Nakon rješenja jednog zadatka

Alija Muminagić[1], Šefket Arslanagić[2]

U ovom ćemo članku pokazati da se i nakon rješenja zadatka može napraviti još puno korisnih „stvari". Riješimo sada ovaj zadatak:

Zadatak 1. U trokutu ΔABC zadano je $a = 20$, $b = 15$, $\alpha - \beta = 90°$. Izračunaj stranicu c.

Rješenje: Neka je kut $\angle BAD = 90°$, točka D je na stranici $\overline{BC}$ i neka je $|AD| = x$. Tada je kut $\angle CAD = \beta$ (Slika 1.), pa je $\Delta ACD \sim \Delta BCA$. Iz te sličnosti slijedi:

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BA|} \Leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow x = \frac{bc}{a}.$$

Dalje je

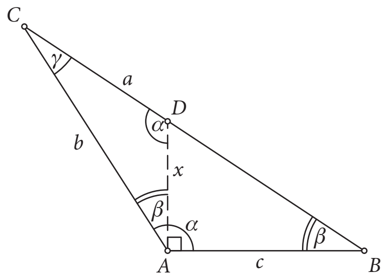
$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|CA|} \Leftrightarrow \frac{b}{|CD|} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow |CD| = \frac{b^2}{a},$$

pa je zbog $|DB| = |CB| - |CD|$

$$|DB| = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

Pitagorin teorem primijenjen na trokut ΔABD daje:

$$|AB|^2 = |DB|^2 - x^2 \Leftrightarrow c^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 - \left(\frac{bc}{a}\right)^2 \Leftrightarrow c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (1)$$



Slika 1.

[1]Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska
[2]Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

Uvrštavajući $a = 20$ i $b = 15$ u (1) dobivamo $c = \frac{20^2 - 15^2}{\sqrt{20^2 + 15^2}} = \frac{175}{25} = 7$.

Zadatak je riješen, ali nije teško primijetiti da je trokut iz zadatka ipak *poseban* jer nije u svakome trokutu razlika mjera dvaju unutrašnjih kutova jednaka 90°. Zato uvodimo:

Definicija 1. Trokut u kojemu je razlika mjera dvaju unutrašnjih kutova jednaka 90° zove se *pseudopravokutni trokut* (pseudo, grč. *lažan, nazovi*, dakle nazovi pravokutni trokut).

Očigledno vrijedi:

Teorem 1: Svaki pseudopravokutni trokut je tupokutan.

Dokaz: Neka u pseudopravokutnom trokutu ΔABC vrijedi da je $\alpha - \beta = 90°$. Tada je $\alpha = 90° + \beta$, što povlači da je $\alpha > 90°$. To je dovoljno da se zaključi da je trokut ΔABC tupokutan.

Prema rješenju zadatka (gore), tj. $c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, možemo formulirati novi teorem:

Teorem 2: U pseudopravokutnom trokutu ΔABC čije su duljine stranica a, b i c, za nasuprotne kutove vrijedi jednakost $\alpha - \beta = 90°$ je $\left(a^2 - b^2\right)^2 = c^2\left(a^2 + b^2\right)$.

Dokaz: (planimetrijski) Uvedimo oznake kao na Slici 2. Primjenom Pitagorina teorema na pravokutni trokut ΔABD dobivamo:

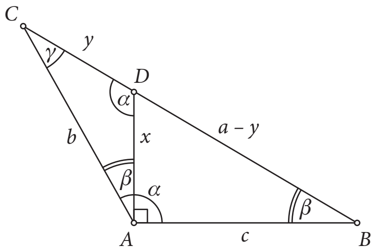
$$x^2 = (a - y)^2 - c^2. \tag{2}$$

Iz sličnosti trokuta $\Delta ADC \sim \Delta ABC$ slijedi:

$$y : b = b : a \Leftrightarrow y = \frac{b^2}{a} \tag{3}$$

i

$$x : y = c : b \Leftrightarrow x = \frac{c}{b} \cdot y \Leftrightarrow x = \frac{c}{b} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{bc}{a}. \tag{4}$$



Slika 2.

