Osječki matematički list 20 (2020), 23–38

Apolonijevi poučci

Predrag Lončar*

Sažetak

U ovom radu definiramo konjugirane promjere elipse i razmatramo njihova svojstva. Dokazujemo dvije važne tvrdnje koje vrijede za konjugirane promjere elipse - poznate Apolonijeve poučke. Prema prvom Apolonijevom poučku zbroj kvadrata duljina bilo kojih dvaju konjugiranih polumjera elipse jednak je zbroju kvadrata duljina njezine glavne i sporedne poluosi. Drugi Apolonijev poučak tvrdi da tangencijalni paralelogram bilo kojeg para konjugiranih promjera elipse ima uvijek istu površinu koja je jednaka površini tangencijalnog pravokutnika određenog glavnom i sporednom osi elipse. Navedene su i dokazane neke zanimljive tvrdnje koje se dokazuju pomoću Apolonijevih poučaka.

Ključne riječi: *elipsa, promjer elipse, konjugirani promjeri elipse, tangencijalni paralelogram elipse, Apolonijevi poučci*

Apolonius' theorems

Abstract

In this paper, we define the conjugate diameters of an ellipse and consider their properties. We prove two important relations holding for conjugate diameters of an ellipse, i.e. the famous theorems of Apollonius. According to the first Apollonius' theorem, the sum of squares of the lengths of any two conjugate radii of the ellipse is equal to the sum of squares of the lengths of its semi-major and semi-minor axes. The second Apollonius' theorem claims that the area of the parallelogram determined by any pair of conjugate diameters of an ellipse is equal to the area of a tangential rectangle defined by the major and minor axes of this ellipse. Some interesting statements are made and proved by means of Apollonius' theorems.

*Geotehnički fakultet, Varaždin, email: predrag.loncar@gfv.hr

Keywords: *ellipse, diameter of ellipse, conjugate diameters of ellipse, tangential parallelogram of ellipse, Apollonius' theorems*

1 Uvod

Apolonije iz Perge (262.–190. pr. n. e.), grčki matematičar, nazvan veliki geometar

U ovom radu objasnit ćemo pojam konjugiranih (spregnutih) promjera elipse i dokazat ćemo dva *Apolonijeva poučka* o konjugiranim promjerima elipse. Već je grčki matematičar Menehmo otkrio 350. godine pr. n. e. hiperbolu i parabolu rješavajući problem udvostručenja kocke i naslutio da se te krivulje mogu dobiti presijecanjem stošca ravninom. No, tek je *Apolonije iz Perge* u svom glavnom djelu *Elementi konika* u osam knjiga, temeljito obradio teoriju presjeka stošca i ravnine (oko 400 poučaka) i prvi je za konike upotrijebio nazive elipsa i hiperbola (naziv parabola dolazi od Arhimeda). U tom djelu, oko 200. godine pr. n. e. prvi je ustanovio da se sve te tri vrste presjeka mogu dobiti presijecanjem stošca ravninom. Odatle dolazi naziv čunjosječnice za krivulje drugog stupnja.

2 Konjugirani promjeri

U ovm poglavlju ćemo definirati konjugirane (spregnute) promjere elipse. Prisjetimo se da je promjer elipse tetiva elipse koja prolazi kroz njezino središte. Krajnje točke promjera elipse su dijametralno suprotne točke elipse.

Definicija 2.1. *Neka je $\overline{MN}$ promjer elipse $\mathcal{E}$. Promjer $\overline{PQ}$ elipse $\mathcal{E}$ zvat ćemo konjugirani promjer promjeru $\overline{MN}$ ako je $\overline{PQ}$ paralelan s tangentom na elipsu $\mathcal{E}$ u krajnjoj točki M (ili N) promjera $\overline{MN}$ (slika 1).*

Pokazat ćemo da ako je dana elipsa $\mathcal{E}$ i jedan njen promjer $\overline{MN}$, tada je jednoznačno određen njegov konjugiran promjer $\overline{PQ}$ i da je za promjer $\overline{PQ}$ njemu konjugirani promjer opet promjer $\overline{MN}$. Ovo ćemo pokazati korištenjem analitičke geometrije.

Sa $S(0,0)$ označimo ishodište pravokutnog Kartezijevog koordinatnog sustava xSy. Neka je zadana elipsa $\mathcal{E}$ jednadžbom

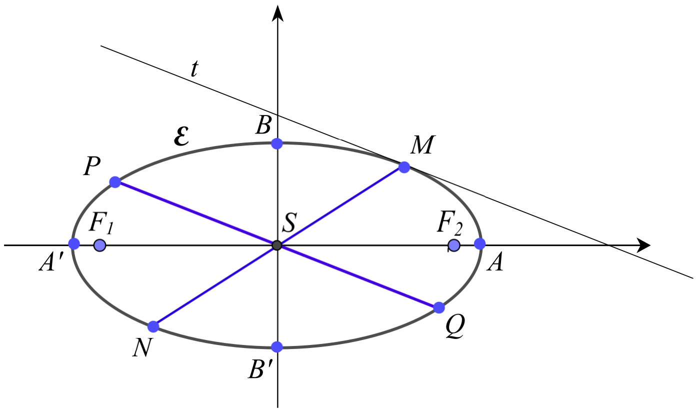
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

pri čemu je $a > b$. Točka $S(0,0)$ je središte elipse (1). Dužina $\overline{AA'}$ zove se glavna (velika) os elipse, a dužine $\overline{SA}$ i $\overline{SB}$ glavne (velike) poluosi elipse. Dužina $\overline{BB'}$ zove se sporedna (mala) os elipse, a dužine $\overline{SB}$ i $\overline{SB'}$ sporedne (male) poluosi elipse. Točke $A'(-a,0)$ i $A(a,0)$ su glavna tjemena, a točke $B'(0,-b)$ i $B(0,b)$ su sporedna tjemena elipse. $A'A$ i $B'B$ su ujedno osi

simetrije elipse $\mathcal{E}$ (slika 1).
Nadalje označavat ćemo s c linearni ekscentricitet elipse (1)

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}. \tag{2}$$

Točke $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$ su fokusi (žarišta) elipse $\mathcal{E}$ i nalaze se na glavnoj osi elipse.



