UDK 528.088.2:53.088.2
Pregledni znanstveni članak

Značenje i usporedbena analiza pojmova srednja pogreška i standardno odstupanje

Dušan BENČIĆ, Gorana NOVAKOVIĆ – Zagreb[1]

SAŽETAK. Uz kraći prikaz povijesnog razvitka mjera za ocjenu kvalitete mjerenja i rezultata, dan je poseban osvrt i usporedbena analiza pojmova standardno odstupanje i srednja pogreška u skladu s međunarodnim dogovorom za iskazivanje mjerne nesigurnosti kojim je standardno odstupanje prihvaćeno kao osnovna mjera nesigurnosti rezultata.

Ključne riječi: pogreška, odstupanje, srednja pogreška, standardno odstupanje, mjerna nesigurnost.

1. Uvod

U suvremenim mjerenjima zahtijeva se *mjeriteljska informacija* o izvršenim mjerenjima i rezultatu, koja će korisnicima dati jasne iskaze o *rezultatu i njegovoj kvaliteti*. Ona mora biti utemeljena na jasnoći pojmova i dovoljno podataka posebno o izabranome matematičkome modelu i primijenjenoj matematičko-statističkoj analizi. Međutim, neovisan razvoj tehničkih i prirodnih znanosti uzrokovao je i osebujan razvoj i različitosti u *terminologiji*, što je posebno došlo do izražaja s razvojem teorije vjerojatnosti i matematičke statistike. Prihvaćanjem tih teorija u udžbenicima teorije pogrešaka, ali izdvojeno kao metoda analize, dolazi do usporedne primjene pojmova kao što su: aritmetička sredina mjernog niza i najvjerojatnija vrijednost, odnosno najbolja nepristrana procjena veličine; pogreška, odnosno odstupanje; srednja pogreška, odnosno standardno odstupanje. To dovodi do nejasnoća u iskazu rezultata. No u doba globalnog razvoja i svjetskog tržišta prijeko je potrebno da u mjeriteljstvu, u cijelom svijetu, bude jednaka metoda proračuna i izražavanja rezultata i njegove kvalitete kako bi se i mjerenja provedena u različitim zemljama mogla usporediti i primjeniti. Stoga se u različitim područjima mjerne tehnike na-

[1] Prof. dr. sc. Dušan Benčić, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb
Prof. dr. sc. Gorana Novaković, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Kačićeva 26, 10000 Zagreb, e-mail: gorana.novakovic@geof.hr

stoji uvesti jedinstvenost u načinu iskazivanja mjeriteljske informacije, a također i terminologije, što uključuje i samo značenje nekih osnovnih pojmova.

Definicije osnovnih pojmova, uz obrazloženja prema međunarodnim normama te njihova tumačenja, dane su u publikaciji "*Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti*" (1995) i *Međunarodnom rječniku osnovnih i općih naziva u metrologiji* (1996). Ti osnovni pojmovi, njihove definicije i tumačenja, detaljno su prikazani u prvom dijelu projekta *Tehnički standardi katastarske izmjere* (Novaković 2002), izrađenog za potrebe Državne geodetske uprave, jer se u novo uspostavljenim pravilnicima, uputama i sl. koji se odnose na cjelokupnu geodetsku izmjeru, a također i u geodetskim udžbenicima i skriptama, trebaju primjenjivati međunarodnim normama propisani termini i postupci za iskazivanje mjernih rezultata, čime oni postaju izravno usporedivi.

Standardizirana terminologija pomoći će svim korisnicima, čime će se izbjeći dosadašnja upotreba višestrukih termina za isti pojam ili jedan termin za različite pojmove. Najviše nejasnoća javlja se pri upotrebi termina za iskazivanje kvalitete rezultata, odnosno pojmova *srednja pogreška* i *standardno odstupanje*. Stoga će se u ovom radu prikazati usporedbena analiza tih pojmova.

2. Pojam pogreška i srednja pogreška

Pojam *pogreške mjerenja* temeljni je pojam svih udžbenika geodezije i teorije pogrešaka s računom izjednačenja još od C. F. Gaussa. Tako naš uvaženi prof. dr. N. Čubranić kaže u osnovnim postavkama teorije pogrešaka: "Ponavljajući mjerenja dobivat ćemo rezultate koji će se više ili manje razlikovati, dolazimo do saznanja da su naša mjerenja više ili manje pogrešna. Same pogreške po svom karakteru dijelimo na: grube, sistematske i slučajne pogreške" (Čubranić 1967).