Uvrštavanjem (3) i (4) u jednakost (2) dobivamo:

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^2=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)^2-c^2 \Leftrightarrow \frac{b^2c^2}{a^2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2}-c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2=\left(a^2-b^2\right)-a^2c^2 \Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)^2=c^2\left(a^2+b^2\right),$$

što je trebalo dokazati.

Prirodno je sada da se zapitamo vrijedi li obrat Teorema 2.
To znači da probamo riješiti sljedeći zadatak:

Zadatak 2. Duljine stranica trokuta ΔABC su a = 20, b = 15, c = 7. Dokaži da je taj trokut pseudopravokutan.

Rješenje: Prema Teoremu 2, za pseudopravokutni trokut vrijedi:

$$\left(a^2-b^2\right)^2=c^2\left(a^2+b^2\right),$$

pa imamo:

$$\left(20^2-15^2\right)^2=7^2\left(20^2+15^2\right) \Leftrightarrow 20^2-15^2=7\sqrt{20^2+15^2}$$

$$\Leftrightarrow (20-15)(20+15)=7\sqrt{400+225} \Leftrightarrow 5\cdot 35=7\cdot 25 \Leftrightarrow 175=175,$$

što je točno. Dakle, taj je trokut pseudopravokutan.

Do rješenja smo mogli doći i na sljedeći način (primjenom teorema o kosinusu):

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{15^2+7^2-20^2}{2\cdot 15\cdot 7}=\frac{225+49-400}{210}=-\frac{3}{5},$$

$$\cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{7^2+20^2-15^2}{2\cdot 7\cdot 20}=\frac{49+400-225}{280}=\frac{4}{5}.$$

Odavde slijedi da je $\sin\beta=\frac{3}{5}$.

Dakle, $\cos\alpha = -\sin\beta$ i odavde je zbog $\cos(90° + \beta) = -\sin\beta$:

$$\cos\alpha = \cos(90° + \beta), \text{ tj. } \alpha = 90° + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 90°,$$

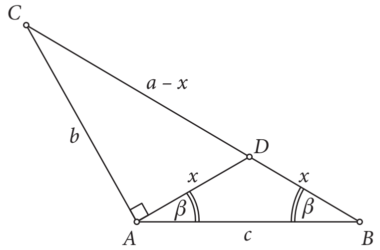
pa je na osnovi Definicije 1. taj trokut pseudopravokutan.

Dat ćemo dokaz da vrijedi obrat Teorema 2.

Teorem 3. Ako su duljine stranica trokuta ΔABC a i b i $c=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, onda za kutove koji su nasuprotni stranicama a i b vrijedi da je $\alpha - \beta = 90°$.

Dokaz 1: Neka je točka D na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|AD| = |BD| = x$. Trebamo dokazati da je trokut ΔCAD pravokutan ($\angle A = 90°$), tj. da je (Slika 3.):

$$b^2 + x^2 = (a-x)^2. \tag{5}$$



Slika 3.

Zbog $|AD| = |BD| = x$, trokut ΔABD je jednakokračan, što povlači da je $\angle BAD = \beta$. Primjenom teorema o kosinusu na trokut ΔABD dobivamo:

$$c^2 = x^2 + x^2 - 2\cdot x\cdot x\cdot\cos\left(180^\circ - 2\beta\right) \Leftrightarrow c^2 = 2x^2\left(1+\cos 2\beta\right),$$

jer je $\cos\left(180^\circ - 2\beta\right) = -\cos 2\beta$. Gornja relacije ekvivalentna je

$$c^2 = 2x^2\left(1+\cos^2\beta - \sin^2\beta\right),$$

jer je $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$, što je dalje ekvivalentno

$$c^2 = 2x^2\left(1+\cos^2\beta - \left(1-\cos^2\beta\right)\right) \Leftrightarrow c^2 = 4x^2\cos^2\beta,$$

tj.