Slika 1:

Uzmimo sada promjer elipse $\mathcal{E}$ kojemu su krajnje točke $M(x_1, y_1)$ i $N(-x_1, -y_1)$, $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$. Točke M i N leže na elipsi $\mathcal{E}$, pa vrijedi

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Nađimo krajnje točke $P(x_2, y_2)$ i $Q(-x_2, -y_2)$ promjera $\overline{PQ}$, koji je konjugiran promjeru $\overline{MN}$ elipse $\mathcal{E}$.

Jednadžba tangente elipse $\mathcal{E}$ u točki M glasi

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1, \tag{4}$$

pa jednadžba pravca na kojem leži $\overline{PQ}$ glasi

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 0. \tag{5}$$

Sjecišta pravca (5) s elipsom (1) su ove krajnje točke promjera $\overline{PQ}$ koji je konjugiran promjeru $\overline{MN}$

$$P\left(-a \cdot \frac{y_1}{b}, b \cdot \frac{x_1}{a}\right), \; Q\left(a \cdot \frac{y_1}{b}, -b \cdot \frac{x_1}{a}\right). \tag{6}$$

Odavde slijedi da je $x_2 = -a \cdot \dfrac{y_1}{b}$ i $y_2 = b \cdot \dfrac{x_1}{a}$ i da je promjer $\overline{PQ}$ koji je konjugiran promjeru $\overline{MN}$ jednoznačno određen. Zanimljivo je uočiti da za konjugirane promjere $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$, gdje je $M(x_1, y_1)$, $N(-x_1, -y_1)$, $P(x_2, y_2)$, $Q(-x_2, -y_2)$, vrijedi $x_1 y_1 = -x_2 y_2$.

Izaberemo li sada promjer $\overline{PQ}$, $P(x_2, y_2)$ i $Q(-x_2, -y_2)$, koji je konjugiran promjeru $\overline{MN}$ kao početni, tada će jedna krajnja točka, recimo R, njemu konjugiranog promjera $\overline{RS}$ imati, po formuli (6), koordinate:

$$x_R = -a \cdot \frac{y_2}{b} = -x_1 \;\text{ i }\; y_R = b \cdot \frac{x_2}{a} = -y_1.$$

Vidimo da je $R = N$, pa je promjer konjugiran promjeru $\overline{PQ}$ opet polazni promjer $\overline{MN}$.

Potvrdimo to i na drugi način. Neka promjer $\overline{MN}$ zatvara s pozitivnim dijelom x osi kut α, a njemu konjugirani promjer $\overline{PQ}$ (vidjeti (6)) kut β. Tada koeficijent smjera k_1 pravca MN iznosi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1},$$

a koeficijent smjera k_2 pravca PQ iznosi, prema (6),

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-b \cdot \frac{x_1}{a}}{a \cdot \frac{y_1}{b}} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Stoga vrijedi $k_2 = -\dfrac{b^2}{k_1 a^2}$, odnosno:

$$k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{7}$$

Jednadžbu tangente na elipsu u točki P iz (6), glasi

$$-\frac{x \cdot y_1}{ab} + \frac{y \cdot x_1}{ab} = 1. \tag{8}$$

Iz (8) vidimo da je koeficijent smjera tangente na elipsu u točki P dan s $\dfrac{y_1}{x_1} = k_1$, pa je $\overline{MN}$ promjer koji je konjugiran promjeru $\overline{PQ}$.

Sada imamo ovu definiciju konjugiranih promjera [1, 1.2. Klasifikacija krivulja 2. stupnja, Definicija 7, str. 5]:

Definicija 2.2. *Dva promjera elipse zvat ćemo konjugiranim (spregnutim) ako su tangente elipse povučene u krajnjim točkama jednog promjera paralelne s drugim promjerom.*

Tako su gore opisani promjeri $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ konjugirani promjeri elipse. Polumjere $\overline{SM}$ i $\overline{SP}$ zvat ćemo konjugiranim polumjerima elipse (slika 1).

Ujedno smo dokazali da vrijedi i ova tvrdnja:

Propozicija 2.1. *Dva pravca $y = k_1 x$ i $y = k_2 x$, $k_1 \neq 0$ i $k_2 \neq 0$, određuju pravce na kojima leže konjugirani promjeri elipse (1) ako i samo ako vrijedi (7).*

Iz propozicije 2.1 vidimo da su k_1 i k_2 suprotnih predznaka. Iz propozicije 2.1 slijedi da konjugirani promjeri elipse (koja nije kružnica) za koje je $k_1 \neq 0$ i $k_2 \neq 0$ ne mogu biti okomiti, jer je $k_1 \cdot k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \neq -1$. Ostaju jedino velika os $\overline{A'A}$ i mala os $\overline{B'B}$ elipse, koji su jedini okomiti konjugirani promjeri elipse (koja nije kružnica). U [1, 1.2. Klasifikacija krivulja 2. stupnja, Definicija 8, str. 5] ta činjenica se koristi za definiciju glavnih osi elipse.