Danas se *pogreška mjerenja* definira kao odstupanje rezultata od *istinite* vrijednosti mjerene veličine (ISO 7078 E/F 1985). Jednaka je definicija i u Međunarodnom rječniku (1996), uz napomenu: kako se istinita vrijednost ne može odrediti, u praksi se upotrebljava *dogovorena istinita vrijednost*. Prema DIN 55350/11 (1987), *pogreška mjerenja* definirana je općenito kao neispunjavanje jednog zahtjeva. Npr. ako karakteristična vrijednost leži izvan područja tolerancije, radi se o pogrešci.

Prema tome, izraz *pogreška*, uz novu definiciju, ima smisaonu primjenu za:

- odstupanja od dogovorene istinite vrijednosti veličine,
- odstupanja koja prelaze veličine svojstvene razredu točnosti mjerila u iznosima koji se ne dopuštaju; npr. granične pogreške mjerila,
- odstupanja koja prelaze veličine dane statističkom analizom i testovima kojima se odbacuju neispravna mjerenja koja se smatraju pogrešnim,
- sustavna odstupanja od definirane referentne vrijednosti koja se moraju ispraviti, odnosno ukloniti, ili metodom mjerenja, ili računom; npr. pogreška horizontalne osi instrumenta, pogreška vertikalne osi, pogreška indeksa, pogreška podjele kruga,
- utvrđeno sustavno odstupanje pri mjernim uređajima,
- gruba pogreška,
- pogreška zaokruživanja.

Pojam *odstupanje* pojavljuje se već u XVII. stoljeću, najprije u teoriji vjerojatnosti, a poslije, s razvojem matematičke statistike, postaje jedan od osnovnih pojmova pri razmatranju obilježja, odnosno općih svojstava jedinica statističkog skupa. Pojam *odstupanje* primijenjen je zatim i u teoriji mjerenja, posebno prihvaćanjem analiza mjerenja i mjernih rezultata metodama teorije vjerojatnosti i matematičke statistike. Tako dolazimo do pojma *mjernog odstupanja* kao razlike između mjerene vrijednosti i referentne vrijednosti. U matematičkoj statistici referentna je vrijednost *očekivanje*, odnosno *očekivana vrijednost mjerene veličine* ili njezina procjena.

S primjenom pojma pogreške mjerenja, C. F. Gauss (1809) uveo je i pojam srednja pogreška. To je bila mjera, kako je Gauss rekao, "srednjeg odstupanja od istinitosti". Njegova je definicija glasila: Kvadrat srednje pogreške srednja je vrijednost kvadrata neizmjerno mnogo istinitih pogrešaka ε:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n},$$

odnosno srednja pogreška:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}, \quad n \to \infty.$$

U realnim je mjerenjima broj mjernih vrijednosti ograničen. Gauss je pri računanju pogrešaka uzeo aritmetičku sredinu kao *najvjerojatniju vrijednost*, kao aksiom (Čubranić 1967). Time su i odstupanja pojedinih mjernih vrijednosti od aritmetičke sredine *najvjerojatnije pogreške v,* na osnovi kojih se *srednja pogreška* računa prema:

$$(m) = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \quad n \neq \infty.$$

U matematičkoj statistici osnovni su parametri statističkog skupa (populacije) matematičko očekivanje μ i varijanca σ^2, odnosno standardno odstupanje σ kao pozitivni drugi korijen varijance. Uzimanjem *uzorka* iz osnovnog statističkog skupa, procjenjuju se osnovni parametri skupa, i to: *aritmetička sredina* uzorka $\bar{x}$ kao najbolja nepristrana procjena matematičkog očekivanja slučajne varijable X i varijanca s^2, odnosno (empirijsko) standardno odstupanje s, koje opisuje rasipanje rezultata, a dano je izrazom:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

gdje je x_i rezultat i-tog mjerenja, a $\bar{x}$ aritmetička sredina n razmatranih rezultata, ako primjenjujemo statističke analize za mjerni niz.

Prihvaćanjem statističkih pojmova u geodeziji pri vrednovanju rezultata uz zadržavanje pojma pogreške u klasičnom obliku i srednje pogreške kao ocjene točnosti mjerenja, dolazi do mnogih nejasnoća. Tako se npr. u normi DIN 18723/1 (1975) oba pojma, srednja pogreška i standardno odstupanje, izjednačuju kao istovjetni. W. Höpcke (1980) navodi definicije:

$\sigma = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}, \quad n \to \infty,$ kao *srednja pogreška*,

$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}, \quad n \neq \infty,$ kao *aproksimativna vrijednost srednje pogreške*, a

$(m) = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}, \quad n \neq \infty,$ naziva se *empirijsko rasipanje* ili *standardno odstupanje,*

gdje su ε *istinite pogreške*, a v *najvjerojatnije pogreške.*

Dakle, potpuno se zadržava pojam pogreška mjerenja, ali se za pojam procijenjene srednje pogreške primjenjuje i naziv standardno odstupanje. Takav ćemo pristup naći i u našim stručnim udžbenicima. Tako se npr. pri opisu pojma srednja pogreška iznosi (Feil 1989):