$$x = \frac{c}{2\cos\beta}. \tag{6}$$

Uvrštavajući (6) u jednakost (5) imamo:

$$b^2 + \frac{c^2}{4\cos^2\beta} = a^2 - 2a\frac{c}{2\cos\beta} + \frac{c^2}{4\cos^2\beta}.$$

To je dalje ekvivalentno

$$b^2 = a\left(a - \frac{c}{\cos\beta}\right) = a\left(a - \frac{c}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}\right),$$

jer je iz teorema o kosinusu $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$. Ovo je ekvivalentno

$$\frac{2a^2c^2}{a^2+c^2-b^2} = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \frac{2c^2}{a^2+c^2-b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2c^2 = \left(a^2-b^2\right)^2 + \left(a^2-b^2\right)c^2 \Leftrightarrow 2a^2c^2 - \left(a^2-b^2\right)c^2 = \left(a^2-b^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\ c^2=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{2a^2-\left(a^2-b^2\right)}\ \Leftrightarrow\ c=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

a to je ispunjeno na osnovi uvjeta iz zadatka. Prema tome je $\angle CAD = 90°$. Sa Slike 3. vidimo da je $\angle CAB = \angle CAD + \angle DAB$ ili $\alpha = 90° + \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = 90°$.

Dokažimo sada Teorem 3 pomoću trigonometrije. Prije nego što damo ovaj dokaz, dokazat ćemo *teorem o tangensima*:

Teorem 4. Odnos zbroja i razlike dviju stranica trokuta jednak je odnosu tangensa poluzbroja i polurazlike kutova nasuprotnih tim stranicama, tj.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}};\quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}};\quad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}.$$

Dokaz: Prema teoremu o sinusima imamo da vrijedi:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2R\sin\alpha+2R\sin\beta}{2R\sin\alpha-2R\sin\beta}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta},$$

što je, prema formulama za pretvaranje zbroja i razlike u produkt, jednako

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

zbog $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$. Analogno se dobiju i druge dvije formule.

Dat ćemo sada Dokaz 2 (trigonometrijski) za Teorem 3.

Dokaz 2. Na osnovi Teorema 4. vrijedi:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{90^\circ}{2}}=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right),$$

jer je

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2},\ \alpha-\beta=90^\circ \text{ i } \operatorname{tg}\frac{90^\circ}{2}=\operatorname{tg}45^\circ=1.$$

Odatle, jer je $\operatorname{tg}\left(90^0-x\right)=\operatorname{ctg}x$, imamo:

$$\frac{a+b}{a-b}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}. \tag{7}$$

Poznato je (Dokažite!) da je:

$$\cos x=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-1}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+1}. \tag{8}$$

Teorem o kosinusu primijenjen na trokut ΔABC daje:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=a^2+b^2-2ab\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}-1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}+1},$$

zbog (8). Dalje je, zbog (7),

$$c^2=a^2+b^2-2ab\frac{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2-1}{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+1}=a^2+b^2-2ab\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}$$

$$=a^2+b^2-2ab\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}$$

$$=a^2+b^2-2ab\frac{4ab}{2a^2+2b^2}=a^2+b^2-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

To je ekvivalentno

$$c^2\left(a^2+b^2\right)=\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2 \Leftrightarrow c^2\left(a^2+b^2\right)=\left(a^2-b^2\right)^2.$$

Napomena: Kada su ova dva autora išla u srednju školu (to je bilo vrijeme bez džepnih računala), pri „rješavanju kosokutnog trokuta" (primjena teorema o sinusima i kosinusima) koristili su se logaritamskim računom (logaritamskim tablicama) za izračunavanje traženih veličina u trokutu. Kako je teorem o kosinusu nezgodan za logaritmiranje, primjenjivan je teorem o tangensima, a kod složenijih slučajeva, npr. kada je u trokutu zadan jedan kut, jedna stranica i zbroj ili razlika drugih dviju stranica, primjenjivali su Molweideove[3] formule:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}};\ \frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}};\ \frac{c+a}{b}=\frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}};\ \frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}};\ \frac{c-a}{b}=\frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}. \tag{9}$$

Dokazi za formule (9) su jednostavni.