U slučaju kružnice, koja je specijalni slučaj elipse (1) za $a = b$, konjugiranost je po propoziciji 2.1 karakterizirana uvjetom $k_1 \cdot k_2 = -1$, što je uvjet okomitosti dvaju pravaca na kojima leže konjugirani promjeri. Konjugiranost promjera kod kružnice svodi se dakle na okomitost tih promjera, a tangencijalni paralelogram postaje kod kružnice tangencijalni kvadrat u koji je kružnica upisana.

Napomena 2.1. *Lako se vidi da pravac $y = kx$, $k \in R$, siječe elipsu (1) u točki*

$$M\left(\frac{ab}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}, \frac{kab}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}\right)$$

i njoj dijametralno suprotnoj točki N elipse, a da pravac na kojemu leži njemu konjugirani promjer, $y = -\dfrac{b^2}{ka^2}x$ siječe istu elipsu u točki

$$P\left(-\frac{ka^2}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{k^2a^2+b^2}}\right)$$

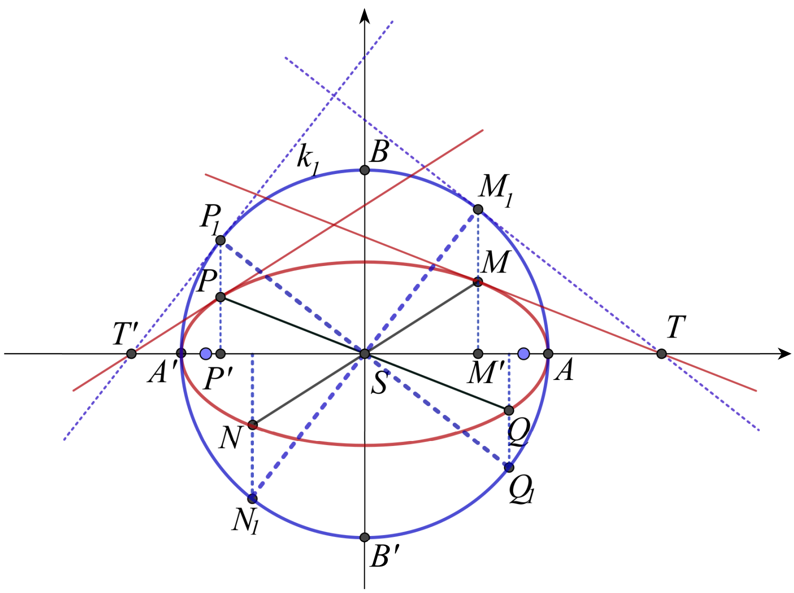
i njoj dijametralno suprotnoj točki Q elipse. Promjeri $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ su konjugirani promjeri elipse (1).

Zadatak 2.1. *Neka su $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ par konjugiranih promjera elipse i $M(x_1, y_1) = M(a \cdot \cos t, b \cdot \sin t)$ i $P(x_2, y_2) = P(a \cdot \cos T, b \cdot \sin T)$, $0 \leq t, T \leq 2\pi$, dvije točke elipse $\mathcal{E}$ zadane s (1). Pokažite, koristeći (7), da je tada $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{tg} T = -1$, odakle slijedi da je $T - t = \frac{\pi}{2}$ ili $t - T = \frac{\pi}{2}$. Odatle zaključite da je $P(-a \cdot \sin t, b \cdot \cos t)$ ili $P(a \cdot \sin t, -b \cdot \cos t)$, pa stoga vrijede formule (6).*

Primijetimo još da se točka $M(a \cdot \cos t,\, b \cdot \sin t)$ dobiva iz točke $M_1(a \cdot \cos t,\, a \cdot \sin t)$ primicanjem točke M_1 k osi x točno $\frac{b}{a}$ puta u smjeru osi y, a isto tako se točka $P(-a \cdot \sin t, b \cdot \cos t)$ dobiva iz točke $P_1(-a \cdot \sin t, a \cdot \cos t)$. To sažimanje (kontrakcija) k osi x u smjeru osi y je *perspektivna afinost*, kojoj je os x os afiniteta, a zrake afiniteta su paralelne s osi y. Točke M_1 i P_1 leže na kružnici k_1 s jednadžbom $x^2 + y^2 = a^2$, pravci SM_1 i SP_1 su okomiti, pa je par konjugiranih promjera $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ elipse $\mathcal{E}$ dobiven kao perspektivno afina slika para okomitih promjera $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{P_1Q_1}$ kružnice k_1.

Perspektivna afinost preslikava kružnicu k_1 u elipsu $\mathcal{E}$, a tangencijalni kvadrat okomitih promjera kružnice k_1 u tangencijalni paralelogram konjugiranih promjera elipse $\mathcal{E}$. Time smo opravdali ovu važnu karakterizaciju konjugiranih promjera elipse:

Propozicija 2.2. *Konjugirani promjeri elipse $\mathcal{E}$ su perspektivno afina slika međusobno okomitih promjera one kružnice koja se tom perspektivnom afinošću preslikava u elipsu $\mathcal{E}$.*



Slika 2:

Tvrdnja propozicije 2.2 prikazana je i slikom 2. Točka S je središte elipse, a konjugirani polumjeri $\overline{SP}$ i $\overline{SM}$ elipse su perspektivno afine slike okomitih polumjera $\overline{SP_1}$ i $\overline{SM_1}$ one kružnice koja se po toj perspektivnoj afinosti preslikava u elipsu. Perspektivna afinost preslikava točku M_1 kružnice u točku M elipse, a točku P_1 kružnice u točku P elipse. Tangenta u točki M_1 kružnice preslikava se u tangentu u točki M elipse, a obje tangente sijeku se na pravcu $A^{'}A$, koji je os perspektivne afinosti. Zrake perspektivne afinosti okomite su na os $A^{'}A$. Promjer $\overline{A^{'}A}$ kružnice k_1 na slici 2 je ujedno glavna os elipse.