> "Najviše korišteni kriterij za ocjenu točnosti u računu izjednačenja je *srednja pogreška*, čiji naziv potječe još od Gaussa. Teorijski se definira kao:
>
> $$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon^t\varepsilon}{n}}, \quad n \to \infty.$$
>
> U praksi se međutim upotrebljava samo njezina približna vrijednost, tj.
>
> $$m = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon^t\varepsilon}{n}}, \quad n \neq \infty.$$
>
> Osim pravih pogrešaka, srednja pogreška može se računati i pomoću najvjerojatnijih pogrešaka, kao:
>
> $$(m) = \pm\sqrt{\frac{v^t v}{n-1}}, \quad n \neq \infty."$$

Isti autor (Feil 1990) navodi:

> "Uobičajena mjera preciznosti nekog mjerenja je *standardno odstupanje*". "Stupanj podudaranja ili približavanja nekog mjerenja njezinoj pravoj (istinitoj) vrijednosti naziva se *točnost*. Kako na točnost mjerenja osim slučajnih pogrešaka utječu i preostale sistematske pogreške, mjera točnosti bit će *srednja kvadratna pogreška* m^2, koja je definirana izrazom: $m^2 = E[(X\text{-}\tau)^2]$, gdje je τ istinita vrijednost. Na osnovi svojstava očekivanja lako se dobiva: $m^2 = \sigma^2+\Delta^2$, gdje je Δ preostala sistematska pogreška".

Da nejasnoća u usporedbi pojmova bude potpuna, Reissman (1983) u svom referatu na simpoziju Geodätische und Kartographische Tage u Dresdenu, kaže:

> "Srednja pogreška m i empirijsko standardno odstupanje s su istog iznosa, ako se računaju za isti mjerni niz. Međutim, sadržajno je značenje m i s različito, m je približna vrijednost istinite srednje pogreške, a s je procijenjena vrijednost za parametar σ osnovnog skupa, m se računa samo iz kontinuira-

ne razdiobe pogrešaka, s se može odrediti za svako obilježje kontinuirane ili diskretne razdiobe. Spoznajemo da se m primjenjuje samo za opis djelovanja pogrešaka, dok s ima širu primjenu. Srednja je pogreška poseban slučaj empirijskoga standardnog odstupanja. Ako se npr. u proizvodnji izradaka uzima uzorak i mjeri određena veličina, tada se iz ponovljenih mjerenja na jednom uzorku dobiva *mjerna točnost*, tj. srednja pogreška m, a iz mjerenja na više komada točnost izrade, tj. standardno odstupanje s. Na osnovi tih spoznaja čini se da je najrazumnije oba pojma srednja pogreška i standardno odstupanje zadržati jedan uz drugoga. Srednja pogreška kao poseban slučaj empirijskoga standardnog odstupanja ne može se jednostavno ukloniti, jer je i čitava tuzemna i inozemna literatura na nju usmjerena. Ne treba, međutim, sprječavati ni prodor u geodetsko područje opći pojam standardno odstupanje, što bi bilo pogrešno u interesu dobrog razumijevanja s predstavnicima drugih stručnih područja. Bitno je da svaki geodet spozna što je zajedničko a što različito između srednje pogreške i standardnog odstupanja”.

Već iz ovih nekoliko primjera iz geodetske literature vidimo nesklad tumačenja i definicija pojmova standardno odstupanje i srednja pogreška i u našem, geodetskom području. Očito je da je bilo nužno te pojmove pojasniti čak i međunarodnim usklađivanjem, to više što su razlike i primjena različite terminologije u drugim stručnim područjima učinile takvo stanje neodrživim u vremenu globalizacije i sve veće interdisciplinarnosti svih mjeriteljskih znanosti. U teoriji mjerenja uvodi se npr. novi pojam: *mjerna nesigurnost*. Mjerenja *nisu pogrešna* već *nesigurna*, a nesigurnost rezultata brojčani je iskaz o kvaliteti rezultata mjerenja. No postojali su i različiti iskazi mjerne nesigurnosti, a najviše je bio primijenjen način, prema DIN 1319/3 (1983), pri kojem se nesigurnost rezultata iskazivala dvjema sastavnicama; slučajnom (dane statističkim računom nepouzdanosti srednje vrijednosti) i sustavnom koja se odnosila na procjenu nepoznatih sustavnih odstupanja (Benčić, Dusman 1994). U nas pojam *nesigurnosti mjerenja* uvodi prof. dr. I. Hercigonja, osnivač Laboratorija za precizna mjerenja Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu, no uzima u obzir samo slučajna djelovanja. Za sustavna djelovanja primjenjuje izraz *nepravilnost* mjerenja, pa nesigurnost i nepravilnost zajedno predstavljaju *netočnost* mjerenja (Hercigonja 1968).