[3]K. Molweide (1744. – 1825.), njemački matematičar i astronom

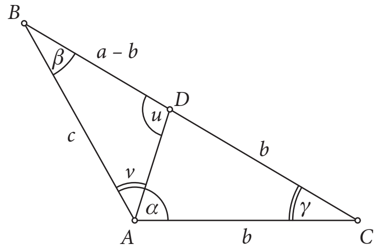
Mislimo da je ovaj geometrijski dokaz npr. za $\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ interesantan.

Dokaz 1. Pretpostavimo da je u trokutu ΔABC, $a > b$ (Slika 4.). Neka je točka D na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|CD|=b$. Lako pokazujemo da je:

$$v=\measuredangle BAD=\alpha-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\gamma\right)=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

i

$$u=\measuredangle BDA=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{1}{2}\gamma\right)=90^\circ+\frac{1}{2}\gamma\,.$$



Slika 4.

Teorem o sinusima primijenjen na trokut ΔBDA daje:

$$\frac{a-b}{\sin v}=\frac{c}{\sin u},\quad \text{tj.}\quad \frac{a-b}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{c}{\sin\left(90^\circ+\frac{\gamma}{2}\right)},$$

a zbog $\sin\left(90^\circ+\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}$ vrijedi:

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\,.$$

Sami dokažite teorem u slučaju kada je $a < b$.

Dokaz 2. Dokazat ćemo da je

$$c\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=(a-b)\cos\frac{\gamma}{2}$$

koristeći poznate formule (Dokažite ih!):

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\quad \text{i}\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\,.$$

Tako je:

$$c\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=c\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=c\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=c\left(\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}-\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}}\right)$$

$$= c\left(\sqrt{\frac{s(s-b)^2(s-c)}{abc^2}} - \sqrt{\frac{s(s-a)^2(s-c)}{abc^2}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{s(s-c)c^2}{abc^2}}(s-b-s+a) = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}(a-b)$$

$$= (a-b)\cos\frac{\gamma}{2}$$

čime je tvrdnja dokazana.

Čitateljima prepuštamo da formule (9) dokažu i na neki drugi način. Bilo bi dobro da sami vide na koji se način primjenjuje teorem o tangensima za rješavanje kosokutnog trokuta i koje su to olakšice u odnosu na teorem o kosinusu.

Spomenimo još da se teorem o tangensima u starijoj matematičkoj literaturi daje u ovom obliku:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c\cdot\sin\alpha}{b - c\cdot\cos\alpha}$$

(poznate su nam dakle stranice b i c i kut α između njih).

Dokaz: Imamo da je (Slika 5.)

$$|DA| = c\cdot\cos\alpha,\ \ |CD| = a\cdot\cos\gamma\ ,$$

pa je $a\cos\gamma = b - c\cos\alpha$, a na osnovi teorema o sinusima vrijedi:

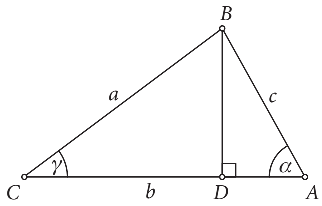
$$a\cdot\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha\ .$$

Dijeljenjem gornjih jednakosti dobivamo:

$$\frac{a\cdot\sin\gamma}{a\cdot\cos\gamma} = \frac{c\cdot\sin\alpha}{b - c\cdot\cos\alpha}\ ,$$

a odavde

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c\cdot\sin\alpha}{b - c\cdot\cos\alpha}$$



Slika 5.

te analogno i za ostale kutove.

Literatura

1. A. Marić, *Trokut, (definicije, poučci, formule, problemi, jednakosti, nejednakosti)*, Element, Zagreb, 2007.
2. A. F. Andersen, P. Mogensen, *Lærebog i Matematik 1*, Gyldendal, 1960.
3. S. Mintaković, M. Franić, *Trigonometrija*, Element, Zagreb, 1999.
4. B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.