Pokazuje se da tvrdnja propozicije 2.2 ne ovisi ni o perspektivnoj afinosti ni o kružnici koju preslikavamo u elipsu $\mathcal{E}$, pa se karakterizacija konjugiranih promjera elipse u propoziciji 2.2 može uzeti kao definicija konjugiranih promjera elipse, vidjeti [1, 1.3.2. Perspektivna afinost u ravnini, Definicija 12, str. 10]. Nadalje, uz takvu definiciju, svojstvo navedeno u definiciji 2.2 postaje dokazivo svojstvo konjugiranih promjera. Dokazuje se koristeći svojstvo perspektivne afinosti da ona preslikava dva paralelna pravca opet u dva paralelna pravca i da prema tome tangencijalni kvadrat kružnice preslikava u tangencijalni paralelogram elipse. Više o definiciji i svojstvima perspektivne afinosti može se naći u knjizi [1, 1.3.2. Perspektivna afinost u ravnini, str. 9 -13].

3 Jedno svojstvo konjugiranih promjera

Dokažimo, koristeći definiciju 2.2, jedno svojstvo konjugiranih promjera elipse.

Propozicija 3.1. *Neka je $\overline{MN}$ promjer elipse $\mathcal{E}$. Polovišta svih tetiva elipse $\mathcal{E}$ koje su paralelne s promjerom $\overline{MN}$ leže na jednom promjeru elipse $\mathcal{E}$, i to na onom promjeru elipse $\mathcal{E}$ koji je konjugiran (spregnut) promjeru $\overline{MN}$.*

Dokaz. Neka promjer $\overline{MN}$ leži na pravcu $y = kx$. Tetive elipse paralelne s pravcem MN leže na pramenu paralelnih pravaca $y = kx + l$, $l \in \mathbf{R}$ parametar pramena. Pravac $y = kx + l$ siječe elipsu (1) u dvije točke oblika $(x_{1,2}, kx_{1,2} + l)$ pri čemu su $x_{1,2}$ rješenja kvadratne jednadžbe

$$(k^2a^2 + b^2)x^2 + 2kla^2x + a^2l^2 - a^2b^2 = 0.$$

Korištenjem prve Viétove formule dobivamo:

$$x_p = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{ka^2}{k^2a^2 + b^2}l,$$

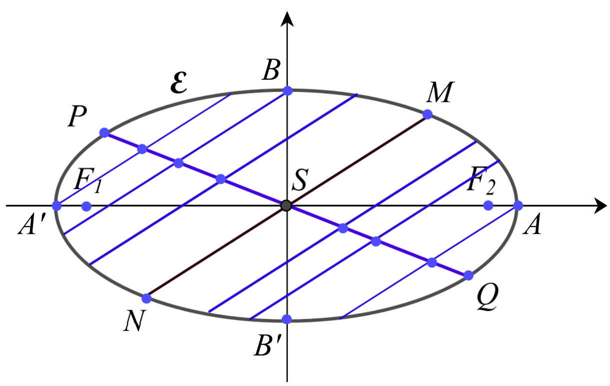
odakle slijedi

$$y_p = \frac{y_1 + y_2}{2} = k\frac{x_1 + x_2}{2} + l = \frac{b^2}{k^2a^2 + b^2}l.$$

Vidimo da polovišta (x_p, y_p) promatranih tetiva leže na pravcu
$$y = \frac{y_p}{x_p}x = -\frac{b^2}{ka^2}x.$$
Neka pravac $y = -\dfrac{b^2}{ka^2}x$ siječe elipsu u točkama P i Q. No kako vrijedi $k \cdot (-\dfrac{b^2}{ka^2}) = -\dfrac{b^2}{a^2}$, po propoziciji 2.1 slijedi da je promjer $\overline{PQ}$ konjugiran s promjerom $\overline{MN}$. □

Pretpostavimo da smo krenuli od promjera $\overline{PQ}$ koji leži na pravcu $y = k_1x$, $k_1 = -\dfrac{b^2}{ka^2}$. Polovišta svih tetiva elipse $\mathcal{E}$, koje su paralelne s promjerom $\overline{PQ}$, leže na pravcu s keoficijentom smjera $k_2 = -\dfrac{b^2}{a^2k_1} = k$, dakle na pravcu na kojem leži promjer $\overline{MN}$ elipse. Dakle konjugirani promjer promjeru $\overline{PQ}$ je upravo polazni promjer $\overline{MN}$. Slijedi da se svojstvo promjera $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ iz propozicije 3.1 može iskoristiti za ovu definiciju konjugiranih promjera elipse, [1, Definicija 6, str. 5]:

Definicija 3.1. *Dva promjera elipse ćemo zvati konjugiranima ako jedan od njih raspolavlja tetive elipse paralelne s drugim promjerom (slika 3).*



Slika 3:

Može se pokazati da promjeri koji zadovoljavaju definiciju 3.1 imaju svojstvo kojim smo ih definirali u definiciji 2.2 i da za njih vrijedi i karakterizacija iz propozicije 2.2. Lako se provjeri da kod kružnice (specijalan slučaj elipse za $a = b$ u (1)) definicije 2.2 i 3.1 konjugiranih promjera daju dva okomita promjera kružnice. Obratno, svaki okomiti par promjera kružnice zadovoljava te definicije, pa je par okomitih promjera kružnice ujedno i par konjugiranih promjera kružnice.