Sve te raznolikosti u tumačenjima i nesuglasje bili su poticaj za potrebu međunarodnog dogovora u proračunavanju, jednoznačnom tumačenju i iskazivanju nesigurnosti rezultata u vrlo različitim područjima mjerenja, pa i u geodetskim mjerenjima, kako bi u doba svjetskog tržišta bila u cijelom svijetu jednaka metoda proračuna i izražavanja mjerne nesigurnosti. O tome je već opširnije pisano u Geodetskom listu (Benčić 1998, a).

Sam pojam dogovor znači i postojanje različitih mišljenja te njihovo usklađivanje. Stoga će i danas biti kritičkih primjedbi, no nužno je da se u načelu i geodeti pridržavaju dogovora što je posebno važno zbog djelovanja na svim područjima mjeriteljstva i geoinformatike.

Međunarodni dogovor što ga je objavila Međunarodna organizacija za normizaciju (ISO 1993), prihvaćen od Državnog zavoda za normizaciju i mjeriteljstvo i u prijevodu objavljen 1995. godine, temelji se na definicijama kao što su: istinita i ispravljena vrijednost, pogreška, nesigurnost mjerenja, preciznost i točnost mjerenja te *standardnog odstupanja* kao mjere nesigurnosti. Uvodi se pojam *standardne nesigurnosti* i metoda proračuna sastavnica nesigurnosti A – vrste (metoda statističke analize niza opažanja) i B – vrste. Svaka sastavnica nesigurnosti mora se brojčano iskazati *standardnim odstupanjem* i ako su sastavnice iste naravi trebaju se obrađivati na isti način. To znači: kad *sustavna odstupanja nisu poznata* s njima se postupa kao da su slučajna u računanju mjerne nesigurnosti rezultata (Benčić 1998, b). Tomu ima prigovora u domaćoj stručnoj literaturi, no takav je dogovor i ima mnogo praktičnih razloga što je takav i prihvaćen.

Bitno je da je *istinita* vrijednost veličine definirana kao *idealizirani pojam*, a po tome je i točnost mjerenja samo *kvalitativan* pojam te se i *srednja pogreška* više ne uzima kao *kvantitativna* mjera točnosti.

Srednja pogreška u novim normama nije više ni definirana, ali se napominje, još 1984 god., da se više ne treba upotrebljavati (DIN 18709/4 1984).

Na osnovi izvoda iz stručne literature, razmotrena je usporedbena analiza pojmova srednja pogreška i standardno odstupanje kako bi se uočile razlike u njihovu tumačenju i njihovu značenju.

3. Standardno odstupanje u matematičkoj statistici

U matematičkoj statistici osnovni su parametri statističkog skupa (kolektiva) matematičko očekivanje μ i varijanca σ^2, odnosno standardno odstupanje σ. Odstupanja pojedinih vrijednosti od očekivane vrijednosti slučajna su. Uzimanjem uzorka iz osnovnoga statističkog skupa procjenjuju se osnovni parametri skupa. U matematičkoj statistici dokazuje se da je *aritmetička sredina* uzorka najbolja nepristrana *procjena* matematičkog očekivanja slučajne varijable X.

Ovdje se prikazuje kraći izvod formule za računanje standardnog odstupanja uzorka s, kao *procjene* standardnog odstupanja osnovnog skupa σ, prema udžbeniku prof. Vranića (1965), uz upotrebu istih oznaka i načina izražavanja:

Neka je σ_i standardno odstupanje i-tog uzorka, tj.

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_k (x_{ik} - \bar{x}_i)^2, \tag{1}$$

gdje je $\bar{x}_i$ srednja vrijednost uzorka.

Uveden je izraz:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_{ik} - \bar{x})^2, \tag{2}$$

gdje s znači *standardno odstupanje uzorka računano na sredinu* $\bar{x}$ *osnovnog skupa.*

U statističkoj teoriji dokazuje se da je *prosječna vrijednost svih mogućih uzoraka* jednaka sredini osnovnog skupa, tj. matematičkom očekivanju varijable X. Prema tome, taj s mogao bi dati u stanovitom smislu *procjenu za standardno odstupanje osnovnog skupa.* Slijedi, prema (2):

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_k [(x_{ik} - \bar{x}_i) + (\bar{x}_i - \bar{x})]^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_k (x_{ik} - \bar{x}_i)^2 + \frac{2}{n}\sum_k (x_{ik} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}) + \frac{1}{n}\sum_k (\bar{x}_i - \bar{x})^2.$$

