frac{b}{a}-1}{\sqrt{\frac{b}{a}}}\ . \tag{4}$$

[1]Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH
[2]Daniela Zubović, Sarajevo, BiH

Sada ćemo dokazati nejednakost (4). Uzet ćemo da je $\frac{b}{a} = x^2 > 1$ jer je $b > a > 0$. Nejednakost (3) sada postaje:

$$2\ln x < \frac{x^2 - 1}{x} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\ln x < x - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow\ x - \frac{1}{x} - 2\ln x > 0\ . \tag{6}$$

Promatrat ćemo funkciju:

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x,$$

za $x > 1$. Imamo da je $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$, tj.

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}\ .$$

Očigledno je $f'(x) > 0$ za sve $x > 1$, te $f(1) = 0$, što znači da je funkcija $f(x)$ rastuća za $x \in (1, +\infty)$. Znači da je $f(x) > f(1) = 0$, tj.

$$f(x) > 0,$$

odnosno zbog (6):

$$x - \frac{1}{x} - 2\ln x > 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\ln x < \frac{x^2 - 1}{x}\ ,$$

što znači da je nejednakost (5), odnosno nejednakost (4) točna. Dakle, nejednakost (3) je točna.

2° Imamo

$$\frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow\ \ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{a+b}\ , \tag{8}$$

a odavde, uzimajući da je $\frac{b}{a} = x > 1$, vrijedi:

$$\ln x > 2\cdot\frac{x-1}{x+1}\ . \tag{9}$$

Promatrat ćemo funkciju:

$$g(x)=\ln x-2\cdot\frac{x-1}{x+1}, \tag{10}$$

za $x>1$. Kako je

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4x}{x(x+1)^2}\text{ , tj.}$$

$$g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\ ,$$

očigledno je $g'(x)>0$ za sve $x>1$, te $g(1)=0$, što znači da je funkcija $g(x)$ rastuća za $\in(1,+\infty)$. Znači da je $g(x)>g(1)=0$, tj.

$$g(x)>0\,,$$

odnosno zbog (10):

$$\ln x-2\cdot\frac{x-1}{x+1}>0$$

$$\Leftrightarrow\ \ln x>2\cdot\frac{x-1}{x+1}\,,$$

što znači da je nejednakost (9), odnosno nejednakost (8) točna. Dakle, nejednakost (7) je točna.

Sada iz nejednakosti (3) i (7) slijedi dana nejednakost (2).

Čitateljima ovog članka preporučujemo da pokušaju riješiti sljedeće zadatke.

1. Dokažite nejednakosti:

a) $(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$, za $a,b>0$,

b) $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{4}\geq\sqrt{\frac{a+b}{2}}$, za $a,b>0$.

2. Dokažite nejednakosti:

a) $\frac{a+b}{1+a+b}\leq\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$, za $a,b\geq 0$,

b) $\dfrac{a+b}{2+a+b} \geq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}\right)$, za $a,b \geq 0$,

c) $\dfrac{1-a}{1-b}+\dfrac{1-b}{1-a} \leq \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$, za $0 < a,\, b \leq \dfrac{1}{2}$.

3. Dokažite nejednakosti:

a) $\sqrt{\dfrac{x}{y+z}}+\sqrt{\dfrac{y}{z+x}}+\sqrt{\dfrac{z}{x+y}} > 2$, za $x, y, z > 0$,

b) $\dfrac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1) \leq \dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}$, za $x \geq 0$,

c) $\ln\left(\dfrac{a}{b}+1\right)\ln\left(\dfrac{b}{a}+1\right) < (\ln 2)^2$, za $a,b > 0$ i $a \neq b$.

d) $\log_a b > \log_{a+t}(b+t)$, za $b > a > 1$ i $t > 0$.

Literatura:

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Z. Cvetkovski, *Inequalities-Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer Heidelberg/Dordrecht/London/New York, 2012.
3. J. Pečarić, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Mala matematička biblioteka, Knjiga 6, Element, Zagreb, 1996.
4. N. M. Sadrakjan, A. M. Avojan, *Neravenstva-Metodi dokazateljstva*, Fizmatlit, Nauka, Moskva, 2002.