4 Apolonijevi poučci

Neka je $2p$ duljina proizvoljnog promjera $\overline{MN}$ elipse $\mathcal{E}$, a $2q$ duljina njemu konjugiranog promjera $\overline{PQ}$. Uzmimo da točka $M(x_1, y_1)$ leži u prvom kvadrantu i da je $P(x_2,y_2)$. Očito vrijedi:

$$p^2 = x_1^2 + y_1^2, \tag{9}$$
$$q^2 = x_2^2 + y_2^2,$$

što zbog (6) možemo zapisati na sljedeći način

$$q^2 = a^2\frac{y_1^2}{b^2} + b^2\frac{x_1^2}{a^2}. \tag{10}$$

Neka je ψ kut što ga zatvaraju konjugirani promjeri $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ elipse $\mathcal{E}$. Neka, kao u poglavlju 1.2 ovog rada, promjer $\overline{MN}$ zatvara s pozitivnim dijelom x osi kut α, a njemu konjugirani promjer $\overline{PQ}$ kut β. Vrijedi $\psi = \beta - \alpha$, pa po adicijskom teoremu za funkciju tangens, iz (3) i (2) imamo:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot tg\beta} = \frac{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1} - \frac{y_1}{x_1}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = -\frac{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}{c^2x_1y_1} = -\frac{a^2b^2}{c^2x_1y_1}. \tag{11}$$

Iskažimo i dokažimo sada prvi Apolonijev poučak.

Teorem 4.1 (prvi Apolonijev poučak). *Za svaki par konjugiranih promjera $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ elipse (1) vrijedi*

$$p^2 + q^2 = a^2 + b^2, \tag{12}$$

gdje je $|MN| = 2p$ i $|PQ| = 2q$.

Dokaz. Prvi način: Koristeći relacije (9), (10) i (3) imamo:

$$p^2 + q^2 = x_1^2 + y_1^2 + a^2\frac{y_1^2}{b^2} + b^2\frac{x_1^2}{a^2} = (a^2 + b^2)\cdot(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}) = a^2 + b^2.$$

Drugi način: Iz relacija (3) i (9) dobivamo

$$x_1^2 = \frac{a^2}{c^2}(p^2 - b^2) \tag{13}$$

i

$$y_1^2 = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - p^2) \tag{14}$$

Uvrstimo li (13) i (14) u (10), nakon sređivanja imamo $q^2 = a^2 + b^2 - p^2$, tj. (12). $\square$

Prvi Apolonijev poučak, teorem 4.1, tvrdi da je zbroj kvadrata duljina bilo kojih dvaju konjugiranih promjera elipse uvijek isti i jednak zbroju kvadrata duljina njezine glavne i sporedne poluosi.

Da bismo dokazali drugi Apolonijev poučak koristit ćemo vektore, te pojam skalarnog i vektorskog produkta vektora.

Neka su $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ dva konjugirana promjera elipse (1). Neka je, kao i prije, točka $M(x_1, y_1), x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$, a točka $P(x_2, y_2) = P\left(-a \cdot \frac{y_1}{b}, b \cdot \frac{x_1}{a}\right)$. Neka su $\overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{j}$ jedinični vektori u smjeru pozitivne osi x i pozitivne osi y. Neka su $\overrightarrow{SM} = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{SP} = -a \cdot \frac{y_1}{b} \overrightarrow{i} + b \cdot \frac{x_1}{a} \overrightarrow{j}$ radij vektori (vidjeti (6)). Oni zatvaraju isti kut ψ kao i konjugirani promjeri $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$, a njihove duljine su $\left|\overrightarrow{SM}\right| = p$ i $\left|\overrightarrow{SQ}\right| = q$. Skalarni produkt vektora opisan je u udžbeniku [2, četvrto poglavlje: Vektori, 4.8. Skalarni produkt vektora, str. 111-116]. Podsjetimo se da je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{SM}$ i $\overrightarrow{SP}$ skalar definiran s

$$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SP} = p \cdot q \cdot \cos\psi = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2. \tag{15}$$

Sada imamo, koristeći (6) i (2),

$$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SP} = -x_1 \cdot (a\frac{y_1}{b}) + y_1 \cdot (b\frac{x_1}{a}) = (-\frac{a}{b} + \frac{b}{a})x_1 y_1 = -\frac{c^2}{ab}x_1 y_1. \tag{16}$$

Zadatak 4.1. *Neka je $\overline{MN}$ promjer elipse (1), pri čemu je $M(x_1, y_1)$. Neka je $\overline{PQ}$ njemu konjugiran promjer. Na temelju formula (15), (16) i Apolonijevog poučka (4.1), pokažite da za šiljasti kut ψ između konjugiranih promjera $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ vrijedi*

$$\cos\psi = \frac{c^2 |x_1 y_1|}{ab \cdot pq} = \frac{c^2 |x_1 y_1|}{ab\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{a^2 + b^2 - x_1^2 - y_1^2}}$$

Vektorski produkt $\overrightarrow{SM} \times \overrightarrow{SP}$ je vektor koji je okomit na $\overrightarrow{SM}$ i $\overrightarrow{SP}$, a duljina mu je jednaka površini paralelograma određenog vektorima $\overrightarrow{SM}$ i $\overrightarrow{SP}$, a orijentacija mu se određuje po pravilu desnog vijka (ili desne ruke), [3,

§1. Vektori u ravnini i prostoru, 10. Vektorski produkt, str. 43-47]. Dakle vrijedi

$$\left|\overrightarrow{SM} \times \overrightarrow{SP}\right| = pq \cdot \sin\psi. \tag{17}$$

Ako je $\overrightarrow{SM} = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{SP} = x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j}$, tada je duljina vektora $\overrightarrow{SM} \times \overrightarrow{SP}$ jednaka

$$\left|\overrightarrow{SM} \times \overrightarrow{SP}\right| = |x_1 y_2 - x_2 y_1| \tag{18}$$

Iskažimo i dokažimo sada drugi Apolonijev poučak.