Kako je:

$$\sum_k (x_{ik} - \bar{x}_i) = 0, \text{ a}$$

$$\sum_k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = n(\bar{x}_i - \bar{x})^2,$$

bit će:

$$s^2 = \sigma_i^2 + (\bar{x}_i - \bar{x})^2. \tag{3}$$

Iz te formule razabire se da je procjena varijance osnovnog skupa jednaka varijanci uzorka uvećanoj za $(\bar{x}_i - \bar{x})^2$, tj. kvadrat odstupanja svake sredine uzorka od sredine $\bar{x}$ osnovnog skupa. Ta veličina bit će u *prosjeku* jednaka *varijanci razdiobe sredina uzoraka,* tj.

$$(\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sigma_m^2.$$

U matematičkoj statistici izvodi se za varijancu σ_m^2 izraz (Vranić 1965):

$$\sigma_m^2 = \frac{N - n}{N - 1} \cdot \frac{\sigma^2}{n},$$

gdje je:

σ – standardno odstupanje osnovnog skupa,

N – broj članova osnovnog skupa,

n – broj članova svakog uzorka.

Ako se pretpostavi da je osnovni skup vrlo velik s obzirom na uzorak, može se uzeti da je $(N - n)/(N - 1)$ približno jednako 1, pa slijedi:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{ili} \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{4}$$

Ta je formula iznimno važna jer pokazuje odnos *standardnog odstupanja razdiobe sredina* σ_m prema *standardnom odstupanju osnovnog skupa* σ. Prema tome, formula (3) može se pisati, uzevši:

$$(\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

u obliku:

$$s^2 = \sigma_i^2 + \frac{\sigma^2}{n}.$$

Ako se uzme procijenjena vrijednost $s \approx \sigma$, bit će:

$$s^2 = \sigma_i^2 + \frac{s^2}{n} = \frac{n}{n-1}\sigma_i^2,$$

odnosno prema (1):

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_k (x_{ik} - \bar{x}_i)^2,$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_k (x_{ik} - \bar{x}_i)^2}. \tag{5}$$

Tako se dobiva standardno odstupanje s kao *procjena standardnog odstupanja osnovnog skupa*, koje se izračunava samo iz elemenata uzorka, a da se *ne pozna* ni sredina (očekivanje) ni standardno odstupanje osnovnog skupa (Vranić 1965). Poznavajući s možemo *procijeniti* i vrijednost *standardnog odstupanja razdiobe uzoraka* $s_m = s/\sqrt{n}$.

Navedene su i definicije pojmova varijanca i standardno odstupanje prema statističkom rječniku ISO 3534 (1977):

Varijanca (slučajne varijable ili razdiobe vjerojatnosti): očekivanje kvadrata usredištene slučajne varijable:

$$V(X) = \sigma^2 = E\{|X - E(X)|^2\}.$$

Varijanca (empirijska): mjera rasipanja koja se temelji na srednjoj vrijednosti kvadrata odstupanja od aritmetičke srednje vrijednosti ($\bar{x}$):

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2,$$

gdje vrijednost (n – 1) izražava broj prekobrojnih mjerenja.

Varijanca mjernog niza (kao statističkog uzorka) nepristrani je procjenjivač varijance populacije (osnovnog statističkog skupa).

Standardno odstupanje pozitivni je drugi korijen varijance. Standardno odstupanje *s procijenjena* je *vrijednost* standardnog odstupanja kolektiva σ računana iz uzorka i naziva se *empirijsko standardno odstupanje* ili *eksperimentalno standardno odstupanje*.

4. Srednja pogreška u teoriji pogrešaka

Srednja pogreška prema C. F. Gaussu definirana je kao kvadratni korijen srednje vrijednosti sume kvadrata *istinitih pogrešaka*.

U praksi je broj mjerenja neke veličine ograničen. E. Gotthardt (1968) kaže:

> Ako su sva mjerenja jednake točnosti i može se smatrati da se jednako pojavljuju i pozitivne i negativne pogreške, tada je na osnovi simetrije jednostavna *aritmetička sredina* svih opažanih vrijednosti *najvjerojatnija vrijednost*.
>
> Ako je X istinita vrijednost mjerene veličine, a $\overline{X}$ najvjerojatnija njezina vrijednost određena kao aritmetička sredina, tada treba razlikovati *istinite* pogreške ε i *najvjerojatnije* pogreške v, odrediti njihovu vezu i srednju pogrešku računanu iz najvjerojatnijih pogrešaka.
>
> Označi se razlika istinite vrijednosti X i aritmetičke sredine $\overline{X}$ sa Δ, tj.
>
> $\Delta = X - \overline{X}$, odnosno
>
> $X = \overline{X} + \Delta$, a isto tako i
>
> istinita pogreška: $-\varepsilon_i = x_i - X$, i
>
> najvjerojatnija pogreška: $-v_i = x_i - \overline{X}$, (6)
>
> slijedi i: $\varepsilon_i = v_i + \Delta$.
>
> Zbroj je istinitih pogrešaka u mjernom nizu, uz $[v_i] = 0$:
>
> $[\varepsilon] = n \cdot \Delta$. (7)
>
> Uzme li se zbroj kvadrata istinitih pogrešaka, uz oznake prema Gaussu, dobije se:
>
> $[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + 2[v]\,\Delta + n \cdot \Delta^2$, uz $[v] = 0$:
>
> $[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + n \cdot \Delta^2$, (8)
>
> $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{[vv]}{n} + \Delta^2$.

Taj izvod, uz razlike u oznakama, nalazi se u mnogim udžbenicima teorije pogrešaka (npr. Jordan-Eggert 1931, Čubranić 1967, Klak 1986). Uz definiciju srednje pogreške po Gaussu, bit će prema (8):

$$m^2 = \frac{[vv]}{n} + \Delta^2. \tag{9}$$

Već se tu može uočiti analogija, po obliku, s formulom (3) ali i značajna razlika u tumačenju. Naime, s je procjena standardnog odstupanja osnovnog skupa, a m srednja pogreška prema Gaussu. Član $(\overline{x}_i - \overline{x})^2 = \sigma_m$ varijanca je razdiobe sredina uzoraka, a $\Delta = [\varepsilon]/n$ je *istinita pogreška aritmetičke sredine* (Čubranić 1967).

Veličina $\Delta = X - \overline{X} = [\varepsilon]/n$ (v. formulu 7). u načelu može biti:

a) slučajna,

b) sustavna.

a) Prvi slučaj pripada potpuno području Gaussove teorije slučajnih pogrešaka. Ako u mjerenjima postoje *samo slučajne pogreške* vrijedi:

$$[\varepsilon]^2 = [\varepsilon\varepsilon]. \tag{10}$$

Ta značajna relacija u teoriji slučajnih pogrešaka slijedi iz razvoja:

$$[\varepsilon]^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n)^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n).$$

Kako u slučaju dovoljnog broja neovisnih mjerenja uz *slučajne pogreške* suma mješovitih produkata $\varepsilon_i\varepsilon_j$ teži nuli, to slijedi: $[\varepsilon]^2 = [\varepsilon^2] = [\varepsilon\varepsilon]$, a to je formula (10).

Uzme li se Gaussova definicija srednje pogreške:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}},$$

na osnovi formule (10), slijedi:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon]^2}{n}} = \frac{[\varepsilon]}{\sqrt{n}},$$

odnosno $[\varepsilon] = m\sqrt{n}$, pa će biti:

$$\Delta = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{m\sqrt{n}}{n} = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{11}$$

Taj izvod nalazi se u ovom ili sličnom obliku u svim udžbenicima teorije pogrešaka, a pokazuje kako se može, prema prof. Čubraniću (1967), "zamijeniti istinitu pogrešku aritmetičke sredine sa srednjom pogreškom aritmetičke sredine", dok npr. E. Gotthardt (1968) ispravno kaže da se istinita pogreška $[\varepsilon]/n$ *procjenjuje* izrazom $m/\sqrt{n}$.

Uvrsti li se, prema formuli (11), izraz $\frac{[\varepsilon]^2}{n^2} = \Delta^2 = \frac{m^2}{n}$ u formulu (9), dobije se:

$$m^2 = \frac{[vv]}{n} + \frac{m^2}{n}, \text{ odnosno}$$

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}. \tag{12}$$

Time je dobivena poznata formula za srednju pogrešku računana *na osnovi poznatih najvjerojatnijih pogrešaka* kao *procjena* istinite srednje pogreške.

Usporedi li se ovaj izvod s izvodom standardnog odstupanja (formula 5) vidi se analogija, ali nedostaje onaj jasan zor koji daje statistička analiza. To više što se ne ističe da je srednja pogreška izražena formulom (12) *procjena srednje pogreške* neograničenog mjernog niza definirana prema Gaussu (v. Čubranić 1967, Feil 1989), a koji izraz tek daje jasno značenje računane srednje pogreške mjernog niza. Da nesporazumi u tumačenjima budu još veći, W. Höpcke (1980) izraz (12) naziva i standardnim odstupanjem. A u DIN normi 18723/1 (1975) navodi se čak termin "standardno odstupanje mjerne vrijednosti". Taj će se izraz ponavljati i u kasnijoj stručnoj literaturi.

b) Odstupanje istinite vrijednosti od aritmetičke sredine je *sustavno*.