Teorem 4.2 (drugi Apolonijev poučak). *Za svaki par konjugiranih promjera $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ elipse $\mathcal{E}$ vrijedi:*

$$pq \cdot \sin\psi = ab, \tag{19}$$

gdje je $|MN| = 2p$ i $|PQ| = 2q$.

Dokaz. Tvrdnja (19) očito vrijedi za glavne osi elipse $\mathcal{E}$. Koristeći (15), (16) i (11) imamo

$$pq \cdot \sin\psi = pq \cdot \cos\psi \cdot \operatorname{tg}\psi = -\frac{c^2}{ab} x_1 y_1 \cdot \left(-\frac{a^2 b^2}{c^2 x_1 y_1}\right) = ab.$$

Računamo li duljinu vektora $\overrightarrow{SM} \times \overrightarrow{SP}$ po formuli (18) i koristimo li (3), imamo:

$$\left|\overrightarrow{SM} \times \overrightarrow{SP}\right| = \left|(-\frac{b}{a}x_1) \cdot x_1 - \frac{a}{b}y_1 \cdot y_1\right| = ab\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = ab. \tag{20}$$

□

Drugi Apolonijev poučak, iskazan teoremom 4.2, tvrdi da tangencijalni paralelogram određen bilo kojim parom konjugiranih promjera elipse ima uvijek istu površinu, jednaku površini tangencijalnog pravokutnika određenog s velikom i malom osi elipse, tj. s $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$.

Apolonijevi poučci tj. formule (12) i (19) mogu nam poslužiti da na još jedan način karakteriziramo konjugirane promjere. Naime, vrijedi ova propozicija:

Propozicija 4.3. *Neka su u elipsi $\mathcal{E}$ zadanoj s (1) odabrana dva promjera duljina $2p$ i $2q$, takvi da vrijedi (12) i (19). Tada su takva dva promjera par konjugiranih promjera elipse.*

Dokaz. Uzmimo da promjer $\overline{MN}$ duljine $2p$, pri čemu je $a > p > b$, leži u prvom i trećem kvadrantu, a točka $M(x_1, y_1)$ leži u prvom kvadrantu.

Tada, po (13) i (14) vrijedi: $x_1 = \dfrac{a}{c}\sqrt{p^2 - b^2}$ i $y_1 = \dfrac{b}{c}\sqrt{a^2 - p^2}$, gdje je c definiran s (2).

Neka je $\overline{PQ}$ promjer duljine $2q$ takav da vrijede (12) i (19). Ako je $P(x_2, y_2)$, tada je $x_2^2 = \frac{a^2}{c^2}(q^2 - b^2)$ i $y_2^2 = \frac{b^2}{c^2}(a^2 - q^2)$ i zbog (12) imamo $x_2 = -\frac{a}{c}\sqrt{a^2 - p^2}$ i $y_2 = \pm\frac{b}{c}\sqrt{p^2 - b^2}$ (imamo dva kandidata za $\overline{PQ}$). Uvjet (19) možemo zapisati $|x_2y_1 - x_1y_2| = ab$ (vidi (17) i (18)). Računajmo $|x_2y_1 - x_1y_2|$. Za predznak $-$ kod y_2 imamo:
$|x_1y_2 - x_2y_1| = \frac{ab}{c^2}\left|-(p^2 - b^2) + a^2 - p^2\right| = \frac{ab}{c^2}\left|a^2 + b^2 - 2p^2\right| \neq ab$ i uvjet (19) nije ispunjen. Za predznak $+$ kod y_2 vrijedi uvjet (19), jer $|x_1y_2 - x_2y_1| = \frac{ab}{c^2}(p^2 - b^2 + a^2 - p^2) = ab$. Dakle oba Apolonijeva zahtjeva (12) i (19) zadovoljava jedino promjer $\overline{PQ}$, pri čemu je $P(x_2, y_2)$ i $x_2 = -\frac{a}{c}\sqrt{a^2 - p^2}$ i $y_2 = \frac{b}{c}\sqrt{p^2 - b^2}$. Očito vrijedi: $x_2 = -a \cdot \frac{y_1}{b}$, $y_2 = b \cdot \frac{x_1}{a}$. Pokazali smo, po dokazanoj relaciji (6) za konjugirane promjere elipse, da je promjer $\overline{PQ}$ konjugiran promjeru $\overline{MN}$. $\square$

Teoremi (4.1), (4.2) i propozicija (4.3) daju novu karakterizaciju konjugiranih promjera elipse:

Propozicija 4.4. *Neka su u elipsi $\mathcal{E}$ zadanoj s (1) odabrana dva promjera duljina $2p$ i $2q$, koji zatvaraju kut ψ. Tada su takva dva promjera par konjugiranih promjera elipse $\mathcal{E}$ onda i samo onda ako vrijede Apolonijevi poučci, teorem 4.1 i teorem 4.2, tj. ako i samo ako vrijede formule (12) i (19).*

Zadatak 4.2. *Neka je elipsa zadana s dva svoja konjugirana promjera duljina $2p$ i $2q$, koji čine kut ψ. Pokažite, pomoću Apolonijevih poučaka, teoremi 4.1 i 4.2, da za duljine njenih glavnih poluosi a i b vrijede formule:*

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cdot \sin\psi} + \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq \cdot \sin\psi}\right) \qquad (21)$$

i

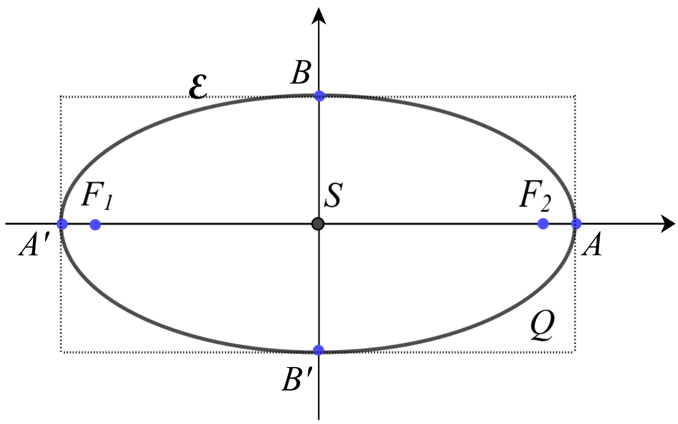
$$b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p^2 + q^2 + 2pq \cdot \sin\psi} - \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq \cdot \sin\psi}\right). \qquad (22)$$

Poznato je da je elipsa zadana jednim parom njenih konjugiranih promjera, koji su zadani i po položaju i po veličini (duljini), pa imamo zadane njihove duljine $2p$, $2q$ i kut ψ između njih. Za taj način zadavanja elipse poznata je *Rytzova konstrukcija* (1845.) velike i male osi elipse (vidjeti [1, 1.4.5. Konstrukcija elipse zadane parom konjugiranih promjera, str. 17]). Analiza Rytzove konstrukcije pokazuje da ona određuje duljine velike i male osi tako da se ravnalom i šestarom konstruiraju dužine onih duljina koje su na desnim stranama formula (21) i (22). No, konstrukcija ujedno daje i pravce nosioce velike i male osi elipse, i time ih određuje i po položaju i po veličini (duljini).

5 Neke zanimljivosti

Pogledajte sliku 4 na kojoj je prikazan tangencijalni pravokutnik što ga čine jedini okomiti konjugirani promjeri elipse (1), dakle dužine $\overline{A'A}$ i $\overline{B'B}$, njena glavna i sporedna os.

Dijagonale tangencijalnog pravokutnika glavne i sporedne osi elipse leže na pravcima $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$, koji sijeku elipsu $\mathcal{E}$ u točkama:
$M_1(a\frac{\sqrt{2}}{2}, b\frac{\sqrt{2}}{2})$, $N_1(-a\frac{\sqrt{2}}{2}, -b\frac{\sqrt{2}}{2})$ i $P_1(-a\frac{\sqrt{2}}{2}, b\frac{\sqrt{2}}{2})$, $Q_1(a\frac{\sqrt{2}}{2}, -b\frac{\sqrt{2}}{2})$ (ucrtajte dijagonale i te četiri točke na slici 4).



Slika 4:

Primijetimo da su ti promjeri simetrični i s obzirom na os x, i s obzirom na os y, pa su stoga jednakih duljina. Tangencijalni paralelogram tih promjera je stoga tangencijalni romb. Pokazat ćemo da su promjeri $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{P_1Q_1}$ konjugirani promjeri elipse. U tu svrhu potrebna je sljedeća propozicija:

Propozicija 5.1. *Neka su promjeri $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ konjugirani promjeri elipse (1). Dijagonale tangencijalnog paralelograma konjugiranih promjera $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ određuju pravce na kojima leže konjugirani promjeri $\overline{M_dN_d}$ i $\overline{P_dQ_d}$ elipse (1).*

Dokaz. Neka je $M(x_1, y_1)$ točka elipse (1). Tada je, po (6), $P\left(-a \cdot \frac{y_1}{b}, b \cdot \frac{x_1}{a}\right)$.
Tvrdnja propozicije je da su pravci nosioci vektora $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SP}$ i $\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SP}$ pravci na kojima leže konjugirani promjeri $\overline{M_d N_d}$ i $\overline{P_d Q_d}$ elipse (1). Dokažimo to.

$$\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SP} = \left(x_1 - \frac{a}{b}y_1\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{b}{a}x_1 + y_1\right)\overrightarrow{j},$$

i koeficijent smjera njegovog pravca nosioca je:

$$\frac{\frac{b}{a}x_1 + y_1}{x_1 - \frac{a}{b}y_1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{bx_1 + ay_1}{bx_1 - ay_1}.$$

Nadalje,

$$\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SP} = \left(x_1 + \frac{a}{b}y_1\right)\overrightarrow{i} + \left(-\frac{b}{a}x_1 + y_1\right)\overrightarrow{j},$$

i koeficijent smjera njegovog pravca nosioca je:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{-bx_1 + ay_1}{bx_1 + ay_1}.$$