U mjerenjima su neizbježno prisutne i sustavne pogreške koje dolaze do izražaja to više što su mjerenja preciznija. Mjerenja su podvrgnuta djelovanju utjecajnih veličina, često promjenjivih, uz nagle ali i vrlo spore promjene. U toj složenosti sustavnih djelovanja nemoguće je odvojiti sva sustavna odstupanja od slučajnih kako bi se *ispravio rezultat* za iznos poznatih sustavnih odstupanja. Koliko god pažljivo otkrivali sustavna odstupanja, uvijek ostaju i neotkrivena ili nepoznata po veličini odstupanja koja imaju određeni predznak. Stoga ne možemo općenito pretpostaviti da su pogreške mjerenja raspodijeljene prema zakonima slučajnih pogrešaka kao što je to prema osnovama Gaussove teorije pogrešaka. S teoretskog stajališta djelovanje sustavnih pogrešaka će se očitovati u razlici između sredine neizmjernog broja mjerenja i istinite vrijednosti veličine. Statističkim rječnikom, *očekivana vrijednost* μ razlikuje se od definirane istinite vrijednosti X, što znači da postoji razlika $\Delta = \mu - X$.

Time je definirana sustavna pogreška mjerenja ako se uzme u obzir da je Δ prosječna vrijednost pojedinih sustavnih pogrešaka, tj.

$$\Delta = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n}{n}.$$

Promotrimo izvedene formule (8) i (9):

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} = \frac{[vv]}{n} + \Delta^2.$$

S obzirom na to da su u tom razmatranju pogreške mjerenja v slučajna odstupanja od očekivane vrijednosti neizmjernog broja mjerenja, to veličina $[vv]/n$ odgovara varijanci osnovnog skupa σ^2, pa slijedi:

$$m^2 = \sigma^2 + \Delta^2,$$

$$m = \sqrt{\sigma^2 + \Delta^2}.$$

Time je obrazložen *opći izraz za srednju* (kvadratnu) *pogrešku* na osnovi rasipanja pogrešaka mjerenja kao odstupanja od istinite vrijednosti a koji nalazimo u teoriji pogrešaka. Neki autori tu srednju pogrešku nazivaju i ukupnom ili totalnom srednjom pogreškom.

Praktična primjena te formule kao *kvantitativne* mjere točnosti nema značenja jer je veličina sustavne pogreške Δ većinom *neodrediva*, i to ne samo zbog problema procjenjivanja nepoznatih sustavnih djelovanja već i zbog *neodređenosti istinite vrijednosti veličine.*

Zbog toga je primjena *srednje pogreške kao kvantitativne mjere napuštena*, a uvođenjem općenitog pojma *mjerna nesigurnost*, za svaki kvantitativni proračun nesigurnosti osnovna je mjera *standardno odstupanje.*

U tom svijetlu promotrimo još jednom, kao primjer, već navedenu konstataciju Reissmana (1983) da se "iz ponovljenih mjerenja na jednom uzorku dobiva mjerna točnost, tj. srednja pogreška *m,* a iz mjerenja na više komada točnost izrade, tj. standardno odstupanje *s*". U jednom i drugom slučaju određuje se standardno odstupanje *s*, i to pri ponavljanju mjerenja na jednom uzorku ispituje se nesigurnost (preciznost) mjerenja iskazana standardnim odstupanjem s_m, a pri mjerenju na više komada određuje se ukupna nesigurnost (uzrokovana nesigurnošću mjerenja i netočnosti izrade) i iskazuje standardnim odstupanjem s_u. Preciznost izrade procijenit će se standardnim odstupanjem s_i:

$$s_i = \sqrt{s_u^2 - s_m^2}\,.$$

Iz tog primjera jasno se vidi kako se izraz točnost olako i nepotrebno upotrebljava a isto tako i srednja pogreška kao mjera kvantitete. Ako je npr. izradak plan-paralelna ploča određene debljine, očito postoji i nesigurnost određenja same mjerne veličine (debljina), npr. na kojem mjestu ploče (da li samo u sredini ili po čitavoj ploči?). Osim toga dimenzije ploče mijenjaju se djelovanjem vanjskih sila (npr. pritisak pri kontaktnom mjerenju) ili pri djelovanju utjecajnih veličina (npr. promjena temperature). Što bi u tom slučaju bila točnost izražena srednjom pogreškom kao mjerom kvantitete?

5. Zaključak

Već u ovom kratkom pregledu razlika u terminologiji i tumačenju osnovnih pojmova pri vrednovanju rezultata mjerenja vidi se opravdanost razloga zbog kojih je skupina istaknutih stručnjaka proučavala i donijela "Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti" (1993) u kojima je definiran pojam *nesigurnosti mjerenja*, koji bi se podudarao s naravi mjerenja kao praktične djelatnosti i sa sredstvima kojima se nesigurnost *nužno mora procjenjivati*. Ta sredstva ne uključuju nikakvo znanje o "istinitoj vrijednosti" mjerene veličine i ne daju bilo kakav uvid u takvu vrijednost, osim u onoj mjeri u kojoj je ispravljeni mjerni rezultat njezina najbolja procjena (Emerson 1998).

Prema tome, definiran je pojam *mjerne nesigurnosti* kao parametar razdiobe vjerojatnosti vrijednosti koje se mjerenjem mogu razumno pripisati mjerenoj veličini, uključujući u njezinu središtu dobivenu *najbolju procjenu*. Takva procjena ne uključuje znanje o *istinitoj vrijednosti* mjerene veličine ali će se stručnim mjerenjima u rezultatu osigurati *njezina blizina*, a što je bitno, u *uvjetima ponovljivosti* može se obaviti istom nesigurnosti i *iskazati na jednak način*.

Može se zaključiti da je Međunarodni dogovor važan ne samo za struku nego i u odnosu među različitim strukama kojima su u osnovi mjerenja, radi ne samo jedinstvene terminologije već i normiranog iskazivanja rezultata. U tome ima temeljno značenje:

1. jedinstveno izražavanje mjerne nesigurnosti *standardnim odstupanjem*,
2. jednak tretman svih sastavnica nesigurnosti kao slučajnih varijabli, zbog značajnih pojednostavnjenja procjene pojedinih sastavnica nesigurnosti i računanja ukupne nesigurnosti rezultata posrednih mjerenja, obuhvaćajući time i sustavna djelovanja bez obzira na *nepoznavanje istinitih vrijednosti,* odnosno pogrešaka kao *istinitih odstupanja.*

Takav jedinstveni pristup načinu iskazivanja mjernog rezultata ne isključuje specifične analize i proračune svojstvene nekim mjernim područjima. No terminološko je usklađivanje nužno. Kada već duljine mjerimo i mjerne nesigurnosti izražavamo u nanometrima, ne možemo, u doba nanooptike i nanotehnologije, govoriti o pogreškama mjerenja, o slučajnim i sustavnim pogreškama, o srednjoj pogreški i iskazivanju točnosti mjerenja na načine s početka XIX. stoljeća.

Literatura

Benčić, D. (1998, a): Pojam značenja i iskazivanja mjerne nesigurnosti, Geodetski list, 1, 23-30.

Benčić, D. (1998, b): Proračun sastavnica nesigurnosti i sastavljene standardne nesigurnosti, Geodetski list, 2, 89-99.

Benčić, D., Dusman F. (1994): Od mjerenja do mjeriteljske informacije, Geodetski list, 2, 129-146.

Čubranić, N. (1967): Teorija pogrešaka s računom izjednačenja, Tehnička knjiga, Zagreb.

Emerson, W. H. (1998): Sumnje u uklonjenu nesigurnost, DZNM, Glasilo 1-2, 7-9.

Feil, L. (1989): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.

Feil, L. (1990): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.

Gotthardt, E. (1968): Einführung in die Ausgleichrechnung, sv. 3, Karlsruhe, Sammlung Wichmann.

Hercigonja, I. (1968): Ciklus predavanja iz preciznog mjerenja, Zagreb.

Höpcke, W. (1980): Fehlerlehre und Ausgleichrechnung, Berlin – New York.

ISO (1993): Guide to the expression of uncertainty in measurement, ISBN 92-67-10188-9.

Jordan-Eggert (1931): Handbuch der Vermessungskunde II, Stuttgart.

Klak, S. (1986): Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet.

Međunarodni rječnik osnovnih i općih pojmova u metrologiji (International vocabulary for basic and general terms in metrology) (1996), Državni zavod za normizaciju i mjeriteljstvo, Zagreb.

Novaković, G. (2002): Tehnički standardi katastarske izmjere, Državna geodetska uprava, Zagreb.

Reismann (1983): Was ist der Unterschied zwischen dem mittleren Fehler und der Standardabweichung. Referat, Geodätische und Kartographische Tage, Dresden.

Vranić, V. (1965): Vjerojatnost i statistika, Tehnička knjiga, Zagreb.

Međunarodne norme: DIN 18723/1 (1975); DIN 1319/3 (1983); DIN 18709/4 (1984); DIN 55350/11 (1987); ISO 3534 (1977); ISO 7078 E/F (1985);

Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti (1995), Državni zavod za normizaciju i mjeriteljstvo, Zagreb.

Meaning and Comparison Analysis of the Terms Mean Square Error and Standard Deviation

ABSTRACT. The paper presents the brief historical review of developing the measures for assessing the quality of measurements and results with special reference to comparison analysis of the terms "standard deviation" and "mean square error" according to the international agreement for expressing the uncertainty in measurement where the standard deviation has been adopted as the basic measure of the uncertainty of results.

Keywords: *error, deviation, mean square error, standard deviation, uncertainty of measurement.*

Prihvaćeno: 2005-02-02