Ako je $-bx_1 + ay_1 \neq 0$ i $bx_1 + ay_1 \neq 0$, tada je

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{bx_1 + ay_1}{bx_1 - ay_1} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{-bx_1 + ay_1}{bx_1 + ay_1} = -\frac{b^2}{a^2},$$

pa po propoziciji 2.1 imamo tvrdnju.
Ako je $-bx_1 + ay_1 = 0$ ili $bx_1 + ay_1 = 0$, tada je par konjugiranih promjera $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ sukladan paru konjugiranih promjera $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{P_1Q_1}$, koji leže na pravcima $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$, simetričnim s obzirom na osi elipse. Sada vrijedi $\overrightarrow{SM_1} + \overrightarrow{SP_1} = b\sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{SM_1} - \overrightarrow{SP_1} = a\sqrt{2}\,\overrightarrow{i}$ ili $\overrightarrow{SM_1} + \overrightarrow{SP_1} = -b\sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{SM_1} - \overrightarrow{SP_1} = a\sqrt{2}\,\overrightarrow{i}$. Vidimo da tada dijagonale tangencijalnog romba konjugiranih promjera $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{P_1Q_1}$ određuju pravce glavne i sporedne osi elipse, na kojima leže okomiti konjugirani promjeri - glavna i sporedna os elipse. □

Zadatak 5.1. *Pokažite, pomoću napomene 2.1, da dijagonale tangencijalnog paralelograma konjugiranih promjera $\overline{M_dN_d}$ i $\overline{P_dQ_d}$ elipse (1) dobivenih u propoziciji 5.1 leže na pravcima MN i PQ konjugiranih promjera $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ iz propozicije 5.1. Prikažite tvrdnju propozicije 5.1 i ovog zadatka jednom slikom elipse s njena dva tangencijalna paralelograma, jednim određenim konjugiranim promjerima $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ i drugim, određenim konjugiranim promjerima $\overline{M_dN_d}$ i $\overline{P_dQ_d}$.*

Po propoziciji 5.1, promjeri elipse $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{P_1Q_1}$ (koji leže na dijagonalama tangencijalnog pravokutnika elipse), su konjugirani promjeri elipse $\mathcal{E}$. Označimo njihove duljine s $2p_1$ i $2q_1$, a s θ šiljasti kut što ga oni zatvaraju. Kako je $p_1 = d(S, M_1)$ i $q_1 = d(S, P_1)$, imamo:

$$p_1 = q_1 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

i stoga vrijedi $p_1 = q_1$. Sa slike tangencijalnog pravokutnika i njegovih dijagonala, na kojima leže konjugirani promjeri $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{P_1Q_1}$, vidimo da je $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$.

Kako je $\sin\theta = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}$ i $\cos\theta = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}$, imamo $\sin\theta = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ i $\cos\theta = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Zadatak 5.2. *Pokažite da su $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{P_1Q_1}$ konjugirani promjeri elipse i tako da koristite propoziciju 4.3 i formule za p_1, q_1 i $\sin\theta$.*

Konjugirani promjeri $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{P_1Q_1}$ imaju niz zanimljivih svojstava koji ih karakteriziraju:

a) oni su jedini par konjugiranih promjera elipse jednakih duljina,
b) oni su jedini par konjugiranih promjera elipse simetričnih s obzirom i na glavnu i na sporednu os elipse,
c) tangencijalni paralelogram je jedino u slučaju tih konjugiranih promjera tangencijalni romb kojemu okomite dijagonale leže na x osi i na y osi,
d) od svih parova konjugiranih promjera oni zatvaraju najmanji šiljasti kut.

Tvrdnje b) i c) svode se na tvrdnju a), koja se dokazuju pomoću formula (13) i (14) i teorema 4.1. Dokažimo stoga samo tvrdnju d) pomoću dvaju Apolonijevih poučaka, teorema 4.1 i teorema 4.2. Neka su $2p$ i $2q$ duljine konjugiranih promjera $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$, a ψ šiljati kut što ga oni zatvaraju. Koristeći redom (19), nejednakost geometrijske i aritmetičke sredine u obliku

$$pq \leq \frac{p^2+q^2}{2},$$

zatim (12), pa opet (19), imamo ovaj niz nejednakosti

$$\sin\psi = \frac{ab}{pq} \geq \frac{2ab}{p^2+q^2} = \frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{ab}{p_1q_1} = \sin\theta.$$

Odatle $\psi \geq \theta$, jer su ψ i θ šiljasti kutovi. Jednakost $\psi = \theta$ vrijedi jedino u slučaju $p = q$. No zbog teorema 4.1, u slučaju jednakosti je $p = q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Dakle je $p = p_1$ i $q = q_1$. Po formulama (13) i (14) imamo $x_1^2 = \frac{a^2}{2}$ i $y_1^2 = \frac{b^2}{2}$. Kako su konjugirani promjeri $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ tada jednakih duljina $p_1 = q_1$, oni su simetrični s obzirom na os x i s obzirom na os y. Stoga imamo $\overline{MN} \cong \overline{M_1N_1}$ i $\overline{PQ} \cong \overline{P_1Q_1}$ ili $\overline{MN} \cong \overline{P_1Q_1}$ i $\overline{PQ} \cong \overline{M_1N_1}$.

Dokazali smo da jednakost $\psi = \theta$ vrijedi jedino u slučaju da je par konjugiranih promjera $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ sukladan paru konjugiranih promjera $\overline{M_1N_1}$ i $\overline{P_1Q_1}$.

Literatura

[1] I. Babić, S. Gorjanc, A. Sliepčević, V. Szirovicza, *Konstruktivna geometrija*, Vježbe, IGH, Zagreb, 1994.

[2] S. Kurepa, *Matematika 3 za treći razred gimnazije, Trigonometrijske funkcije, Analitička geometrija u ravnini*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[3] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Vektori-Matrice-Grupe, Školska knjiga, Zagreb 1975.